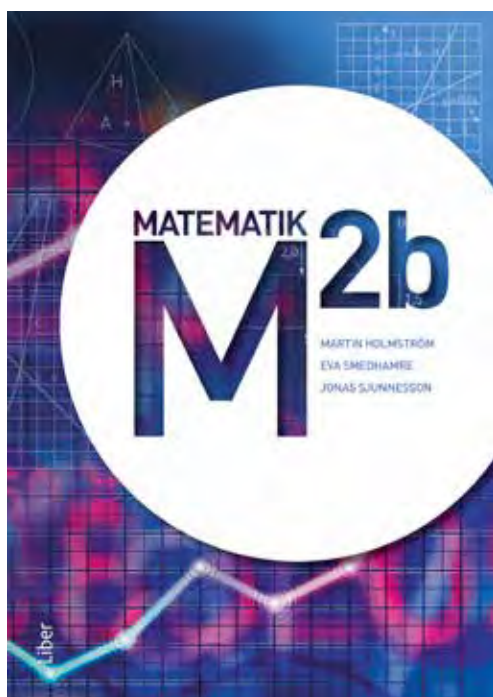


Rättelseblad till M 2b 47-08592-7

Tryckfel (första eller andra tryckningen)

Sida	Var	Står	Skall stå
5	Rad 11 nerifrån	Ekvationen 209	Ekvationen $2^x = 3$ 209
65	Uppg 1269	...tillsamman...	...tillsammans...
144	Exempel 2	$a^2 = 2,5^2 + 62$	$a^2 = 2,5^2 + 6^2$
Facit			
319	Uppg 1098c	$y^2 + 2xy + y^2$	$x^2 + 2xy + y^2$
328	Uppg 3024a o b	cm ²	m ²
339	Svaren till uppgift 2 och 8 ska byta plats i TEST 5A		
340	Uppg 6059b	$x = \frac{c}{p - q}$	$x = \frac{c}{p + q}$
343	T8	205	204
349	Uppg 4204	Sök maximala värdet värdet av...	Sök maximala värdet av...



Rättelse till M2b 47-08592-7

Tredje tryckningen

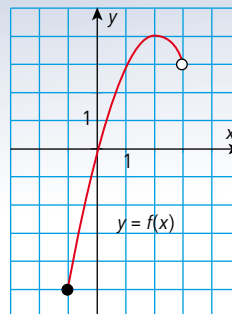
I tredje tryckningen är ett antal bilder felaktiga i kapitel fyra. Vi publicerar här de sidor som är aktuella. Om du har köpt ett exemplar av tredje tryckningen ber vi dig att kontakta kundservice för reklamation av boken, 08-690 93 30 eller kundservice.liber@liber.se.

- e) Lös olikheten $f(x) > 30$
 Vi ska avläsa när $f(x) > 30$, dvs när temperaturen är mer än 30 grader.
 Detta gäller då tiden x är mellan 10 min och 35 min.
 SVAR: $10 < x < 35$

EXEMPEL 1

Figuren visar grafen till $f(x) = 4x - x^2$.

Observera att grafen är ritad i ett *begränsat intervall*. Grafen slutar med en fylld ring och en ofylld ring.



- Definitionsmängden är följande: $-1 \leq x < 3$
- Värdemängden: $-5 \leq y \leq 4$
- Olikheten $f(x) < 0$ har lösningen $-1 \leq x < 0$

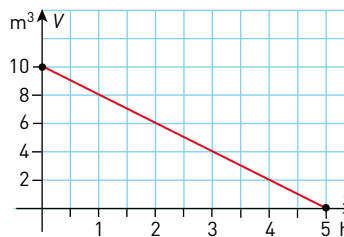
EXEMPEL 2

Vi beräknar några olika funktionsvärden för $f(x) = x^2 - 4x$.

- $f(5) = (5)^2 - 4 \cdot 5 = 25 - 20 = 5$
- $f(-3) = (-3)^2 - 4 \cdot (-3) = 9 + 12 = 21$
- $f(a + 1) = (a + 1)^2 - 4(a + 1) = a^2 + 2a + 1 - 4a - 4 = a^2 - 2a - 3$

- 4001 Grafen anger hur vattenmängden V i en behållare varierar med tiden t . Lös följande uppgifter med hjälp av grafen $V = f(t)$.

- Bestäm $f(0)$
- Bestäm värdemängden
- Lös ekvationen $V = 4$
- Lös olikheten $V > 6$



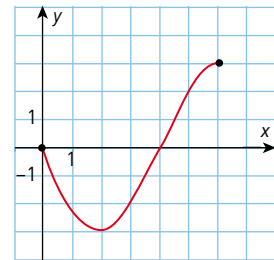
- 4002 Kostnaden i kronor för att tillverka x liter färg kan beräknas med funktionen

$$K(x) = 75\,000 + 12x + 0,002x^2.$$

- Vad kostar det att tillverka 500 liter?
- Bestäm $K(12\,000)$.
- Hur stor är den fasta kostnaden?

4003 Grafen visar hur temperaturen y beror av tiden x . Lös följande uppgifter med hjälp av grafen $y = f(x)$.

- Bestäm $f(2)$
- Lös ekvationen $f(x) = 2$
- Bestäm definitionsmängden
- Lös olikheten $y < 0$
- Bestäm värdemängden

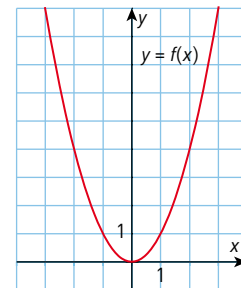


4004 Funktionen $f(x) = x^3 + 3x^2 - 4x + 5$. Bestäm följande funktionsvärden.

- $f(0)$
- $f(2)$
- $f(-1)$
- $f(0,5)$

4005 Lös följande uppgifter med hjälp av grafen till $y = f(x)$.

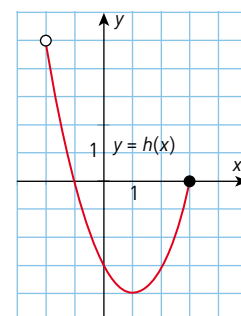
- Bestäm $f(2)$
- Bestäm $f(-1)$
- Bestäm definitionsmängden.
- Bestäm värdemängden
- Lös olikheten $f(x) > 4$
- Lös ekvationen $f(x) = 1$



4006 Rita ett koordinatsystem och skissa sedan grafen till en funktion där $f(1) = 2$, $f(2) = 3$ och $f(0) = 3$.

4007 Lös följande uppgifter med hjälp av grafen till $y = h(x)$.

- Bestäm $h(2)$
- Bestäm $h(0)$
- Lös ekvationen $h(x) = 0$
- Lös olikheten $h(x) < -3$
- Bestäm definitionsmängden.
- Bestäm värdemängden.



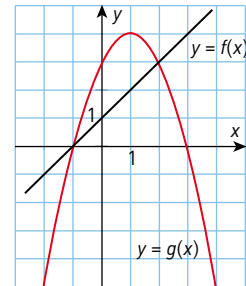
4008 Ge exempel på två linjära funktioner $f(x) = kx + m$ så att $f(0) = 3$.

4009 Titta på värdetabellen för funktionen $y = f(x)$.

x	0	1	2	3
y	1	2	5	10

- Är det sant att $f(1) = 0$?
- Bestäm $f(2)$.
- Bestäm a så att $f(a) = 1$.

4010 I koordinatsystemet finns grafen till den räta linjen $y = f(x)$ samt andragsgradsfunktionen $y = g(x)$. Bestäm med hjälp av graferna de x för vilka



- $f(x) = g(x)$
- $f(x) < g(x)$
- $f(x) = 2$
- $g(x) = 3$
- $f(x) < 0$
- $g(x) < 5$

4011 Vi har en funktion $f(x) = 2x + m$. Bestäm m så att

- $f(3) = 15$
- $f(5) > 12$
- $f(-3) < 0$.

4012 En graf går genom punkterna $(0, 3)$, $(2, 5)$, $(-2, 1)$ och origo.

Kan punkterna beskriva en funktion? Motivera!



4013 För en linjär funktion gäller att $f(2) = 3$ och $f(4) = 7$. Bestäm $f(8)$.

4014 Beräkna $f(-2) - g(2)$ då $f(x) = 3 - x$ och $g(x) = x^3 + 3^2$

4015 Bestäm riktningskoefficienten för en linjär funktion där $f(a) = 5$ och $f(a + 7) = 19$.

4016 Pia har ritat några räta linjer där det gäller att $y = k(x - 2) + 3$. Samtliga dessa linjer går genom punkten P . Bestäm konstanten a om grafen till $y = x^2 + ax$ också går genom punkten P .

4017 Här gäller att $s(t) = at^2 - 5a^2t$

- Vilken är den oberoende variabeln?
- Bestäm a så att $s(5) = s(-1)$

EXEMPEL 1

Vilken av följande funktioner motsvaras av grafen?

$$f(x) = 1 + 2x$$

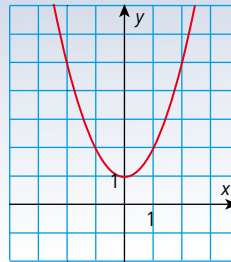
$$g(x) = x^2 + 1$$

$$h(x) = 1 - x^2$$

Grafen visar en x^2 -funktion där x^2 -termen är positiv.

Den funktion som har positiv x^2 -term är $g(x)$.

SVAR: $g(x)$

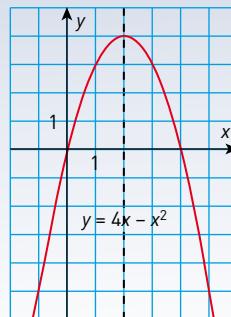


EXEMPEL 2

Rita grafen till funktionen $y = 4x - x^2$.

Vi gör en värdetabell och prickar därefter in punkterna i ett koordinatsystem.

x	$y = 4x - x^2$
-1	$-4 - 1 = -5$
0	$0 - 0 = 0$
1	$4 - 1 = 3$
2	$8 - 4 = 4$
3	$12 - 9 = 3$
4	$16 - 16 = 0$
5	$20 - 25 = -5$



Vi ritar en *jämn* kurva mellan punkterna. Lägg märke till att vi ”drar ut” kurvan så att den inte slutar precis i en punkt.

Kurvan är symmetrisk kring den streckade linjen $x = 2$.

Linjen $x = 2$ kallas symmetrilinje.

Använd också grafitare och rita grafen. Det är viktigt att du kan rita grafer både för hand och med grafitare.

4018 Ange, utan att rita, om graferna till följande funktioner har en minimipunkt eller maximipunkt.

a) $y = x^2$

b) $y = 2x - x^2$

c) $y = 2x$

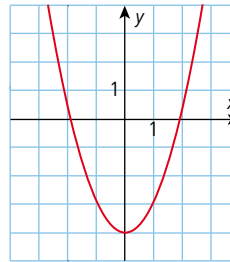
d) $y = 3 + 0,5x^2$

e) $y = x(x - 2)$

f) $y = 5 + 3x - x^2$

4019 Vilken av följande funktioner motsvaras av grafen?

- a) $y = 2x - 4$
- b) $y = 4 - x^2$
- c) $y = x^2 - 4$



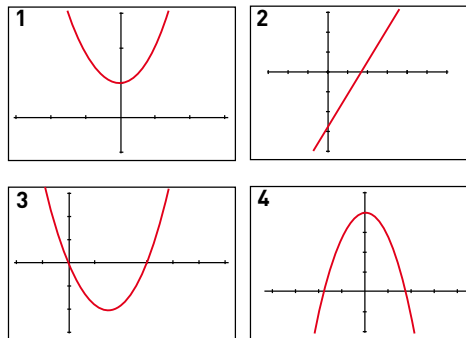
4020 Bestäm följande funktioners maximipunkt eller minimipunkt, t ex genom att rita graferna.

- a) $y = x^2 - 2x$
- b) $y = 4 - x^2$
- c) $y = x^2 + 2$

4021 Tänk dig en andragradskurva $f(x)$ som har en maximipunkt i $(3, -2)$. Skär kurvan x -axeln?

4022 Para ihop funktionen med rätt grafbild.

- a) $y = 2x - 3$
- b) $y = x^2 - 3x$
- c) $y = 3 - x^2$
- d) $y = x^2 + 1$



4023 Rita i samma koordinatsystem graferna till $y = x^2 - 4$ och $y = x - 2$. Graferna skär varandra i två punkter. Ange koordinaterna för dessa punkter.

4024 Lös ekvationssystemet både grafiskt och algebraiskt.

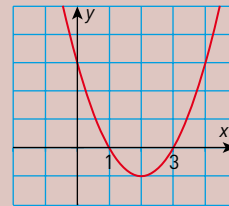
$$\begin{cases} y = 2x \\ y = x^2 - 3 \end{cases}$$

- 4025 a) Beräkna $\frac{f(4,01) - f(4)}{0,01}$ då $f(x) = x^2$
- b) Ge en geometrisk tolkning av det du beräknat i a).

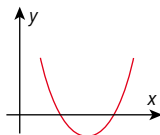


Bilden visar grafen till $y = x^2 - 4x + 3$.

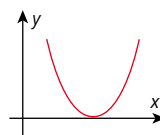
- Grafen skär x -axeln i $x = 1$ och $x = 3$.
- Funktionens nollställen är $x = 1$ och $x = 3$.
- Ekvationen $x^2 - 4x + 3 = 0$ har rötterna $x = 1$ och $x = 3$.



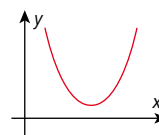
En andragradsfunktion kan ha två nollställen, ett nollställe eller inget nollställe. Om funktionen har bara ett nollställe så snuddar (tangerar) grafen x -axeln. Detta kallas ibland ett dubbelt nollställe.



Om grafen skär x -axeln på två ställen, har ekvationen $y = 0$ två olika rötter.



Om grafen tangerar x -axeln, har ekvationen $y = 0$ *dubbelrot*.



Om grafen inte skär x -axeln, *saknar* ekvationen $y = 0$ reella rötter.

EXEMPEL 1

Grafen till funktionen $y = 6x - x^2$ är ritad i koordinatsystemet.

Lös ekvationen $6x - x^2 = 0$ grafiskt.

Vi tittar på grafen och bestämmer funktionens nollställen. Dessa finner vi där kurvan skär x -axeln, dvs $x_1 = 0$ och $x_2 = 6$.

SVAR: $x_1 = 0$ $x_2 = 6$

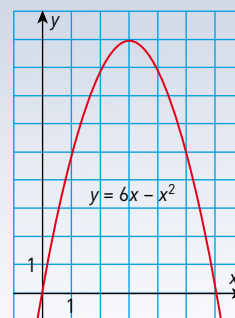
Som jämförelse löser vi ekvationen $6x - x^2 = 0$ algebraiskt.

Vi faktorerar och får

$$\begin{aligned} x(6 - x) &= 0 \\ x = 0 \text{ eller } 6 - x &= 0 \\ x_1 = 0 \quad x_2 &= 6 \end{aligned}$$

Alternativ lösning med "formeln":

$$\begin{aligned} 6x - x^2 &= 0 \\ x^2 - 6x + 0 &= 0 \\ x &= 3 \pm \sqrt{9 - 0} \\ x &= 3 \pm 3 \\ x &= 6 \text{ eller } x = 0 \end{aligned}$$



Siffertermen är noll.

EXEMPEL 2

- a) Grafen visar andragradsfunktionen $f(x) = 3 - 2x - x^2$.
Bestäm funktionens nollställen algebraiskt.

Vi sätter $f(x) = 0$ och får

$$3 - 2x - x^2 = 0$$

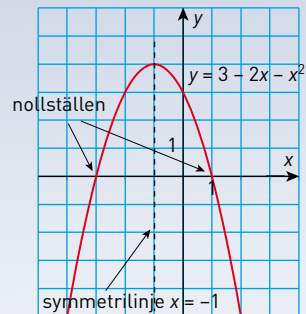
$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$x = -1 \pm \sqrt{1^2 + 3}$$

$$x = -1 \pm 2$$

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = -3$$



SVAR: $x_1 = 1$ $x_2 = -3$

- b) Från bilden ser vi att symmetrilinjen är $x = -1$.
Algebraiskt kan vi bestämma symmetrilinjen, eftersom vi vet att symmetrilinjen ligger mitt emellan funktionens nollställen.
Se lösningen i a) där vi får

$$x = -1 \pm 2$$

Symmetrilinjen är $x = -1$

- c) Bestäm algebraiskt funktionens största värde.

Vi utnyttjar att maximipunkten har samma x -koordinat som funktionens symmetrilinje.

Här ska vi alltså bestämma $f(-1)$

$$f(-1) = 3 - 2(-1) - (-1)^2 = 3 + 2 - 1 = 4$$

SVAR: Största värdet är 4.

Jämför med grafen!

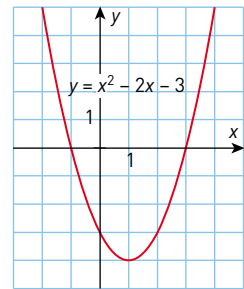


Symmetrilinjen ligger mitt emellan funktionens nollställen.

Nollställe för $x = 1$ och $x = 7$
 \Rightarrow symmetrilinjen $x = 4$

4026 Figuren till höger visar grafen till funktionen $y = x^2 - 2x - 3$.

- Lös ekvationen $x^2 - 2x - 3 = 0$ grafiskt.
- Vilken är funktionens symmetrilinje?

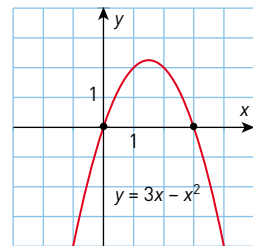


4027 Bestäm symmetrilinjen för en andragradsfunktion med följande nollställen.

- $x = 0$ och $x = 3$
- $x = -2$ och $x = 6$

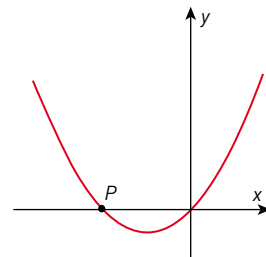
4028 Grafen till höger visar funktionen $y = 3x - x^2$

- Bestäm funktionens nollställen.
- Lös ekvationen $3x - x^2 = 0$ algebraiskt.



4029 Grafen till höger visar funktionen $y = 30x + 12x^2$

- Lös ekvationen $30x + 12x^2 = 0$
- Ange punkten P 's koordinater.



4030 Bestäm nollställen till dessa funktioner. Graferna ska *inte* ritas.

- $y = x^2 - 9$
- $y = 2x^2$
- $y = x(x - 6)$
- $y = (x - 3)(x + 2)$
- $y = x^2 - 2x + 1$
- $y = x^2 - 2x + 8$

Då en parabel roterar kring sin axel bildas en yta som kallas paraboloid. Ytan fungerar som reflektor i en parabol. I parabolens fokus placerar man antennen eftersom de signaler som tas emot, samlas där.





4031 Här ska du utgå från funktionen

$y = x - x^2 + 6$, men du ska *inte* rita grafen. Beskriv hur du kan

- se om funktionen har maximipunkt eller minimipunkt
- avgöra om det finns ett, två eller inga nollställen
- bestämma funktionens största värde?

4032 Bestäm koordinaterna för vertex.

- $y = x^2 - 6x + 14$
- $y = x^2 + 8x + 23$
- $y = 5x^2 - 10x - 15$

4033 Vilken är funktionens symmetrilinje?

- $f(x) = x^2 - 8x + 10$
- $y = x^2 - 16$
- $f(x) = (x - 5)(x - 1)$

4034 Hur många nollställen har en andragsgradsfunktion där

- maximipunkten är $(2, -1)$
- vertex är $(3, 0)$
- minimipunkten är $(4, -2)$.

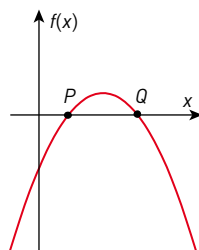
4035 Ge exempel på en andragsgradsfunktion som har

- maximipunkt i origo
- minimipunkt $(0, 4)$.

4036 Punkterna $(0, 5)$ och $(7, 5)$ ligger på en andragsgradskurva. Ange symmetrilinjens ekvation.

4037 En andragsgradsfunktion har symmetrilinjen $x = 2$. Punkterna $(0, 8)$ och $(1, 5)$ ligger på kurvan. Ange ytterligare två punkter på kurvan.

4038 Grafen visar en funktion som skär x -axeln i punkterna P och Q . Bestäm avståndet mellan P och Q då man vet att $y = 13x - x^2 - 30$.



4039 Vilken av dessa funktioner har en graf som tangerar x -axeln?
Motivera utan att rita.

A: $y(x) = x^2 - 6x + 5$

B: $y(x) = x^2 - 6x + 9$

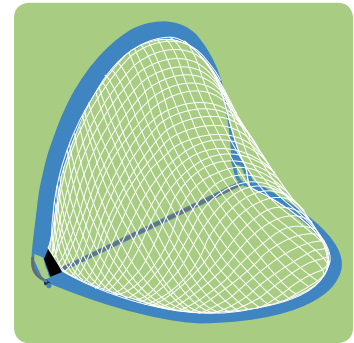
C: $y(x) = x^2 - 6x + 11$

4040 Utgå från funktionen $y = x^2 - 2x - 4 + p$
För vilka värden på konstanten p har funktionen

- ett nollställe
- två nollställen
- inga nollställen?

4041 Ge exempel på en andragradsfunktion som har nollställen
då $x = -1$ och $x = 3$.

4042 Bilden till höger visar ett Pop-up-mål som kan användas vid t ex innebandy. Målramen har form av en parabel. Om x -axeln graderas i cm längs mållinjen, kan målramens höjd y (cm) bestämmas enligt $y = 3,6x - 0,03x^2$. Beräkna målramens största höjd och bredd.



DIGITALA RUTAN

Allmänna andragradsfunktionen

Här ska du använda grafitande hjälpmedel och undersöka andragradsfunktionen $f(x) = ax^2 + bx + c$ för olika värden på konstanterna a , b och c .

1 Vi börjar med funktionen $f(x) = ax^2$

Rita några grafer där konstanten a får variera från 0,5 till 5.

Rita sedan grafer där a får variera från t ex -0,5 till -5

Formulera en slutsats.

2 Här ska vi undersöka hur konstanten c påverkar grafen till $f(x) = x^2 + c$.

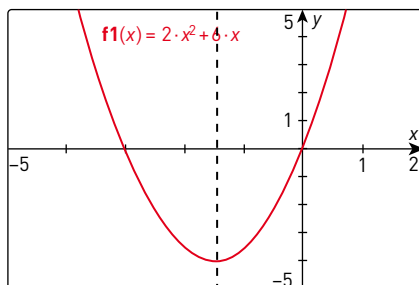
Rita några grafer där $-5 < c < 5$.

Formulera en slutsats.

3 Till sist ska vi undersöka hur symmetrilinjen påverkas av konstanterna a och b i $f(x) = ax^2 + bx$.

Vi väljer att börja med $a = 2$ och $b = 6$, dvs funktionen $f(x) = 2x^2 + 6x$

Se grafen och tabellen.



Rita ytterligare några grafer med olika värden på a och b , samt fyll i tabellen.

a	2				
b	6				
b/a	3				
x_{sym}	-1,5				

Formulera ett samband mellan x_{sym} och konstanterna a och b .

PROBLEMLÖSNING

EXEMPEL

Martin tävlar i höjdhopp. Ett av hans höjdhopp kan beskrivas med funktionen $y = -0,0248x^2 + 4,464x$ där y = hoppets höjd i cm över marken och x = förflyttning i cm längs med marken. Bestäm hoppets maximala höjd. Svara i hela cm.

Vi bestämmer funktionens nollställen.

$$0 = -0,0248x^2 + 4,464x \Rightarrow x_1 = 0 \quad x_2 = 180$$

Hoppets längd längs marken är alltså 180 cm.

Nu bestämmer vi maximala höjden y då $x = 90$

$$y(90) = -0,0248 \cdot 90^2 + 4,464 \cdot 90 = 200,88$$

SVAR: 201 cm

4043 Ett företags vinst y (Mkr) beskrivs med formeln $y = -0,3x^2 + 12x$ där x = tiden (år) efter år 2000.

- Vilket år är vinsten störst?
- Hur stor är den maximala vinsten?

4044 En 52 cm lång metalltråd böjs till en rektangel som har sidan x .



- Skriv en formel för arean y cm².
- Bestäm x så att arean blir 160 cm².
- Vilken är den maximala arean?

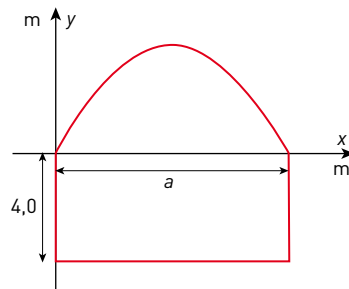
4045 På sin fritid tillverkar och säljer Hanna chokladpraliner. Om hon säljer x kg chokladpraliner kan hon beräkna vinsten V (kr) med formeln

$$V = 60x + x^2 - 1000 \quad \text{där} \quad 0 < x < 50$$

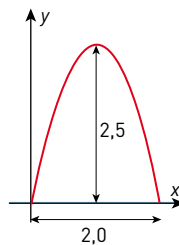
Hur många hela kg praliner måste Hanna sälja för att $V > 0$?

4046 En andragradsfunktion $y(x) = ax^2 + c$ har vertex i punkten $(0, 4)$ och skär x -axeln i $(4, 0)$. Bestäm konstanterna a och c .

- 4049** En badmintonhall har ett välvt tak. I figuren nedan ser du badmintonhallens ena gavel inlagd i ett koordinatsystem. Det välvda taket blir då en kurva i koordinatsystemet. Denna kurva kan beskrivas genom sambandet $y = 0,67x - 0,028x^2$

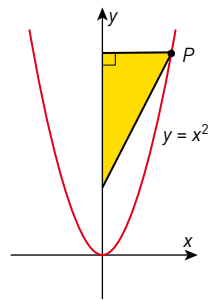


- a) Bestäm gavelns bredd a .
- b) Som du ser i figuren är hallens lägsta takhöjd 4,0 m. Hur stor är den högsta takhöjden?
- (NP Ma B Ht 2000)
- 4050** En bils bensinförbrukning, y liter/mil, är en funktion av farten, x km/h, enligt $y = 0,0001x^2 - 0,016x + 1,34$. Beräkna vid vilken hastighet x , där $30 < x < 120$, som bilen har sin lägsta bensinförbrukning.
- 4051** Figuren nedan visar ett valv där maximal höjd = 2,5 m och maximal bredd = 2,0 m. Eftersom valvet har samma form som en parabel kan dess form beskrivas med andragradsfunktionen $y(x) = ax^2 + bx + c$.
- a) Bestäm den matematiska modell som beskriver valvets höjd y enligt figuren.
- b) På vilket avstånd från valvets symmetrilinje är ”takhöjden” 1,90 m?



KURVAN OCH LINJEN

Bilden visar att kurvan $y = x^2$ och den räta linjen $y = kx + m$ skär varandra i punkten P . Från P har en linje dragits vinkelrätt mot y -axeln så att den gula triangeln har bildats.



I uppgift 1–6 gäller att $k = 2$

- 1 Bestäm P 's koordinater då $m = 3$.
- 2 Hur stor är den gula triangelns area då $m = 3$?
- 3 Bestäm m -värdet då P har koordinaterna $(4, 16)$.
- 4 Hur stor är den gula triangelns area då P har koordinaterna $(4, 16)$?
- 5 Hur stor är den gula triangelns area då P har y -koordinaten 100?
- 6 Bestäm ett uttryck för den gula triangelns area då punkten P har x -koordinaten $x = n$.
- 7 Här gäller att den räta linjen har $k = 3$. Vilket blir uttrycket för den gula triangelns area då punkten P har x -koordinaten $x = n$?



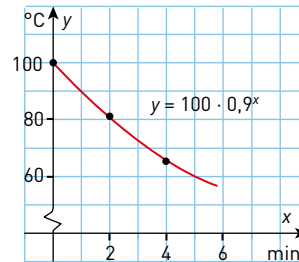
2 AVTAGANDE

När Eva dricker kaffe till frukost, brukar hon vänta ett tag så att temperaturen på kaffet hinner sjunka.

Grafen visar hur kaffets temperatur minskar de första minuterna.

Temperaturen y följer funktionen $y = 100 \cdot 0,9^x$ där x = tiden i minuter.

Grafen visar att exponentialfunktionen avtar.



Allmänt gäller att en exponentialfunktion skrivs på formen $y = C \cdot a^x$

- 1 Grafen till $y = C \cdot a^x$ skär y -axeln i punkten $(0, C)$
Jämför med företaget $(0, 2000)$ och kaffet $(0, 100)$
- 2 För funktionen $y = C \cdot a^x$ gäller följande då $C > 0$:
 - Om $a > 1$ är funktionen växande.
EXEMPEL: Företaget har $a = 1,15$
 - Om $a < 1$ är funktionen avtagande.
EXEMPEL: Kaffet har $a = 0,9$
- 3 Basen a måste vara > 0 och ej lika med 1.

Graferna till funktionerna $y = 4^x$ och $y = 4^{-x}$ är ritade i koordinatsystemet här bredvid.

Vi ser att $y = 4^x$ är växande och $y = 4^{-x}$ är avtagande.

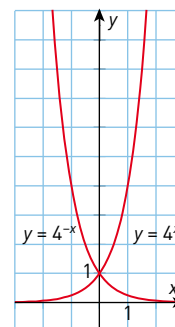
Vi ser också att graferna är varandras spegelbilder i y -axeln.

Lägg märke till att $y = 0,25^x$ kan skrivas så här:

$$0,25^x = \left(\frac{1}{4}\right)^x = (4^{-1})^x = 4^{-x}$$

SLUTSATS: $0,25^x = 4^{-x}$

På motsvarande sätt gäller att $y = 0,5^x$ och $y = 2^{-x}$ är samma funktion.





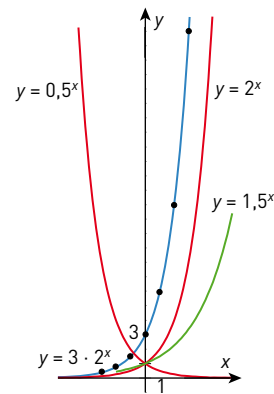
Lägg märke till följande i figuren:

Grafen till $y = 3 \cdot 2^x$ skär y -axeln i $(0, 3)$

Grafen till $y = 2^x$ skär y -axeln i $(0, 1)$.

Funktionen $y = 2^x$ växer snabbare än funktionen $y = 1,5^x$. Detta beror på att basen 2 är större än basen 1,5.

Graferna till $y = 0,5^x$ och $y = 2^x$ är spegelbilder av varandra i y -axeln, eftersom $0,5^x = 2^{-x}$



Då $C > 0$ ligger grafen till exponentialfunktionen $y = C \cdot a^x$ alltid ovanför x -axeln.

Grafen kan finnas oändligt nära x -axeln men kan aldrig skära den.

EXEMPEL 1

I en kommun minskar befolkningen enligt $y = 5000 \cdot 0,96^x$ där x = antal år efter år 2000. Se grafen.

a) I vilken punkt skär grafen y -axeln?

Grafen skär y -axeln då $x = 0$.

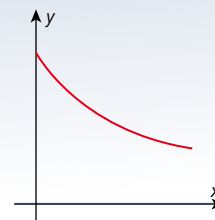
För $x = 0$ är $y = 5000 \cdot 0,96^0 = 5000 \cdot 1 = 5000$

SVAR: I punkten $(0, 5000)$

b) Går grafen genom punkten $(2, 4500)$?

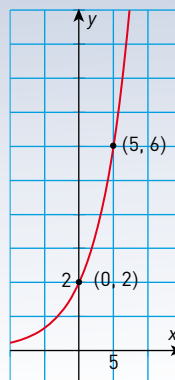
$f(2) = 5000 \cdot 0,96^2 = 4608$

SVAR: Nej, grafen går genom $(2, 4608)$



EXEMPEL 2

Figuren visar grafen till exponentialfunktionen $y = C \cdot a^x$. Bestäm konstanterna C och a . Observera axlarnas gradering.



1. Där kurvan skär y -axeln är $x = 0$.

Om vi sätter in $x = 0$ i funktionen får vi
 $y(0) = C \cdot a^0 = C \cdot 1 = C$

Samtidigt ser vi i figuren att $y(0) = 2$
 vilket innebär att $C = 2$

Konstanten C anger alltså var kurvan skär y -axeln.

2. Vi väljer en punkt på kurvan som är lätt att avläsa, t ex $(5, 6)$.

Vi sätter in $x = 5$ i funktionen och får $y(5) = 2 \cdot a^5$

Eftersom $y(5) = 6$ får vi $2a^5 = 6 \Rightarrow a^5 = 3 \Rightarrow a \approx 1,25$

SVAR: $C = 2$ och $a \approx 1,25$

4067 Utgå från $f(x) = 15\,000 \cdot 1,08^x$ och beräkna följande.

- a) $f(0)$ b) $f(1)$ c) $f(2)$

4068 Vilka av följande exponentialfunktioner är växande?

- a) $y = 2^x$ b) $y = 0,9^x$
 c) $y = 3 \cdot 0,5^x$ d) $y = 0,1 \cdot 1,25^x$

4069 Rita grafen till funktionen $y = 0,5^x$

Gör en värdetabell för $x = 2$, $x = 1$, $x = 0,5$ osv till $x = -3$.

4070 Är det någon av följande tre funktioner som visar en tillväxt?

Rita graferna med grafritare och undersök.

- a) $y = 0,8^x$ b) $y = 5 \cdot 2^{-x}$ c) $y = 0,2^{-x}$

4071 Folkmängden $f(x)$ i en kommun förväntas öka exponentiellt enligt

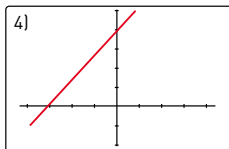
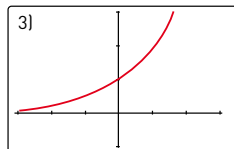
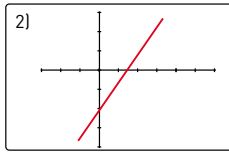
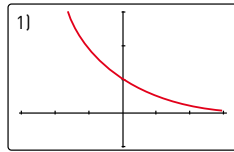
$f(x) = 24\,000 \cdot 1,04^x$ där x är tiden i år efter 2010.

- a) Vilken var folkmängden år 2010?
 b) Med hur många personer förväntas folkmängden öka under det första året?
 c) Vilken folkmängd bör kommunen ha år 2015?
 d) Med hur många procent ökar folkmängden varje år?

4072 Para ihop funktionen med rätt grafbild.

a) $y = 3 + x$ b) $y = 0,8^x$

c) $y = 2x - 3$ d) $y = 1,2^x$



4073 Vilka av följande funktioner skär y -axeln i $(0, 2)$?

a) $y = 2^x$ b) $y = x + 2$

c) $y = 2 \cdot 0,7^x$ d) $y = x^2 - x + 2$

4074 Vilka av funktionerna i föregående uppgift

a) beskriver en växande exponentialfunktion?

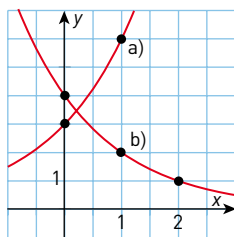
b) saknar skärningspunkt med x -axeln?

c) går genom punkten $(2, 4)$?

4075 Grafen till en exponentialfunktion $y = C \cdot a^x$ går genom punkterna $(0, 20)$ och $(5, 152)$. Vilken är funktionen?

4076 I figuren har vi ritat graferna till två exponentialfunktioner.

Skriv funktionerna på formen $y = C \cdot p^x$ och bestäm konstanterna C och p .



4077 En maskins värde y kr minskar enligt

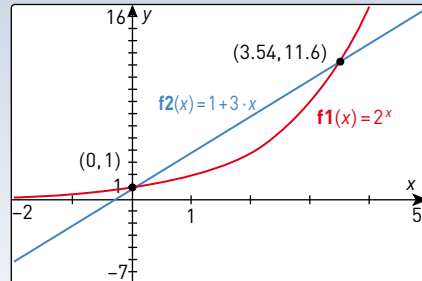
$$y = 90\,000 \cdot 0,8^x \text{ där } x \text{ är tiden i år.}$$

a) Bestäm maskinens värde efter 2 år.

b) Är värdet ungefär $1/3$ av nypriset efter 5 år?

EXEMPEL 3

Bilden visar graferna till $y = 2^x$ och $y = 1 + 3x$



- a) Använd bilden och lös ekvationen $2^x = 1 + 3x$

Vi söker skärningspunkterna mellan linjen och kurvan.
Skärningspunkternas x -koordinater ger ekvationens rötter.

SVAR: $x = 0$ eller $x \approx 3,5$

- b) Lös olikheten $2^x < 1 + 3x$ med hjälp av bilden.

Nu söker vi de x -värden där 2^x är mindre än $1 + 3x$. Vi söker alltså de x -värden där grafen ligger *under* (nedanför) linjen.

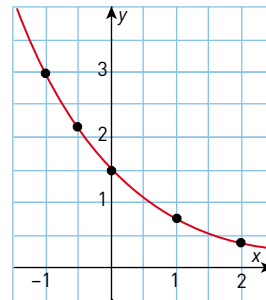
Detta gäller för de x som finns mellan $x = 0$ och $x \approx 3,5$

Lösningen skrivs $0 < x < 3,5$

SVAR: $0 < x < 3,5$

- 4078 Grafen visar $y = f(x)$.
Använd grafen och bestäm

- $f(0)$
- $f(-1)$
- Är det sant att $f(2) < 1$?
- Lös ekvationen $f(x) = 1$
- Lös olikheten $f(x) < 1,5$



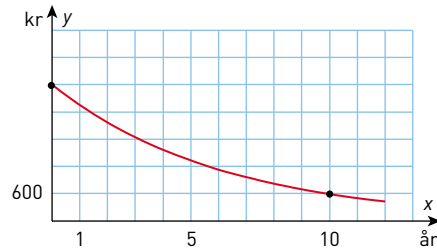
- 4079 Rita graferna till $y = 0,8^x$ och $y = 5$ med grafitare.

- Lös ekvationen $0,8^x = 5$
- Lös olikheten $0,8^x > 5$

- 4080 Rita grafen till $y = 2^x$ och bestäm ett ungefärligt värde på x då

- $2^x = 5$
- $2^x = 6$
- $2^x = 7$

- 4081** Funktionen $y = C \cdot a^x$ går genom punkterna (1, 300) och (3, 432).
 a) Bestäm konstanterna C och a .
 b) Går grafen genom punkten (5, 625)?
- 4082** Grafen visar hur värdet på en cykel minskar med tiden.
 a) Skriv funktionen på formen $y = C \cdot a^x$ och beräkna C och a .
 b) Med hur många procent minskar värdet varje år?



- 4083** Rita grafen till $y = 4 \cdot 2^{-x}$. För vilket x -värde skär grafen linjen $y = 9 + x$?
- 4084** Rita med grafitare $f(x) = 1 + 1,2^x$ och $g(x) = 1,4^x$. Lös olikheten $f(x) > g(x)$ med hjälp av graferna.
- 4085** En exponentiellt växande funktion $f(x) = 100p^x$ är given. Bestäm $f(5)$ om $f(3) = 152$.

- 4086** Motivera påståendet:
 ”Ekvationen $3^x = x$ saknar lösning”.



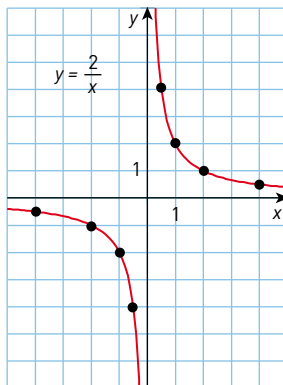
TANKENÖT 11

En glasflaska med kork kostar 110 kr. Flaskan kostar 100 kr mer än korken. Hur mycket kostar korken?

FLER FUNKTIONER

Alla grafer som vi har ritat tidigare har varit sammanhängande.
Dessa sammanhängande funktioner kallas *kontinuerliga*.

Bilden visar grafen till $y = \frac{2}{x}$

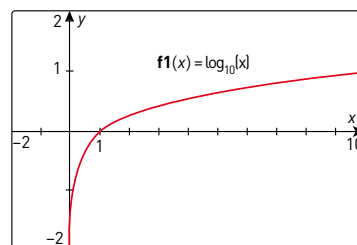


Observera att funktionen $y = \frac{2}{x}$ ej är definierad för $x = 0$.

Funktionen $y = \frac{2}{x}$ är *diskontinuerlig* (ej kontinuerlig)

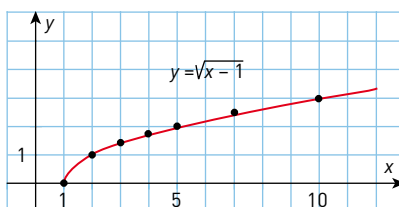
eftersom grafen består av två delar.

Bilden till höger visar grafen till
funktionen $y = \lg x$
Vi ser att funktionen är
definierad för $x > 0$



Till sist ritas vi grafen till $y = \sqrt{x-1}$

Eftersom man inte kan dra roten ur ett negativt tal, gäller här $x \geq 1$



SAMMANFATTNING

Symbolen $f(x)$

Istället för $y = 2x + x^2$ kan vi skriva

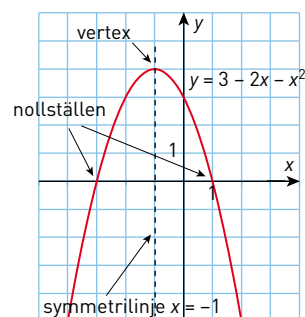
$$f(x) = 2x + x^2$$

$$f(3) = 2 \cdot 3 + 3^2 = 6 + 9 = 15$$

Andradsfunktion

Bilden visar grafen till andradsfunktionen

$$y = 3 - 2x - x^2$$

**Nollställen**

Grafen skär x -axeln för $x = -3$ och för $x = 1$.

Funktionens nollställen är -3 och 1 .

Symmetrilinje

Maximipunkten har koordinaterna $(-1, 4)$.

Kurvan är symmetrisk kring linjen $x = -1$

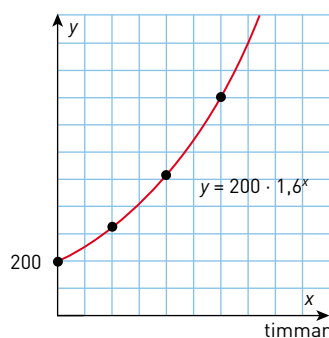
Exponentialfunktion

$y = C \cdot a^{kx}$ där $a > 0$ kallas exponentialfunktion.

Observera att $a \neq 1$

$a > 1$ betyder växande

$a < 1$ betyder avtagande

**Logaritmer**

Varje positivt tal kan skrivas som en tiopotens.

Talets logaritm är exponenten i denna potens.

$$1000 = 10^3$$

$$\lg 1000 = 3$$

$$0,01 = 10^{-2}$$

$$\lg 0,01 = -2$$

$$2 \approx 10^{0,3010}$$

$$\lg 2 \approx 0,3010$$

BLANDADE UPPGIFTER

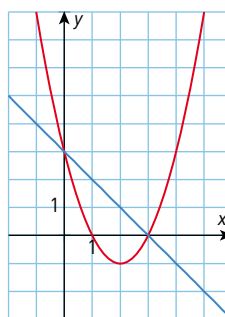
Beräkna följande potenser utan att använda räknare.

- 4171 a) 7^2 b) 4^3 c) $0,5^2$ d) 2^5
 e) 8^0 f) 10^{-2} g) 2^{-1} h) 3^4
- 4172 a) 4^{-1} b) 12^0 c) 2^{-2} d) 5^{-2}
 e) 20^{-1} f) $100^{0,5}$ g) $25^{0,5}$ h) 10^{-3}

4173 Figuren visar grafen till $y = x^2 - 4x + 3$ och $y = 3 - x$.

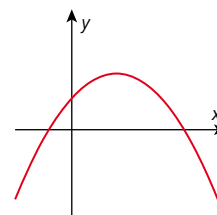
Lös följande uppgifter med hjälp av graferna.

- a) $x^2 - 4x + 3 = 0$
 b) $x^2 - 4x + 3 < 0$
 c) $x^2 - 4x + 3 = 3 - x$
 d) $x^2 - 4x + 3 > 3$
 e) $3 - x < x^2 - 4x + 3$
 f) $3 - x < 0$



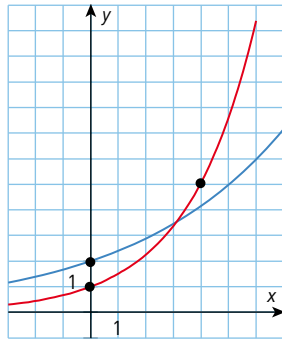
- 4174 Bestäm $f(1,5)$ då
 a) $f(x) = 4x^2 - 2x$
 b) $f(x) = 1013 \cdot 0,887^x$ (med tre värdesiffror)
- 4175 Lös ekvationerna. Avrunda till tre värdesiffror.
 a) $x^5 = 15$ b) $6^x = 12$
 c) $\lg x = -0,35$ d) $10^x = 2,3$
 e) $8^{0,5x} = 10$ f) $\lg 5x = 3$

- 4176 Grafen visar funktionen $y = 8x - x^2 + 20$
 a) Bestäm funktionens nollställen.
 b) Vilka är maximipunktens koordinater?



- 4177 En andragradsfunktion har symmetrilinjen $x = 3$ och ett nollställe $x = 20$. Vilket är det andra nollstället?

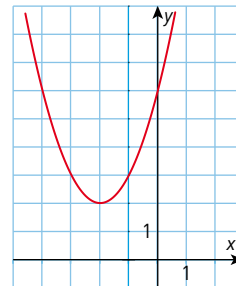
- 4178 I figuren har vi ritat graferna till $y = k \cdot 1,2^x$ och $y = b^x$. Bestäm konstanterna k och b .



- 4179 Ett kapital växer med 6 % ränta. Hur lång tid tar det för kapitalet att fördubblas?
- 4180 Skriv en exponentialfunktion $y = C \cdot a^x$ som skär y -axeln i 75 och är växande.
- 4181 Befolkningen i en kommun har på 8 år minskat exponentiellt från 32 000 till 25 100. Bestäm med tre värdesiffror hur lång tid det tar för befolkningen att minska till hälften.
- 4182 En gitarr kostar 18 000 kr i inköp och man beräknar att värdet minskar med 20 % per år. Beräkna med två siffrors noggrannhet
- gitarrens värde efter 5 år
 - hur lång tid som krävs för att värdet ska minska med 60 %.



- 4192** Lös ekvationen $5^{(x+1)} = 14^x$ och svara med
a) 2 decimaler b) exakt.
- 4193** Temperaturen i en ugn avtar exponentiellt med tiden.
Klockan 12.00 var temperaturen 1000 grader och 2 timmar senare hade temperaturen sjunkit till 250 grader.
Vid vilken tidpunkt var temperaturen 400 grader?
- 4194** Hur många rötter har ekvationen? Rita graferna och undersök.
a) $x^2 = \lg x$ b) $x^2 + \lg x = 0$
c) $\lg x = x - 2$ d) $\lg x = 2 - x$
- 4195** Värdet av en bil sjunker från 150 000 kr till 110 000 kr på två år.
Teckna en modell där värdet y (kr) är en funktion av tiden x (år).
Låt värdeminskningen vara
a) linjär b) exponentiell.
Bestäm bilens värde i tusentals kr efter ytterligare tre år enligt den
c) linjära modellen d) exponentiella modellen.
- 4196** En andragradsfunktion $y = ax^2 + bx + c$ går genom origo och punkten $(8, 0)$. Funktionen vertex har koordinaterna $(4, 10)$.
Bestäm a , b och c .
- 4197** Lös ekvationen $2^{4x+1} = 32 \cdot 768$
- 4198** Beräkna exakt $49^{-0,5} + (\sqrt{2})^{-2}$
- 4199** Figuren visar grafen till funktionen $y(x) = x^2 + 4x + 6$
a) Lös ekvationen $x^2 + 4x + 6 = 3$ algebraiskt. Tolka sedan lösningen grafiskt med hjälp av figuren.
b) Lös ekvationen $x^2 + 4x + 6 = 0$ algebraiskt och tolka lösningen grafiskt
c) Bestäm a så att ekvationen $x^2 + 4x + 6 = a$ får dubbelrot.

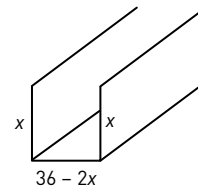


- 4200** Lös olikheterna
a) $0,87^x > 1,2$ b) $\lg(2x) < 0,8$
- 4201** Lös ekvationerna. Ange svaret i exakt form.
a) $\lg x = 1 + 2 \lg 3$ b) $\lg(\lg x) = -1$

- 4202** Antag att en normaldos av ett speciellt läkemedel innebär att man får 4,0 mg av ett ämne i kroppen. Därefter minskar mängden y exponentiellt med tiden x , så att hälften finns kvar efter 16 h. Använd formeln $y = 4,0 \cdot 10^{kx}$ och beräkna
- hur många procent som finns kvar efter 24 h?
 - efter hur lång tid det är 3,0 mg av ämnet kvar i kroppen?

- 4203** Då ett företag säljer en vara för x kr kan intäkten I kr bestämmas med funktionen $I(x) = 20\,000x - 500x^2$. Bestäm den maximala intäkten.

- 4204** Av en plåt som är 36 cm bred ska man bocka en öppen ränna med rektangulärt tvärsnitt. Vilket värde på x ger största möjliga tvärsnittsarea?



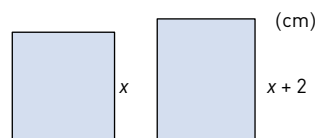
- 4205** I den här uppgiften ska du undersöka lösningen till ekvationen $x^2 - 4x + 2 = kx + m$.
- Lös ekvationen $x^2 - 4x + 2 = x - 2$
 - Rita funktionerna $f(x) = x^2 - 4x + 2$ och $g(x) = x - 2$ på din räknare och förklara vad du har beräknat i a-uppgiften.
 - Bestäm talet a så att ekvationen $x^2 - 4x + 2 = x - a$ får exakt en lösning. Rita sedan de två graferna på samma sätt som i uppgift b och förklara ditt resultat.
- 4206** För funktionen $f(x) = A \cdot b^x$ gäller att om x ökar från 8 till 9 så ökar funktionsvärdet med 25 %. Dessutom vet vi att $f(2) = 25$. Bestäm A och b .

- 4207** Lös olikheten $(x - 9) \lg x < 0$

- 4208** Lös ekvationerna

a) $3^{2x} + 3^x = 6$ b) $4^x = 2^x + 2$

- 4209** Rektanglarna har var och en omkretsen 72 cm. Beräkna det maximala värdet på rektanglarnas sammanlagda area.



- 4210** Lös ekvationssystemet
$$\begin{cases} 3^{2x+y} = 243 \\ 2^{4x-y} = 8192 \end{cases}$$

- 4211** Bestäm värdet av $x^2 + y^2$ då $x^y = 2$ och $(2x^2)^{3y} = 1$