

Kapitel 1

1208

Se facit.

1209

$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$

Sök höjden:

$$\frac{h}{8,2} = \sin 41^\circ \Rightarrow$$

$$h = 5,4 \text{ cm } (5,37968)$$

$$A = \frac{11,4 \cdot 5,4}{2} \text{ cm}^2 = 31 \text{ cm}^2$$

1210

Se viktgruta i exempel 2 s. 12 $\Rightarrow 45^\circ$.

1211

Den undre vinkeln u är

$$\tan^{-1}\left(\frac{2}{5}\right) = 21,8^\circ$$

$u + v$ är

$$\tan^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) = 31^\circ$$

$$v = 31^\circ - 21,8^\circ = 9,2^\circ$$

$$v = 9^\circ$$

1212

Se facit.

1213

$$\frac{y}{4} = \sin 37^\circ$$

$$y = 4 \cdot \sin 37^\circ = 2,4$$

Pythagoras:

$$x^2 = 4^2 - 2,4^2$$

$$\Rightarrow P \approx (3,2; 2,4)$$

$$Q = ?$$

Samma metod som i a). Se facit.

1214

Se facit.

1215

Kalla den längre kateten för b och hypotenusan, dvs. den sökta sidan, för c .

$$\frac{8}{b} = \tan v$$

$$\text{Givet: } \frac{1}{2,4} = \tan v$$

$$\Rightarrow \frac{8}{b} = \frac{1}{2,4}$$

$$\Rightarrow b = 19,2$$

Pythagoras:

$$8^2 + 19,2^2 = c^2$$

$$\Rightarrow c = 20,8 \text{ cm}$$

1216

Se facit.

1217

Dela upp pentagonen i 5 likbenta trianglar med basen 7,0 cm och höjden h .

Arealen av en sådan triangel är

$$\frac{2 \cdot \frac{7}{2} \cdot h}{2}$$

Söker h :

Toppvinkeln i de likbenta trianglarna är $360^\circ/5 = 72^\circ$. Det ger att

$$h = \frac{3,5}{\tan 36^\circ} \text{ cm} = 4,8 \text{ cm}$$

Vi får:

$$A = 5 \cdot \frac{2 \cdot 3,5 \cdot 4,8}{2} \text{ cm}^2 = 84 \text{ cm}^2$$

1224

Se viktgruta s. 15.

$$h = 5 \cdot \sqrt{3} \text{ cm}$$

$$c^2 = 5^2 + h^2 = 5^2 + (5 \cdot \sqrt{3})^2$$

$$c = 10 \text{ cm}$$

$$A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{5 \cdot 5 \cdot \sqrt{3}}{2} \text{ cm}^2 = 12,5 \cdot \sqrt{3} \text{ cm}^2$$

1225

a)

$$\sin 30^\circ = 0,5$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$0,5^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1$$

b)

$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 60^\circ = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{0,5} = \sqrt{3}$$

$$\cos 45^\circ = \sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2$$

1226

Se viktgruta s. 15.

Diagonalen = 3 =>

$$\text{sidorna} = \frac{3}{\sqrt{2}} \text{ cm vardera}$$

1227

Se viktgruta s. 15.

$$h = 7 \text{ cm} = \text{halva sidan} \cdot \sqrt{3} \Rightarrow$$

$$\text{Kort katet} = \frac{7}{\sqrt{3}} \text{ cm}$$

Hypotenusan

$$c = \sqrt{7^2 + \left(\frac{7}{\sqrt{3}}\right)^2} \text{ cm} = \frac{14}{\sqrt{3}} \text{ cm}$$

1228

Båda är rätt ty

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

1229

Se facit.

1310

Utgå från enhetscirkeln =>

$$v = 30^\circ \text{ och } u = 180^\circ - v = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$$

1311

a) Se viktgruta s. 19.

Två vinklar: -30° och $180^\circ - (-30^\circ) = 210^\circ$

b) Se viktgruta s. 19.

Två vinklar: 120° och -120° .

1312

a är x -koordinat, b är y -koordinat.

Enhetscirkeln har radien 1 i.e.

$$\text{a) } \frac{b}{1} = b \quad \text{b) } \frac{a}{1} = a$$

$$\text{c) } \frac{b}{a} \quad \text{d) } \frac{-a}{1} = -a$$

1313-1315

Se facit.

1316

a)

$$\sin v = \sin(180^\circ - v) = \sin(180^\circ - 210^\circ) = \sin(-30^\circ) = -0,5$$

b)

$$\begin{aligned}\cos v &= \cos(-v) = \cos(-210^\circ) = \\ &= \cos 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

$$c) \tan 210^\circ = \frac{\sin 210^\circ}{\cos 210^\circ} = \frac{-1/2}{-\sqrt{3}/2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

1317

a)

$$\sin 30^\circ = 0,5$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60^\circ = 0,5$$

=>

$$0,5^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1$$

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 0,5^2 = 1$$

b) och c) Se facit

1318

a) Höjden över marken kan tecknas

$$30 \text{ m} + 30 \cdot \sin 60^\circ \text{ m} = 56 \text{ m}$$

b) På samma höjd då $v = 120^\circ$.

$$\text{Förflyttning: } \frac{60}{360} \cdot 2\pi r \text{ m} = 31 \text{ m (31,4)}$$

1319

$$\cos v = a$$

$$\sin(-v) = -b$$

$$\tan v = \frac{b}{a}$$

=>

a)

$$a \cdot \frac{-b}{-a} = b$$

b)

$$-b \cdot \frac{b}{a} = \frac{-b^2}{a}$$

1406

Använd areasatsen. Mellanliggande vinkel $41,8^\circ$. Sidorna är 41 m och 18 m (skissa!). Den motstående sidan till den minsta vinkeln måste vara den kortaste.

$$A = \frac{14 \cdot 18 \cdot \sin 41,8}{2} \text{ m}^2 = 84 \text{ m}^2$$

1407

Dela parallelogrammen i två delar. Använd areasatsen:

$$\frac{A}{2} = \frac{3,2 \cdot 7,2 \cdot \sin 115^\circ}{2} \text{ cm}^2 = 10,3 \text{ cm}^2$$

$$A = 21 \text{ cm}^2$$

1408-1409

Se facit.

1410

Likformighet:

Förhållandet mellan AD och AB är lika med förhållandet mellan AE och AC=>

$$\frac{5,0}{3,0} = \frac{7,0}{AC}$$

$$\Rightarrow AC = 4,2 \text{ cm}$$

$$\text{Vinkeln BAC} = 180^\circ - 85^\circ - 53^\circ = 42^\circ$$

Areasatsen:

$$A = \frac{3 \cdot 4,2 \cdot \sin 42^\circ}{2} \text{ cm}^2 = 4,2 \text{ cm}^2$$

1411

Areasatsen:

$$A = \frac{a \cdot a \cdot \sin \nu}{2} = \frac{a^2 \cdot \sin \nu}{2}$$

1412

I en liksidig triangel är alla vinklar lika stora,

$$\text{dvs. } 60^\circ. \text{ Vet att } \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Areasatsen: } A = \frac{s^2 \cdot \sqrt{3} / 2}{2} = \frac{s^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$$

1413

Se facit.

1422

Skissa triangeln. Den minsta vinkeln 17° ligger mellan sidorna som är 30 respektive 19 cm.

Sinussatsen:

$$\frac{\sin \nu}{30} = \frac{\sin 17^\circ}{19}$$

Ekvationen ovan har två lösningar

$$\nu = 42,4^\circ \text{ eller } \nu = 180^\circ - 42,4^\circ$$

Eftersom den sökta vinkeln är trubbig får vi

$$\nu = 138^\circ$$

1423

Skissa figur. Sinussatsen

$$\frac{16}{\sin 35^\circ} = \frac{21}{\sin B} \Rightarrow$$

$$B = 48,8^\circ \text{ eller } 180^\circ - 48,8^\circ$$

$$\angle C = 180^\circ - 35^\circ - 48,8^\circ = 96,2^\circ$$

eller

$$180^\circ - 35^\circ - (180^\circ - 48,8^\circ) = 13,8^\circ$$

Areasatsen:

$$A = \frac{21 \cdot 16 \cdot \sin 96,2^\circ}{2} \text{ cm}^2 = 170 \text{ cm}^2$$

eller

$$A = \frac{21 \cdot 16 \cdot \sin 13,8^\circ}{2} \text{ cm}^2 = 40 \text{ cm}^2$$

1424

Sinussatsen:

$$\frac{\sin B}{5} = \frac{\sin 50^\circ}{4} \Rightarrow$$

$$B = 73,25^\circ$$

eller

$$B = 180^\circ - 73,25^\circ$$

$$\Rightarrow c = 57^\circ \text{ eller } 23^\circ$$

1425

Skissa figur.

$$\text{Vinkeln C} = 180 - 43 - 26 =$$

Sinussatsen:

$$\frac{AC}{\sin 43^\circ} = \frac{16}{\sin 111^\circ}$$

$$AC = 11,7 \text{ cm}$$

Höjden vinkelrät mot sidan AB.

$$\frac{h}{AC} = \sin 26$$

$$\Rightarrow h = 5,1 \text{ cm}$$

1426

Sinussatsen:

$$\frac{\sin A}{BC} = \frac{\sin C}{AB}$$

$$\sin C = \frac{AB \sin A}{BC}$$

Vid rätvinklig triangel:

$$\sin A = \frac{BC}{c} \Rightarrow BC = c \cdot \sin A$$

a) Studera motsvarande figur på s. 30. Två fall då

$$c \cdot \sin A < BC < c$$

b) Ett fall då

$$BC = c \cdot \sin A \text{ eller } BC \geq c$$

1427

Se facit.

1434

a)

$$19^2 = 25^2 + x^2 - 2 \cdot 25 \cdot x \cdot \cos 37^\circ$$

$$x^2 - 40x + 264 = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 32 \text{ m och } x_2 = 8 \text{ m}$$

b)

$$\frac{19}{\sin 37} = \frac{25}{\sin B} \Rightarrow$$

$$B = 52,3^\circ \text{ eller } 180^\circ - 52,3^\circ$$

$$\wedge C = 180 - 37 - B \Rightarrow$$

$$C = 15,4^\circ \text{ eller } 90,7^\circ$$

$$AB = \frac{19 \sin C}{\sin 37} \Rightarrow$$

$$AB = 8 \text{ cm eller } 32 \text{ cm}$$

1435

$$AC = \sqrt{5,0^2 + 12^2} \text{ m} = 13 \text{ m}$$

Cossinussatsen ger:

$$13^2 = 16^2 + 17^2 - 2 \cdot 16 \cdot 17 \cdot \cos \nu$$

$$\Rightarrow \nu = 46^\circ$$

1436

a)

$$d_1^2 = (12^2 + 19^2 - 2 \cdot 12 \cdot 19 \cdot \cos 52^\circ) \text{ mm}$$

$$d_1 = 15 \text{ mm}$$

$$d_2^2 = (12^2 + 19^2 - 2 \cdot 12 \cdot 19 \cdot \cos 128^\circ) \text{ mm}$$

$$d_2 = 28 \text{ mm}$$

$$\text{ty } \nu_2 = \frac{360^\circ - 2 \cdot 52^\circ}{2} = 128^\circ$$

b) cosinussatsen:

$$12^2 = \left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2 - 2 \left(\frac{d_1}{2}\right) \cdot \left(\frac{d_2}{2}\right) \cos x$$

$$x = 59^\circ$$

1437

Skissa figur. Givet: Resultanten

$$\bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 = 35 \text{ N}$$

$$\nu = \nu_1 + \nu_2$$

$$15^2 = 25^2 + 35^2 - 2 \cdot 25 \cdot 35 \cdot \cos \nu_1$$

$$25^2 = 15^2 + 35^2 - 2 \cdot 15 \cdot 35 \cdot \cos \nu_2$$

$$\nu_1 = 21,8^\circ$$

$$\nu_2 = 38,2^\circ$$

$$\nu = 60^\circ$$

1438

Förläng sidan 11 m med 8 m på varje sida så att två rätvinkliga trianglar erhålls.

$$\sin v = \frac{8}{15} \Rightarrow v = 32,2^\circ$$

Sidorna som är 15 m och 27 m har alltså en mellanliggande vinkel som är $90^\circ - 32,2^\circ = 57,8^\circ$.

Cosinussatsen ger:

$$d^2 = 15^2 + 27^2 - 2 \cdot 15 \cdot 27 \cdot \cos 57,8^\circ$$

$$d = 23 \text{ m } (22,8)$$

1439

Se facit.

1440

Skissa figur. Utnyttja cosinussatsen för att beräkna den minsta vinkeln:

$$5^2 = 12^2 + 13^2 - 2 \cdot 12 \cdot 13 \cdot \cos v$$

$$\Rightarrow v = 22,6^\circ$$

Söker övriga vinklar:

Sinussatsen ger

$$\frac{\sin 22,6}{5} = \frac{\sin u}{12}$$

$$u = 67,4^\circ$$

$$\Rightarrow 23^\circ, 67^\circ \text{ och } 90^\circ$$

1441

a) Se facit.

b) från a-uppgiften:

$$\cos A = \frac{1 + 25 \cos C}{24}$$

Sök exakt värde på $\cos C$.

Ledning. Utnyttja följsats till randvinkelsats:

Motstående vinklar i en fyrhörning har alltid summan 180° då fyrhörningen är inskriven i en cirkel (se uppgift 2246 i M 2c).

$$A + C = 180^\circ$$

$$C = 180^\circ - A$$

$$\cos A = \frac{1 + 25 \cos(180^\circ - 0)}{24}$$

$$(\cos(180^\circ - A) = -\cos A)$$

$$\cos A = \frac{1 - 25 \cos A}{24}$$

$$24 \cos A = 1 - 25 \cos A$$

$$49 \cos A = 1$$

$$\cos A = \frac{1}{49}$$

1444

Kalla vinkeln vid väggfästet u . Ur figur:

$$\frac{\sin v}{1,0} = \frac{\sin u}{1,2} \Rightarrow$$

$$u = 36,9^\circ \text{ eller } 180^\circ - 36,9^\circ$$

Den tredje vinkeln i triangeln (vid stag och flaggstång):

$$w = 180^\circ - 30^\circ - 36,9^\circ = 113,1^\circ \text{ eller}$$

$$w = 180^\circ - 30^\circ - (180^\circ - 36,9^\circ) = 6,9^\circ$$

$$s_1 = \frac{1 \cdot \sin 113,1^\circ}{\sin 30^\circ} \text{ m} = 1,8 \text{ m } (1,84)$$

$$s_2 = \frac{1 \cdot \sin 6,9^\circ}{\sin 30^\circ} \text{ m} = 0,2 \text{ m } (0,24)$$

1445

Övre triangel rätvinklig $\Rightarrow$

$$A_1 = \frac{5,25 \cdot 6,08}{2} \text{ m}^2 = 15,96 \text{ m}^2$$

Pythagoras ger längden på den streckade linjen:

$$d = \sqrt{5,25^2 + 6,08^2} \text{ m} = 8,03 \text{ m}$$

Räkna fram vinkeln mellan sidorna som är 6,02 m och 4,50 m:

$$8,03^2 = 6,02^2 + 4,50^2 - 2 \cdot 6,02 \cdot 4,50 \cdot \cos v$$

$$\Rightarrow v = 98,53^\circ$$

Areasatsen:

$$A_2 = \frac{6,02 \cdot 4,50 \cdot \sin 98,53^\circ}{2} \text{ m}^2 = 13,40 \text{ m}^2$$

$$A = A_1 + A_2 = 29,4 \text{ m}^2$$

1446

Kalla sidorna x , y och z . Areasatsen:

$$56 = \frac{x \cdot y \cdot \sin 30^\circ}{2} \Rightarrow x \cdot y = 224$$

Vi har nu ett ekvationssystem med två ekvationer och två okända:

$$\begin{cases} x + y = 36 \\ x \cdot y = 224 \end{cases}$$

Sätt in $x = 36 - y$ i ekvation 2 och lös ut y . Andragradsekvationen har lösningen $y = 28$ cm eller 8 cm. Vi får $x = 8$ cm eller 28 cm.

Använd cosinusatsen och beräkna den tredje sidan:

$$z^2 = x^2 + y^2 - 2 \cdot x \cdot y \cdot \cos 30^\circ$$

$$\Rightarrow z = 21,45 \text{ cm}$$

Använd sinussatsen och beräkna v :

$$\sin v = \frac{28 \cdot \sin 30^\circ}{21,45}$$

$\Rightarrow$

$$v = 40,74^\circ \text{ eller}$$

$$v = 180^\circ - 40,74^\circ = 139,25^\circ$$

$$v = 139^\circ$$

1447

Se facit.

1505

a) Se exempel 1.

Cirkeln skär y -axeln då $x = 0$.

$$25 = 1 + y^2 + 4y + 4 \Rightarrow$$

$$y^2 + 4y - 20 = 0 \Rightarrow$$

$$y_1 \approx 6,9$$

$$y_2 \approx -2,9$$

b)

Cirkeln skär x -axeln då $y = 0$.

Lös ut x med samma metod som i a-uppgiften.

Se facit.

1506

Sätt $x = 0$ och lös ut y genom att lösa ekvationen

$$y^2 + 6y - 52 = 0$$

$\Rightarrow$

$$y_1 \approx 10,746 \text{ l.e}$$

$$y_2 \approx -4,746 \text{ l.e}$$

$$\Rightarrow y_1 - y_2 = 15,5 \text{ l.e}$$

1507

Se facit.

1508

Sätt in givna värden i cirkels ekvation och räkna ut r^2 :

$$r^2 = (1-3)^2 + (0-5)^2 = 29$$

$\Rightarrow$

$$29 = (x-3)^2 + (y-5)^2$$

1509

Se exempel 2. Kvadratkomplettering:

$$32 + 1^2 + 4^2 = x^2 + 2x + 1^2 + y^2 - 8y + 4^2$$

$$49 = (x+1)^2 + (y-4)^2$$

$$r = \sqrt{49} = 7 \text{ och medelpunkt } (-1, 4)$$

1510

Sätt in linjens ekvation i ekvationen för cirkeln:

$$49 = x^2 - 4x + 4 + (2x - 4)^2$$

$$49 = x^2 - 4x + 4 + 4x^2 - 16x + 16$$

$$5x^2 - 20x - 29 = 0$$

$$x^2 - 4x - \frac{29}{5} = 0$$

Lös ut x_1 och x_2 och sedan y_1 och y_2 . Se facit.

Kapitel 2

2109

a) $\dots = \sqrt{4} = 2$

b) $\dots = \sqrt[3]{27} = 3$

c) $\dots = \frac{1}{(\sqrt[3]{125})^2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$

d) $\dots = \frac{1}{(\sqrt[5]{32})^4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$

2110

a) $\frac{\sqrt{a}\sqrt{a}\sqrt{b}}{\sqrt{a}} - \sqrt{a}\sqrt{b} = 0$

b) $\frac{ab\sqrt{\frac{1}{b}}\sqrt{\frac{b}{9}}}{ab} = \sqrt{\frac{1}{b} \cdot \frac{b}{9}} = \frac{1}{3}$

2111

a) $\sqrt{2 \cdot 8} + \sqrt{2 \cdot 32} = 4 + 8 = 12$

b) $\frac{\sqrt{2}\sqrt{36} - \sqrt{2}\sqrt{25}}{\sqrt{2}} = 6 - 5 = 1$

2112

Se facit.

2113

Nej, ty $\frac{3^{30}}{3} = 3^{30} \cdot 3^{-1} = 3^{29} \neq 3^{10}$

2114

$$5000 \cdot x^{10} = 7700$$

$$x^{10} = \frac{7700}{5000}$$

$$x = \left(\frac{7700}{5000}\right)^{\frac{1}{10}} = 1,0441$$

$$\Rightarrow 4,41 \%$$

2115

$$(7 \cdot 5^x)^2 = 49 \cdot 5^{2x}$$

2116

Se facit.

2117

$$\dots = \frac{4^x \cdot 4 \cdot (\sqrt[4]{16})^{3x}}{(\sqrt[3]{8})^{5x}} = \frac{(2 \cdot 2)^x \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2^{3x}}{2^{5x}} = \frac{2^x \cdot 2^x \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2^{3x}}{2^{5x}} = 4$$

2118

Se facit.

2123

a)

$$\begin{aligned} \dots &= 12h + 3h^2 - 3(a^2 - 2ah + h^2) - \\ &\quad 6ah + 3a^2 \\ &= 12h + 3h^2 - 3a^2 + 6ah - 3h^2 - \\ &\quad 6ah + 3a^2 = 12h \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \dots &= 4(9x^2 - 12x + 4) - (6x + 36x^2 - 1 - 6x) = \\ &= 36x^2 - 48x + 16 - 36x^2 + 1 = \\ &= 17 - 48x \end{aligned}$$

2124

a)

$$\begin{aligned} \dots &= 8 - 2 \cdot \sqrt{8} \cdot \sqrt{2} + 2 = \\ &= 10 - 2 \cdot \sqrt{8 \cdot 2} = 10 - 8 = 2 \end{aligned}$$

b) Konjugatregeln:

$$\dots = 7 - 3 = 4$$

2125

a) Förenkla VL och HL:

$$\begin{aligned}
 VL: 9x^2 + 24x + 16 - (4x^2 + 12x + 9) &= \\
 &= 5x^2 + 12x + 7 \\
 HL: 3 + 5(x^2 + 4x + 4) &= 3 + 5x^2 + 20x + 20 = \\
 &= 5x^2 + 20x + 23 \\
 \Rightarrow \\
 5x^2 + 12x + 7 &= 5x^2 + 20x + 23 \\
 -8x &= 16 \Rightarrow x = -2
 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
 5t^2 - (2t^2 - 6t + t - 3) - 3(t^2 - 4) &= \\
 -(-6t + t - 3) - 3(-4) &= 5t + 3 + 12 \\
 \Rightarrow \\
 5t + 15 &= 0 \\
 t &= -3
 \end{aligned}$$

2126

Se facit

2127

a)

$$\begin{aligned}
 \dots &= a + 2 \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} + b - a + 2 \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} - b = \\
 &= 4\sqrt{ab}
 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
 \dots &= (1 + 2\sqrt{3} + 3)^2 - 16\sqrt{3} = \\
 &= (4 + 2\sqrt{3})^2 - 16\sqrt{3} = \\
 &= 16 + 16\sqrt{3} + 12 - 16\sqrt{3} = \\
 &= 28
 \end{aligned}$$

2128

Se facit.

2129

$$\begin{aligned}
 h^4 - 10h^2 + 9 &= 0 \\
 \text{Ersätt } h^2 \text{ med } z: \\
 z &= 5 \pm \sqrt{25 - 9} \\
 z_1 &= 9, z_2 = 1 \\
 \Rightarrow \\
 h_{1,2} &= \pm 3 \\
 h_{3,4} &= \pm 1
 \end{aligned}$$

2135

$$a) \dots = 4(25 - x^2) = 4(5 + x)(5 - x)$$

b) Konjugatregeln:

$$\dots = (xy^2 + z^3)(xy^2 - z^3)$$

$$c) \dots = 3(a^2 - ab + b^2)$$

$$d) \dots = 2x^2(9x^2 - 6x + 1) = 2x^2(3x - 1)^2$$

2136

$$a) \dots = a^3 + a^x a^3 = a^3(1 + a^x)$$

$$b) \dots = x^2 x^h - x^2 = x^2(x^h - 1)$$

$$c) \dots = b^n b^n + b^n = b^n(b^n + 1)$$

2137

$$\begin{aligned}
 \dots &= 5x(1 - 8x^2 + 16x^4) = \\
 &= 5x - 40x^3 + 80x^5
 \end{aligned}$$

2138

a)

$$\begin{aligned}
 \dots &= (1 - y^2)(1 + y^2) = \\
 &= (1 - y)(1 + y)(1 + y^2)
 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
 \dots &= 3t(16t^4 - 1) = 3t(4t^2 - 1)(4t^2 + 1) = \\
 &= 3t(2t - 1)(2t + 1)(4t^2 + 1)
 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
 \dots &= (x^{40} + 1)(x^{40} - 1) = \\
 &= (x^{40} + 1)(x^{20} + 1)(x^{20} - 1) = \\
 &= (x^{40} + 1)(x^{20} + 1)(x^{10} + 1)(x^{10} - 1) = \\
 &= (x^{40} + 1)(x^{20} + 1)(x^{10} + 1)(x^5 + 1)(x^5 - 1)
 \end{aligned}$$

2208

Se facit.

2209

$$a) 2 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 + 4 = 6$$

b) $2a^2 - 3a + 4$

c)

$$\begin{aligned} 2(a+1)^2 - 3(a+1) + 4 &= \\ = 2(a^2 + 2a + 1) - 3a - 3 + 4 &= \\ = 2a^2 + 4a + 2 - 3a - 3 + 4 &= \\ = 2a^2 + a + 3 \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} 2(5a)^2 - 3 \cdot 5a + 4 &= \\ = 50a^2 - 15a + 4 \end{aligned}$$

2210

a) Den största exponenten bestämmer graden på polynomet. Den största exponenten erhålls vid multiplikationen $x \cdot x = x^2$, dvs. polynomet får graden 2.

b)-e) Se facit.

2211

a)-c) Jämför lösning till 2209. Se facit.

d) $1 - \left(\frac{a^{-3}}{3}\right)^2 = 1 - \frac{a^{-6}}{9}$

2212

a)

$$\begin{aligned} \frac{(3+h)^2 - 2(3+h) - 3^2 + 6}{h} &= \\ = \frac{9 + 6h + h^2 - 6 - 2h - 3^2 + 6}{h} &= \\ = \frac{6h + h^2 - 2h}{h} = \frac{4h + h^2}{h} &= h + 4 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \frac{(a+h)^2 - 2(a+h) - a^2 + 2a}{h} &= \\ = \frac{a^2 + 2ah + h^2 - 2a - 2h - a^2 + 2a}{h} &= \\ = \frac{2ah + h^2 - 2h}{h} = 2a + h - 2 \end{aligned}$$

2213

T.ex. $p(x) = x^2 + 1$ ty $p(2) = 2^2 + 1 = 5$

2214

Avläs i bilden:

$$f(3) = 0$$

$$f(2) = 2$$

Sätt in i givet uttryck:

$$\frac{0-2}{3-2} = -2$$

2215

$$2(3x+16) - 3 = 2x - 3$$

$$6x + 32 - 3 = 2x - 3$$

$$4x = -32 \Rightarrow x = -8$$

2216

n är största exponenten. För att resultatet ska bli ett polynom av graden 3 måste x^n -termen multipliceras med x^{3-n} , ty

$$x^n \cdot x^{3-n} = x^{n+3-n} = x^3$$

2226

a) Bryt ut $2x$. Andragradsekvationen

$$x^2 - 4x + 4 = 0 \text{ har dubbelroten } x = 2.$$

Vi får $2x(x-2)(x-2) = 0$, dvs. ekvationen har rötterna $x = 0$ och $x = 2$ (dubbelrot).

b) Bryt ut -6 och lös ekvationen

$$x^2 - 0,5x - 0,5 = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 1 \text{ och } x_2 = -0,5$$

c) Bryt ut $x \Rightarrow x = 0$ är enda reella roten, ty

$$x^2 - x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow x = 0,5 \pm \sqrt{0,25 - 1}$$

$$\Rightarrow \text{saknar reella rötter}$$

d) Bryt ut x . Andragradsekvationen

$$x^2 - 5x - 14 = 0 \text{ har lösningarna}$$

$$x = 7 \text{ och } x = -2.$$

$$\Rightarrow x = 0, x = 7 \text{ och } x = -2.$$

2227

a) Se lösning 2226.

Lösningarna nedan framgår av exempel och viktigruta s 63.

b) $-6(x-1)(x+0,5)$

c) $x(x^2 - x + 1)$

d) $x(x-7)(x+2)$

2228

a)

Grafen skär x -axeln då $x = 1$ och $x = -3$, dvs. polynomet har nollställen då $x = 1$ och $x = -3$.

b) Sätt in $x = 1$ eller $x = -3$ och lös ekvationen

$$x^2 + ax - 3 = 0$$

$$\Rightarrow a = 2$$

2229

Ett sådant polynom saknar nollställen och skär alltså inte x -axeln. Skissa t.ex. $p(x) = x^2 + 1$

2230

$$(x+2)(x-5) =$$

$$= x^2 - 5x + 2x - 10 =$$

$$= x^2 - 3x - 10$$

$$\text{T.ex. } x^2 - 3x - 10 = 0$$

2231

Se facit.

2232

Lösningen framgår av exempel och viktigruta s 63.

$$x(x-4)\left(x+\frac{1}{2}\right) = 0$$

2233

Bryt ut 2. Andragradsekvationen

$$x^2 - 6x - 7 = 0 \text{ har rötterna } x = 7 \text{ och } x = -1.$$

Detta ger $2(x-7)(x+1)$.

2234

$$x(x-3)(x-3) = x(x^2 - 6x + 9) =$$

$$= x^3 - 6x^2 + 9x$$

$$\Rightarrow \text{T.ex. } x^3 - 6x^2 + 9x = 0$$

2235

Lösningarna nedan framgår av exempel och viktigruta s 63.

a) Andragradsekvationen $x^2 - 6x + 10 = 0$ saknar reella rötter $\Rightarrow x(x^2 - 6x + 10)$

b) Bryt ut x och lös ut andragradsekvationen

$$x^2 - 8x + 7 = 0$$

Detta ger $x(x-7)(x-1)$

c) Bryt ut $x \Rightarrow x(x+24)$

d) Bryt ut -1 och lös andragradsekvationen $\Rightarrow$

$$-1(x-3)(x+8) = (3-x)(x+8)$$

2236

a)

$$s^2 = 4s$$

$$s^2 - 4s = 0$$

$$s(s-4) = 0$$

$$s_1 = 0 \text{ (förförkastas)}$$

$$s_1 = 4 \text{ l.e}$$

b)

$$s^3 = 6s^2$$

$$s(s^2 - 6s) = 0$$

$\Rightarrow$

$$s_1 = 0 \text{ (förförkastas)}$$

$$s_2 = 0 \text{ (förförkastas)}$$

$$s_3 = 6 \text{ l.e}$$

2237

Andragradsekvationen har en dubbelrot, $x = a$, dvs. endast ett nollställe. Den tangerar då x -axeln i en punkt. Se figur i facit för $x = 2$.

2238

Se facit.

2312

$$a) \frac{ab \cdot b}{ab \cdot b + ab \cdot a} = \frac{b}{b + a}$$

$$b) \frac{5(a-b)}{10a(a-b)} = \frac{1}{2a}$$

c) Förförkorta parenteserna och dela täljare och

$$\text{nämnare med 3: } \frac{3(2x-3)}{4(3x+1)}$$

2313

a) Förförkorta parenteserna och dela täljare och

$$\text{nämnare med 4: } \frac{2(3x+5)}{3}$$

$$b) \frac{9(2x^2+x)}{6x(2x^2+x)} = \frac{3}{2x}$$

c)

$$\frac{4(x-2)(2x+5)^2}{2(2x+5)(x-2)^2} = \frac{4(2x+5)}{2(x-2)} = \frac{2(2x+5)}{(x-2)}$$

2314-2315

Se facit.

2316

Givet: nämnaren = 0 då $x = 2 \Rightarrow$

Nämnaren t.ex. $x^2 - 4$.

Givet uttrycket har värdet 6 då $x = 4$:

$$\frac{a}{4^2 - 4} = 6 \Rightarrow a = 72 \text{ då } x = 4.$$

Polynomet $18x$ uppfyller detta villkor $\Rightarrow$

$$\text{T.ex. } \frac{18x}{x^2 - 4}$$

2317

a) Volymen som har strömmat ut efter t minuter är

$$V(0) - V(t) = 400 - 0,15t^2 + 12t - 400 = 12t - 0,15t^2$$

Den genomsnittliga utströmningshastigheten kan tecknas

$$G(t) = \frac{12t - 0,15t^2}{t} = 12 - 0,15t$$

Notera att facit har $G(t) = 0,15t - 12$. Om man definierar flödet som positivt då tanken fylls får man ett negativt flöde då tanken läcker och vattenmängden minskar.

b) $G(6) = 12 - 0,15 \cdot 6 \text{ l/min} \approx 11 \text{ l/min}$. Se kommentar facit.

2318

Se facit.

2324

$$= \frac{(2x-7)^2}{2(x+7)(x-7)}$$

(facit har + i täljaren i första tryckningen).

2325

$$a) \frac{2(a^2 - 6a + 9)}{2a - 6} = \frac{2(a-3)^2}{2(a-3)} = a - 3$$

$$b) \frac{3(a^2 - 4)}{6(a^2 - 4a + 4)} = \frac{3(a-2)(a+2)}{6(a-2)^2} = \frac{(a+2)}{2(a-2)}$$

c)

$$\frac{x(x^2-4)}{2(x^2-4x+4)} = \frac{x(x^2-4)}{2(x^2-4x+4)} =$$

$$= \frac{x(x-2)(x+2)}{2(x-2)^2} = \frac{x(x+2)}{2(x-2)}$$

d)

$$\frac{2(9b^2-x^2)}{(x-3b)^2} = \frac{2(3b-x)(3b+x)}{(x-3b)^2} =$$

$$= \frac{-2(x-3b)(3b+x)}{(x-3b)^2} = \frac{-2(3b+x)}{(x-3b)} =$$

$$= \frac{2(3b+x)}{(3b-x)}$$

2326

a) $\frac{(x+9)(x-9)}{-1(x-9)} = -(x+9)$

b) $\frac{(1-5x)^2}{(1-5x)(1+5x)} = \frac{(1-5x)}{(1+5x)}$

c) $\frac{(1-2a)^2}{(1-2a)(1+2a)} = \frac{(1-2a)}{(1+2a)}$

d) $\frac{(a-1)(a+1)}{-a(a-1)} = -\frac{(a+1)}{a}$

2327

Se facit.

2328

a) Polynomets nollställe fås genom att lösa andragradsekvationen i täljaren:

$$x_1 = 1, x_2 = 3 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{(x-3)(x-1)}{x-3} = x-1$$

b) Bryt ut 3 och lös på samma sätt som i a-uppgiften:

$$\frac{3(x-2)(x+1)}{3(x+1)} = x-2$$

2329

a) Lös ekvationen i nämnaren =>

$$\frac{x+1}{(x-4)(x+1)} = \frac{1}{x-4}$$

b) $\frac{(x-2)(x+2)}{(x-3)(x-2)} = \frac{(x+2)}{(x-3)}$

2330

a) Observera dubbelroten!

$$\frac{(x-4)(x-3)}{(x-4)(x-4)} = \frac{(x-3)}{(x-4)}$$

b)

$$\frac{a(a-4)(a+2)}{3(a-4)(a+1)} = \frac{a(a+2)}{3(a+1)}$$

2331

Faktorisera täljare och nämnare:

Sätt uttrycket i nämnaren lika med noll och lös andragradsekvationen. Detta ger rötterna

$$x = 2 \text{ och } x = -3 \Rightarrow (x-2)(x+3)$$

Gör på samma sätt med täljaren. Rötterna kan

skrivas: $x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - 8}$

Om $x = 2$:

$$2 = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - 8}$$

$$\left(2 - \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} - 8$$

$$4 - 4 \cdot \frac{a}{2} + \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{4} - 8$$

$$4 - 2a = -8$$

$$a = 6$$

$$x = -3 \Rightarrow a = -\frac{17}{3}$$

2237

$$\text{a) } \dots = \frac{x(x-1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{x}{(x+1)}$$

b)

$$\begin{aligned} \dots &= \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = \\ &= \frac{2xh + h^2}{h} = 2x + h \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} \dots &= \frac{3(x^2 + 2xh + h^2) - 3x^2}{h} = \\ &= 6x + 3h \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} \dots &= \frac{x^2 - (x^2 - 2xh + h^2)}{h} = \\ &= 2x - h \end{aligned}$$

2238

a)

$$\begin{aligned} \dots &= \frac{9x^2 - 1}{12x^2} \cdot \frac{3x}{3x - 1} = \\ &= \frac{(3x - 1)(3x + 1)}{12x^2} \cdot \frac{3x}{3x - 1} = \\ &= \frac{(3x + 1)}{4x} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \dots &= \frac{3}{x^2 - 1} \cdot \frac{x + 1}{15} = \\ &= \frac{3}{(x + 1)(x - 1)} \cdot \frac{x + 1}{15} = \\ &= \frac{1}{5(x - 1)} \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} \dots &= \frac{(x + 1)^2}{x^2} \cdot \frac{x^3}{x + 1} = \\ &= x(x + 1) \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} \dots &= \frac{x(x - 2y)}{x + y} \cdot \frac{(x + y)(x - y)}{x - 2y} = \\ &= x(x - y) \end{aligned}$$

2239

a)

$$\begin{aligned} \dots &= \frac{(x - 6)^2}{x} \cdot \frac{4x^3}{-1(x - 6)} = \\ &= 4x^2(6 - x) \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \dots &= \frac{y(y^2 - 1)}{(y - 1)(y + 1)} = \\ &= \frac{y(y - 1)(y + 1)}{(y - 1)(y + 1)} = y \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} \dots &= \frac{(x - b)}{2b - x} \cdot \frac{-5(2b - x)}{1} = \\ &= 5(b - x) \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} \dots &= \left(\frac{2}{3x} - \frac{1}{x} \right) \cdot \frac{3x}{2} = \\ &= \left(1 - \frac{3}{2} \right) = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

2240

a)

$$\begin{aligned} \dots &= \frac{5(x + h)^2 - 5x^2}{h} = \\ &= \frac{5(x^2 + 2xh + h^2) - 5x^2}{h} = \\ &= 10x + 5h \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\frac{(x+h)^3 - x^3}{h} &= \\
&= \frac{(x+h)(x^2 + 2xh + h^2) - x^3}{h} = \\
&= \frac{x^3 + 2x^2h + xh^2 + hx^2 + 2xh^2 + h^3 - x^3}{h} = \\
&= 2x^2 + xh + x^2 + 2xh + h^2 = \\
&= 3x^2 + 3xh + h^2
\end{aligned}$$

2341

a)

$$\begin{aligned}
k(x) &= \left(\frac{x}{3} + \frac{b}{2} \right) \bigg/ \left(\frac{2x}{3} + b \right) = \\
&= [\text{förläng}] = \\
&= \frac{2x + 3b}{4x + 6b} = \frac{2x + 3b}{2(2x + 3b)} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
k(x) &= \frac{b-x}{\frac{1}{b} - \frac{1}{x}} = [\text{förläng}] \\
&= \frac{b^2x - bx^2}{x-b} = \frac{-bx(x-b)}{x-b} = -bx
\end{aligned}$$

2347

a)

$$\begin{aligned}
\ldots &= \frac{3x}{x(x+1)} + \frac{2(x+1)}{x(x+1)} = \\
&= \frac{3x + 2x + 2}{x(x+1)} = \frac{5x + 2}{x(x+1)}
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\ldots &= \frac{a(a-3)}{a(a+4)} + \frac{3(a+4)}{a(a+4)} = \\
&= \frac{a^2 - 3a + 3a + 12}{a(a+4)} = \frac{a^2 + 12}{a(a+4)}
\end{aligned}$$

2348

a)

$$\begin{aligned}
\ldots &= \frac{p+2}{(p+2)(p-2)} - \frac{p-1}{(p+2)(p-2)} = \\
&= \frac{3}{(p+2)(p-2)}
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\ldots &= \frac{x}{x(x+h)} - \frac{x+h}{x(x+h)} = \\
&= \frac{-h}{x(x+h)}
\end{aligned}$$

2349

$$\text{a) } \ldots = \frac{3x+1-2x+1}{x-5} = \frac{x+2}{x-5}$$

$$\text{b) } \ldots = \frac{3(x+h)-3x}{x(x+h)} = \frac{3h}{x(x+h)}$$

2350

a)

$$\begin{aligned}
\ldots &= \left(\frac{2}{x} + \frac{3}{x+1} \right) x = \\
&= \frac{2(x+1)}{x+1} + \frac{3x}{x+1} = \frac{5x+2}{x+1}
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\ldots &= \frac{1}{h(x-h)} - \frac{1}{hx} = \\
&= \frac{x}{hx(x-h)} - \frac{(x-h)}{hx(x-h)} = \\
&= \frac{h}{hx(x-h)} = \frac{1}{x(x-h)}
\end{aligned}$$

2351

Se facit.

2352

$$\begin{aligned}
\ldots &= \frac{2x^2}{2(x-1)} - \frac{2(2x-1)}{2(x-1)} = \\
&= \frac{2(x^2 - 2x + 1)}{2(x-1)} = \frac{2(x-1)^2}{2(x-1)} = x-1
\end{aligned}$$

2353

Se facit.

2354

a)

$$\frac{2}{a+1} - \frac{1}{a^2-1} = \frac{2(a-1)}{(a-1)(a+1)} - \frac{1}{(a-1)(a+1)} =$$

$$= \frac{2a-3}{(a-1)(a+1)}$$

b)

$$\dots = \frac{x}{1-x^2} + x + \frac{x}{x^2-1} =$$

$$- \frac{x}{x^2-1} + \frac{x(x^2-1)}{x^2-1} + \frac{x}{x^2-1} = x$$

2355

a)

$$\dots = \frac{6}{(3-h)(3+h)} - \frac{2}{3+h} - \frac{1}{3-h} =$$

$$= \frac{6}{(3-h)(3+h)} - \frac{2(3-h)}{(3-h)(3+h)} - \frac{3+h}{(3-h)(3+h)} =$$

$$= \frac{6-6+2h-3-h}{(3-h)(3+h)} = \frac{h-3}{(3-h)(3+h)} =$$

$$= -\frac{1}{(3+h)}$$

b)

$$\dots = \frac{x+5}{(x-5)(x+5)} + \frac{1}{(x-5)(x+5)} - \frac{2}{2(x+5)} =$$

$$= \frac{x+5+1-x+5}{(x-5)(x+5)} = \frac{11}{(x-5)(x+5)}$$

2356

a)

$$\dots = \frac{1}{3(a+1)(a-1)} - \frac{(a-1)}{(a+1)(a-1)} +$$

$$+ \frac{a(a+1)}{a(a-1)(a+1)} = \frac{a}{3a(a+1)(a-1)} -$$

$$\frac{3a(a-1)}{3a(a+1)(a-1)} + \frac{3a(a+1)}{3a(a-1)(a+1)} =$$

$$\frac{a-3a^2+3a+3a^2+3a}{3a(a+1)(a-1)} = \frac{1+3+3}{3(a+1)(a-1)} =$$

$$= \frac{7}{3(a+1)(a-1)}$$

b)

$$\dots = \frac{2}{(z-1)(z+1)} + \frac{(z-1)}{(z-1)(z+1)} -$$

$$\frac{3(z+1)}{(z-1)(z+1)} = \frac{2+z-1-3z-3}{(z-1)(z+1)} =$$

$$= \frac{2+z-1-3z-3}{(z-1)(z+1)} = \frac{-2-2z}{(z-1)(z+1)} =$$

$$= \frac{-2(z+1)}{(z-1)(z+1)} = \frac{-2}{(z-1)}$$

2357

a)

$$\dots = \left(\frac{1}{(x-1)(x+1)} - \frac{(x+1)(x+1)}{(x-1)(x+1)} \right) \cdot \frac{1-x}{2+x} =$$

$$= \frac{1-x}{(x-1)(x+1)(2+x)} - \frac{(1-x)(x+1)(x+1)}{(x-1)(x+1)(2+x)} =$$

$$= \frac{-(x-1) + (x-1)(x+1)(x+1)}{(x-1)(x+1)(2+x)} =$$

$$= \frac{-1+x^2+2x+1}{(x+1)(2+x)} = \frac{x(x+2)}{(x+1)(2+x)} = \frac{x}{(x+1)}$$

b)

$$\dots = \frac{x^2-4x+3}{x-x^2+6} + \frac{1+x}{x+2} =$$

$$= \left[\text{Faktorisera täljare och nämnare} \right] =$$

$$= \frac{(x-3)(x-1)}{-(x-3)(x+2)} + \frac{(1+x)(x-3)}{(x-3)(x+2)} =$$

$$= \frac{-(x-3)(x-1) + (1+x)(x-3)}{(x-3)(x+2)} =$$

$$= \frac{-(x-1) + (1+x)}{(x+2)} = \frac{2}{x+2}$$

2407

Se exempel s. 79-81. Avläs i grafen. I uppgift c), d) och e) ritas linjer.

2408

a)

$$x^2 - 6x + 5 = 0$$

$$x_1 = 1 \text{ h}$$

$$x_1 = 5 \text{ h}$$

b) Av a-uppgiften och grafen framgår att

$$y < 0 \text{ då } 1 < x < 5.$$

c)

$$x^2 - 6x + 5 = -3$$

$$x^2 - 6x + 8 = 0$$

$$x_1 = 4$$

$$x_1 = 2$$

=> 2 timmar.

2414

a) $f(0) = -3 = p$

$$g(0) = -1 \Rightarrow m = -1$$

Sätt in en punkt på linjen i uttrycket för $g(x)$ och räkna ut k .

$$g(1) = k \cdot 1 - 1 = 0 \Rightarrow k = 1$$

b) Avläs skärningspunkterna i figuren.

Alternativt algebraisk lösning:

$$x^2 + 2x + p = kx + m$$

$$x^2 + (2-k)x + (p-m) = 0$$

$$x = \frac{(2-k)}{2} \pm \sqrt{\frac{(2-k)^2}{4} - (p-m)}$$

=>

$$x_1 = 1$$

$$x_1 = -2$$

c) Från grafen ser vi att

$$x < -2 \text{ eller } x > 1$$

d)

$$g(2) = 1$$

$$f(1) = 1 \cdot 1 - 1 = 0$$

2415

a) Från grafen ser vi att

$$g(x) > 0 \text{ då } x < 2$$

b) Från grafen ser vi att detta är sant, ty

$$f(-1) = f(3) = 3$$

c) Alla räta linjer kan skrivas på formen

$$y = kx + m$$

Från grafen ser vi att $y = 2$ då $x = 0$, dvs. $m = 2$.

Välj en punkt på linjen och räkna ut k :

$$g(1) = k \cdot 1 + 2 = 1 \Rightarrow k = -1$$

$$\Rightarrow g(10) = -1 \cdot 10 + 2 = -8$$

d)

$$f(1) = -1$$

$$\Rightarrow g(f(1)) = f(-1) = 3$$

2416

a) Från grafen ser vi att detta gäller då

$$x = -1 \text{ eller } x = 2$$

b) Från grafen ser vi att detta gäller då

$$x = 0 \text{ eller } x \geq 3$$

(facit har $x > 3$)

c) Rita grafen, dvs. en rät linje som skär y -axeln i $-1,5$ och har lutningen $k = 0,5$.

Från grafen ser vi att skärningspunkterna är

$$x = -1, x = 1, x = 3$$

d) Från grafen ser vi att detta är uppfyllt då

$$x < -1 \text{ eller } 1 < x < 3$$

e)

$$g(2) = -2$$

$$f(-2) = 0,5 \cdot (-2) - 1,5 = -2,5$$

2417

a)

$$x^2 - 40x - 500 = 0$$

$$x_1 = -10$$

$$x_2 = 50$$

$$x < -10 \text{ eller } x > 50$$

b)

$$x^2 - 40x - 500 = -800$$

$$x^2 - 40x + 300 = 0$$

$$x_1 = 10$$

$$x_2 = 30$$

$$10 \leq x \leq 30$$

2422

a)

$$72x^2 - 2x^4 < 0$$

$$x^2(72 - 2x^2) < 0$$

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = 0$$

$$x_3 = 6$$

$$x_4 = -6$$

Bestäm uttryckets tecken för några lämpliga värden.

$$x = -10 \Rightarrow -$$

$$x = -1 \Rightarrow +$$

$$x = 1 \Rightarrow +$$

$$x = 10 \Rightarrow -$$

$$x < -6 \text{ eller } x > 6$$

b) Samma metod som i a-uppgiften ger

$$x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 1$$

Teckenstudium ger

$$x \leq 1$$

2423

a) Uttryckets nollställen är

$$x_1 = 2, x_2 = -2, x_3 = 2, x_4 = -2$$

Teckenstudium ger

$$-2 < x < 2$$

b) Bryt ut x och bestäm nollställen:

$$x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = -1$$

Teckenstudium ger

$$x > 0$$

2424

a) Uttryckets nollställen är

$$x_1 = 0, x_2 = 10, x_3 = -10$$

Teckenstudium ger

$$x < -10 \text{ eller } 0 < x < 10$$

b) Uttryckets nollställen är

$$x_1 = -5, x_2 = 0, x_3 = 3$$

Teckenstudium ger

$$x < -5 \text{ eller } 0 < x < 3$$

2425

a)

$$x^3(x^2 - 4) = 0$$

$$x_{1,2,3} = 0, x_4 = 2, x_5 = -2$$

b) Teckenstudium ger

$$-2 < x < 0 \text{ eller } x > 2$$

2426

Söker x som ger $R > 0$.

$$x^2 - 24x + 80 = 0$$

$$x = 12 \pm 8 \text{ år}$$

Teckenstudium av ursprungligt uttryck:

$$4 < x < 20 \text{ år}$$

Företaget kommer att gå med vinst mellan 2014 och 2030.

2427

Sök x som ger $y < 0$.

$$x^2 - \frac{30x}{4} + 9 = 0$$

$$x_1 = 6$$

$$x_1 = 1,5$$

Teckenstudium av ursprungligt uttryck ger minusgrader mellan 01.30 och 06.00.

2428

a)

$$2x(x^2 - 25) = 0$$

$$x_1 = 0, x_2 = 5, x_3 = -5$$

Teckenstudium ger

$$-5 < x < 0 \text{ eller } x > 5$$

b)

$$x(x^2 - x - 56) = 0$$

$$x_1 = 0, x_2 = 8, x_3 = -7$$

Teckenstudium ger

$$-7 < x < 0 \text{ eller } x > 8$$

2429

a) Studera täljaren:

$$x^2 - 2ax + a^2 = 0$$

$$x_{1,2} = a \pm \sqrt{a^2 - a^2}$$

$$x_1 = a$$

$$x_2 = a$$

$$\Rightarrow \frac{(x-a)^2}{x-a} = x-a \geq 0 \text{ då } x \neq a$$

dvs. $x > a$.

b) Faktorisera täljaren. Se a-uppgiften.

$$\Rightarrow \frac{(x-a)^2}{(x-a)(x+a)} = \frac{x-a}{x+a} \leq 0$$

Om x större än a är både täljare och nämnare positiva. Olikheten gäller inte.

Studera nämnaren: Om x är mindre än $-a$ blir både täljare och nämnare negativa. Olikheten gäller inte.

Då $-a < x < a$ får täljare och nämnare olika tecken och olikheten gäller.

2434

Alla tal multipliceras med mgn = $x-2$.

Nämnaren förkortas sedan bort.

Andragradsekvationen är korrekt löst $\Rightarrow$ Ja.

2435

a)

$$\frac{6a(a+3)}{3a} - \frac{6a \cdot a}{6} = \frac{6a(2-a)}{2a}$$

$$2(a+3) - a^2 = 3(2-a)$$

$$2a + 6 - a^2 = 6 - 3a$$

$$5a - a^2 = 0$$

$$a = 5 \quad (a = 0 \text{ är inte definierat})$$

b)

$$\frac{15y(y+1)}{3y} - \frac{15y}{15} = \frac{15y(y-2)}{5y}$$

$$5(y+1) - y = 3(y-2)$$

$$5y + 5 - y = 3y - 6$$

$$y = -11$$

2436

a)

$$\frac{20x(2x-3)}{4x} - \frac{20x(6-x)}{5x} = 20x \cdot 0,31$$

$$5(2x-3) - 4(6-x) = 6,2x$$

$$10x - 15 - 24 + 4x = 6,2x$$

$$7,8x - 39 = 0$$

$$x = 5$$

b)

$$\frac{(2+x)(x-2)5}{2+x} =$$

$$= (2+x)(x-2)5 - \frac{(2+x)(x-2)4}{x-2}$$

⇔

$$(x-2)5 = (2+x)(x-2)5 - (2+x)4$$

$$5x - 10 = 10x - 20 + 5x^2 - 10x - 8 - 4x$$

$$9x + 18 = 5x^2$$

$$x^2 - \frac{9x}{5} - \frac{18}{5} = 0$$

$$x = \frac{9}{10} \pm \sqrt{\frac{81}{100} + \frac{360}{100}}$$

$$x_1 = 3$$

$$x_2 = -1,2$$

2437

a)

$$\frac{a(a+1)a}{a+1} - \frac{a(a+1)(1+a)}{a} = 0$$

$$a^2 - (a^2 + 2a + 1) = 0$$

$$a = -\frac{1}{2}$$

b)

$$\frac{(a+1)(a-1)(a+2)}{(a-1)} + \frac{(a-1)^2(a+2)}{(a+2)} = 2(a-1)(a+2)$$

$$(a+1)(a+2) + (a-1)^2 = 2(a^2 + 2a - a - 2)$$

$$a^2 + 2a + 1a + 2 + a^2 - 2a + 1 = 2a^2 + 2a - 4$$

$$-a = -7$$

$$a = 7$$

2438

$$\frac{15(1-2x)(2x-1)}{1-2x} - \frac{3(1-2x)(2x-1)}{3} =$$

$$= \frac{3x(1-2x)(2x-1)}{2x-1}$$

$$15(2x-1) - (1-2x)(2x-1) =$$

$$= 3x(1-2x)$$

$$-15(1-2x) - (1-2x)(2x-1) =$$

$$= 3x(1-2x)$$

$$-15 - (2x-1) = 3x$$

$$-15 - 2x + 1 = 3x$$

$$x = -\frac{14}{5}$$

b)

$$\frac{2a \cdot a(a+1)}{a^2 + a} - \frac{a(a+1)}{a+1} =$$

$$= 4a(a+1)$$

$$2a - a = 4a^2 + 4a$$

$$a(4a+3) = 0$$

$$a = -\frac{3}{4}$$

Ekvationen är inte definierad för $a = 0$.

2439

$$x^2 - x - 6 = 0$$

$$x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 6}$$

$$x = 3$$

($x = -2$ är en falsk rot)

2440

$$\frac{3(x-1)}{12} + \frac{2(2x-4)}{12} - \frac{4(2x-3)}{12} =$$

$$\frac{3x-3+4x-8-8x+12}{12} = \frac{1-x}{12}$$

2441

$$\frac{2(x+2)(x-2)}{(x+2)(x-2)} - \frac{(2-x)(x+2)(x-2)}{x+2} =$$

$$= (x+2)(x-2)$$

$$2 - (2-x)(x-2) = (x+2)(x-2)$$

$$2 + (x-2)(x-2) = (x+2)(x-2)$$

$$2 + x^2 - 4x + 4 = x^2 - 4$$

$$x = 2,5$$

2442

Se facit.

2443

$$\frac{6x(x-1)}{x} = \frac{18x(x-1)}{x(x-1)} - \frac{6x(x-1)}{6}$$

$$6x - 6 = 18 - x^2 + x$$

$$x^2 + 5x - 24 = 0$$

$$x_1 = -8$$

$$x_2 = 3$$

2444

Faktorisera nämnaren i första termen.

$$\Rightarrow \text{mgn} = (x+4)^2(x-4)(4-x)$$

$$\frac{(x+4)^2(x-4)(4-x)}{(x+4)^2} - \frac{(2x+1)(x+4)^2(x-4)(4-x)}{(x-4)(x+4)} =$$

$$= \frac{18(x+4)^2(x-4)(4-x)}{4-x}$$

$$(x-4)(4-x) - (2x+1)(x+4)(4-x) =$$

$$= -18(x+4)^2(4-x)$$

$$(x-4) - (2x+1)(x+4) = -18(x+4)^2$$

$$x-4-2x^2-9x-4 = -18x^2-144x-18 \cdot 16$$

$$16x^2 + 136x + 280 = 0$$

$$x_1 = -5,5$$

$$x_2 = -3,5$$

2454

a) $x-5=9 \Rightarrow x=14$

Men $|-9|=9 \Rightarrow$

$x=-4$ är också en lösning.

b) $1-x=2 \Rightarrow x=-1$

Men $|-2|=2 \Rightarrow$

$x=3$ är också en lösning.

2455

a)

$$2-x=x \Rightarrow x=1$$

(Ekvationen $2-x=-x$ saknar lösning).

b)

$$x^2-2=x$$

$$x^2-x-2=0$$

$$x_1=-1$$

$$x_2=2$$

Men $|-x|=x \Rightarrow$

$$x^2+x-2=0$$

$$x_1=1$$

$$x_2=-2$$

Testa lösningarna. Varken $x=-1$ eller $x=-2$ löser ekvationen, eftersom VL alltid är positivt $\Rightarrow x=1$ eller $x=2$

2456

Se facit. (I första tryckningen saknas åttonde raden, dvs $a=0$ och $b=2$).

2457

Se facit.

2458

Se facit.

Kapitel 3

3111

Steg 1:

$$y = 2x - 9$$

$$k_1 = 2$$

$$k_1 \cdot k_2 = -1 \Rightarrow k_2 = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + m$$

där m är godtyckligt.

3112

Två punkter givna $\Rightarrow$

$$k = \frac{14-6}{7-3} = 2$$

Sätt in en av punkterna i uttrycket

$$f(x) = 2x + m$$

$$\Rightarrow$$

$$6 = 2 \cdot 3 + m \Rightarrow m = 0$$

$$f(x) = 2x$$

3113

a)

$$V = (720 - 180)x \text{ kr} - (900\,000 + 12 \cdot 45\,000) \text{ kr} = \\ = (540x - 1\,440\,000) \text{ kr}$$

b) Sätt $V = 180\,000$ och lös ut $x \Rightarrow 3000$ enheter.

3114

Skriv om ekvationerna:

$$y = -\frac{2}{3}x + 3 \quad \text{och} \quad y = \frac{p}{2}(p-2)$$

Vinkelräta om

$$-\frac{2}{3} = \frac{p}{2}(p-2)$$

$$\Rightarrow p = 1 \pm \sqrt{1+3}$$

$$p_1 = 3$$

$$p_2 = -1$$

3115

(Skall stå $2 \leq k \leq 3$ i uppgiften. Fel i första tryckningen)

Skissa ett koordinatsystem och markera punkten $(-1, -5)$. Dra två linjer med lutningen 2 respektive 3.

$$k = 2 \Rightarrow m = -3$$

$$k = 3 \Rightarrow m = -2$$

$$f_{\min}(4) = 2 \cdot 4 - 3 = 5$$

$$f_{\max}(4) = 3 \cdot 4 - 2 = 10$$

3122

a)

$$N(2,5) = 200 + 4 \cdot 2,5^2 \text{ blommor} = 225 \text{ blommor}$$

Antalet blommor efter 2,5 dygn.

b)

$$N(2) = 200 + 4 \cdot 2^2 \text{ blommor}$$

$$N(2,5) = 200 + 4 \cdot 2,5^2 \text{ blommor}$$

$$\Rightarrow \frac{225 - 216}{2,5 - 2} \text{ blommor/dygn} = \\ = 18 \text{ blommor/dygn}$$

3123

a)

$$s(3,2) = 4,9 \cdot 3,2^2 \text{ m} = 50 \text{ m}$$

Fallsträckan vid fritt fall under de första 3,2 sekunderna.

b)

$$\frac{4,9 \cdot 3,2^2 - 4,9 \cdot 2,8^2}{0,4} \text{ m/s} = 29,4 \text{ m/s}$$

Medelhastigheten mellan 2,8 och 3,2 sekunder vid fritt fall. $t = 3,2 \text{ s} - 2,8 \text{ s} = 0,4 \text{ s}$.

3124

$$K(100) = 2000 + 10 \cdot 100 - 0,03 \cdot 100^2 \text{ kr}$$

$$K(150) = 2000 + 10 \cdot 150 - 0,03 \cdot 150^2 \text{ kr}$$

$$\frac{K(150) - K(100)}{150 - 100} = \frac{125}{50} \text{ kr/glas} = 2,50 \text{ kr/glas}$$

Det kostar 2,50 kr/glas att tillverka de sista 50 glasen.

3125

$$V(30) = (60 \cdot 30 + 0,1 \cdot 30^2 - 1000) \text{ kr}$$

$$V(20) = (60 \cdot 20 + 0,1 \cdot 20^2 - 1000) \text{ kr}$$

$$\Rightarrow \frac{890 - 240}{30 - 20} \text{ kr/kg} = 65 \text{ kr/kg}$$

På de sista 10 kilogrammen blir vinsten 65 kr/kg.

3126

$$y(5) = 2 \cdot 5^2 - 1 = 49$$

$$y(2) = 2 \cdot 2^2 - 1 = 7$$

Sekantens lutning:

$$k = \frac{49 - 7}{5 - 2} = 14$$

Bestäm m genom att sätta in en punkt på sekanten och k i ekvationen för den räta linjen:

$$y(2) = 7 = 14 \cdot 2 + m$$

$$m = -21$$

$$\Rightarrow y = 14x - 21$$

3127

$$\text{a) } \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1} \text{ m/s} = \frac{2 \cdot 3^2 - 2 \cdot 2^2}{1} \text{ m/s} = 10 \text{ m/s}$$

$$\text{b) Som i a-uppgiften} \Rightarrow 8,2 \text{ m/s}$$

$$\text{c) jfr a-uppgiften} \Rightarrow 8,02 \text{ m/s}$$

$$\text{d) Prova t.ex. med } t = 2 \text{ och } t = 2,001 \text{ också.}$$

$$\Rightarrow \text{ca } 8 \text{ m/s.}$$

3128

a)

Beräkna kurvans medellutning mellan 6 och 8 sekunder:

$$\frac{38 - 21}{8 - 6} \text{ m/s} = 8,5 \text{ m/s}$$

b) Beräkna konstanten a :

$$s = at^2 \text{ (sätt in ett givet tabellvärde)}$$

$$a = \frac{21}{6^2} \text{ m/s}^2 = 0,6 \text{ m/s}^2$$

$$\Rightarrow \frac{0,6 \cdot 7,1^2 - 0,6 \cdot 6,9^2}{0,2} \text{ m/s} = 8,4 \text{ m/s}$$

Abdus hastighet vid tiden $t = 7 \text{ s}$.

3129

a) Sekantens lutning

$$\frac{f(a) - 3}{a - 1}$$

Sekanten får negativ lutning då $f(a) < 3$, dvs. då $3 > 4a - a^2$.

$$a^2 - 4a + 3 = 0$$

$$a = 2 \pm \sqrt{4 - 3}$$

$$a = 1 \text{ (givet)}$$

$$\Rightarrow a > 3$$

b) Lutningen noll = vågrät linje, dvs. $k = 0$.

$$k = 0 = \frac{(4a - a^2) - 3}{a - 1}$$

$$\Rightarrow 4a - a^2 - 3 = 0$$

$$\Rightarrow a = 3$$

c)

$$k = -2 = \frac{4a - a^2 - 3}{a - 1}$$

$$-2a + 2 = 4a - a^2 - 3$$

$$a^2 - 6a + 5 = 0$$

$$a = 5$$

3137

a) Tangenten är parallell med x-axeln då $x = 0$, dvs. sant.

b) Funktionsvärdet ökar då $x = 0$, dvs. derivatan är positiv. Sant.

c) Funktionen är avtagande då $x > 2$, sant.

3138

a) Tangenten är parallell med x-axeln då $x = -1$, dvs. $h'(-1) = 0$.

b) Positiv eftersom kurvan är växande.

c) Två nollställen: $x = -3$, $x = 1$.

d) Avläs i grafen $\Rightarrow -3$.

3139

Se facit.

3140

Se facit.

3141

Skissa ett koordinatsystem. Markera $f(2) = 5$.

Max erhålls då $f(x)$ är en rät linje med $k = 2 \Rightarrow m = 1$.

Min erhålls då $f(x)$ är en rät linje med $k = -1 \Rightarrow m = 7$.

$$f_{\max}(10) = 2 \cdot 10 + 1 = 21$$

$$f_{\min}(10) = -1 \cdot 10 + 7 = -3$$

$$-3 \leq f(10) \leq 21$$

3142

a) Se facit.

b) Då x minskar med 0,2 och lutningen är -3 bör y ändras med ungefär $0,2 \cdot (-3) = -0,6$.

$$\Rightarrow g(6,8) = -2 - (-0,6) = -1,4$$

3149

$$0,87^x \rightarrow 0 \text{ då } x \rightarrow \infty$$

$$\text{Vi får } \lim_{x \rightarrow \infty} (22 + 65 \cdot 0,87^x) = 22$$

Rummets temperatur i °C.

3150

a)

$$\begin{aligned} \dots &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h) = 2x \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \dots &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3x^2 + 6xh + 3h^2 - 3x^2}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (6x + h) = 6x \end{aligned}$$

3151

$$\text{a) } k = \frac{dy}{dx} = \frac{4x^2 - 1 - 0}{x - 0,5} = \frac{4x^2 - 1}{x - 0,5}$$

$$\text{b) } k = \frac{4 \cdot 1^2 - 1}{1 - 0,5} = 6$$

$$\text{c) } k = \frac{4 \cdot 0,6^2 - 1}{0,6 - 0,5} = 4,4$$

$$\text{d) } k = \frac{4 \cdot 0,51^2 - 1}{0,51 - 0,5} = 4,04$$

$$\text{e) } k = \frac{4 \cdot 0,501^2 - 1}{0,501 - 0,5} = 4,004$$

f)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0,5} \frac{4x^2 - 1}{x - 0,5} &= \lim_{x \rightarrow 0,5} \frac{(2x - 1)(2x + 1)}{x - 0,5} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0,5} \frac{2(x - 0,5)(2x + 1)}{x - 0,5} = \\ \lim_{x \rightarrow 0,5} 2(2x + 1) &= 4 \end{aligned}$$

3152

Se uppgift f) ovan.

3153

a) Sätt in stora värden på $t \Rightarrow e \approx 2,7$.

b) Se facit.

3154

a) Sätt in större och större värden på x .

$$\Rightarrow -1,5$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x} - 3}{2 + \frac{1}{x}} = -\frac{3}{2}$$

3155

$$\dots = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{x}} - 2}{4 + \frac{1}{\sqrt{x}}} = -0,5$$

3156

Se facit.

3205

a)

$$\begin{aligned} \frac{f(4+h) - f(4)}{4+h-4} &= \frac{(4+h)^2 - 4^2}{h} = \\ &= \frac{16 + 2 \cdot 4 \cdot h + h^2 - 16}{h} = 8 + h \\ \lim_{h \rightarrow 0} (8 + h) &= 8 \end{aligned}$$

och

$$\begin{aligned} \frac{f(4+h) - f(4)}{4+h-4} &= \frac{(4+h)^2 + C - (4^2 + C)}{h} = \\ &= \frac{16 + 2 \cdot 4 \cdot h + h^2 - 16}{h} = 8 + h \\ \lim_{h \rightarrow 0} (8 + h) &= 8 \end{aligned}$$

b) Se facit.

3206

Se facit.

3207

a)

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} &= \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6(a+h)^2 - 6a^2}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6(a^2 + 2ah + h^2) - 6a^2}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{12ah + 6h^2}{h} = 12a \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} &= \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(a+h) + 7 - (3a + 7)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3h}{h} = 3 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} &= \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6(a+h)^2 + 3(a+h) + 7 - (6a^2 + 3a + 7)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6a^2 + 12ah + 6h^2 + 3a + 3h + 7 - 6a^2 - 3a - 7}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{12ah + 6h^2 + 3h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 12a + 6h + 3 = 12a + 3 \end{aligned}$$

d) Se facit.

3208

a) och b) Se facit.

c)

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2+h)^3 - 2^3}{h} &= \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(4 + 4h + h^2)(2+h) - 2^3}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{8 + 8h + 2h^2 + 4h + 4h^2 + 2h^3 - 8}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (2h^2 + 12 + 6h) = 12 \end{aligned}$$

3218

a)

$$y = x^2 - 3x$$

$$y' = 2x - 3$$

b)

$$y = 3x^2 - 24x - 5x + 40$$

$$y' = 6x - 29$$

3219

a)

$$y = x^7 - x^3$$

$$y' = 7x^6 - 3x^2$$

b)

$$y = x^6 + 2x^5 + x^4$$

$$y' = 6x^5 + 10x^4 + 4x^3$$

3220

a)

$$y = \frac{3x^2}{4} - \frac{7x}{4}$$

$$y' = \frac{3x}{2} - \frac{7}{4}$$

b)

$$y = \frac{x^3}{3} - x^5$$

$$y' = x^2 - 5x^4$$

3221

a)

$$y = \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2}$$

$$y' = \frac{1}{2} - x$$

b)

$$y = \frac{x^2}{5} - \frac{18x}{5} + \frac{81}{5}$$

$$y' = \frac{2x}{5} - \frac{18}{5}$$

3222

a)

$$s(t) = t^3 - t^2$$

$$s'(t) = 3t^2 - 2t$$

$$s'(1) = 3 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 = 1$$

b)

$$s(t) = 9t^2 + 42t + 49$$

$$s'(1) = 18 \cdot 1^2 + 42 = 60$$

3223

a)

$$f'(x) = 8x - 16$$

$$8x - 16 = 0$$

$$x = 2$$

b) Se facit.

3224

Söker de x-värden då

$$f'(x) = 6$$

$$f'(x) = 3x^2 + 3x - 30$$

$$3x^2 + 3x - 30 = 6$$

Lös andragradsekvationen:

$$x^2 + x - 12 = 0$$

$$x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 12}$$

$$x_1 = 3$$

$$x_2 = -4$$

3225

Se facit.

3226

Se till exempel faktorisering av andragradspolynom s. 63.

Ansätt $f(x) = k(x-2)(x-4)$ som ges av de givna rötterna. k är koefficienten framför x^2 -termen.

$$f(x) = k(x^2 - 6x + 8)$$

$$f(0) = p = 8k \Rightarrow k = \frac{p}{8}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2kx - 6k = \left[k = \frac{p}{8} \right] = \\ &= 2 \cdot \frac{p}{8}x - 6 \cdot \frac{p}{8} = \frac{p}{4}x - 3 \cdot \frac{p}{4} \\ f'(0) &= -3 \cdot \frac{p}{4} \end{aligned}$$

3232

Se facit.

3233

Se facit.

3234

a) $N(0) = 510$ st

b)

$$3t^2 + 48t + 510 = 1020$$

$$t^2 + 16t - 170 = 0$$

$$t_{1,2} = -8 \pm \sqrt{64 + 170}$$

$$t = 7,3 \text{ timmar (negativ rot förkastas)}$$

c)

$$N'(t) = 6t + 48$$

$$N'(4) = 6 \cdot 4 + 48 \text{ bakterier/h} = 72 \text{ bakterier/h}$$

d)

$$6t + 48 = 50$$

$$\Rightarrow t = 20 \text{ min}$$

3235

a) och b) Se facit.

c)

$$s'(t) = 40 - 0,6t = 0$$

$$\Rightarrow t = 67 \text{ s}$$

d) $s(67) = 40 \cdot 67 - 0,3 \cdot 67^2 \text{ m} \approx 1300 \text{ m}$

e) Tåget bromsar i intervallet $0 \leq t \leq 67$

3236

Se facit.

3237

Avståndet mellan löparna:

$$\begin{aligned} s(t) &= f(t) - g(t) = \\ &= 8,0t - 0,1t^2 - 7,0t - 0,1t^2 = \\ &= t - 0,2t^2 \end{aligned}$$

Vid $t = 0$ är avståndet 0.

Maximalt avstånd då derivatan är lika med 0:

$$s'(t) = 1 - 0,4t = 0$$

$$\Rightarrow t = 2,5 \text{ s}$$

Insättning i uttrycket för s ger:

$$s(t) = t - 0,2t^2 = (2,5 - 0,2 \cdot 2,5^2) \text{ m} = 1,25 \text{ m}$$

3238

$$f'(x) = -3x^2 + 60x$$

Skissa en graf. $x = 0$ och $x = 20$ ger $f'(x) = 0$.

$x = 10$ ger det största värde som derivatan kan anta: $f'(x) = 300 \text{ min/dm}$

Se facit.

3308

Växande om

$$y' = 10x^4 - 7x^6 + 6x^5 - 3 \geq 0$$

$$y'(1) = 10 - 7 + 6 - 3 = 6 \geq 0$$

3309

$$r'(t) = 3,6t^2 - 0,60t^3$$

$$t^2(3,6 - 0,60t) = 0$$

$\Rightarrow$ dubbelrot i $t = 0$ och en rot i $t = 6$.

Dvs. resultatet ökar från år 2000 till år 2006.

3310

a)

$$y' = 3x^2 - 6x = 0$$

Extrempunkter då

$$x = 0 \text{ och } x = 2$$

Teckenstudera derivatan $\Rightarrow$

$x = 0$: Maximipunkt

$x = 2$: Minimipunkt

b)

$$y' = 4x^3 + 12x^2 = 0$$

Extrempunkter då $x = 0$ och då $x = -3$

Teckenstudera derivatan $\Rightarrow$

$x = 0$: Terrasspunkt

$x = -3$: Minimipunkt

3311

a)

$$y' = x^3 - x = 0$$

Extrempunkter då

$$x = -1, x = 0, x = 1$$

Teckenstudera derivatan $\Rightarrow$

$x = -1$: Minimipunkt

$x = 0$: Maximipunkt

$x = 1$: Minimipunkt

3312

a) $y' = 6x^2 - 6x$

Extrempunkter då

$$x = 0, x = 1$$

Teckenstudera derivatan $\Rightarrow$

$x = 0$: Maximipunkt

$x = 1$: Minimipunkt

b) $y' = 4x^3 - 4x$

Extrempunkter då

$$x = -1, x = 0, x = 1$$

Teckenstudera derivatan $\Rightarrow$

$x = -1$: Minimipunkt

$x = 0$: Maximipunkt

$x = 1$: Minimipunkt

3313

a) $y' = x + c$

Extrempunkter då $c = -x = -2$.

$$y' = x - 2$$

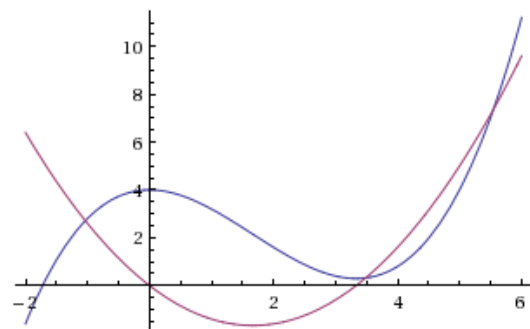
Teckenstudera derivatan $\Rightarrow$

minimipunkt i $x = 2$.

b) $x = 2 \Rightarrow y = 0,5 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 - 1 = -3$

(2; -3)

3314



a) Avläs i grafen. Ekvationen har tre rötter.

b)

$$\frac{x^3}{5} - x^2 + 4 = 0$$

$$x^3 - 5x^2 + 20 = 0$$

Använd räknare eller dator:

$$\Rightarrow x \approx 1,725$$

c)

$$f'(x) = \frac{3x^2}{5} - 2x = 0$$

$$x\left(\frac{3x}{5} - 2\right) = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{10}{3}$$

$$\Rightarrow y = \frac{\left(\frac{10}{3}\right)^3}{5} - \left(\frac{10}{3}\right)^2 + 4 \approx 0,30$$

3315

Växande om derivatan ≥ 0 .

$$f'(x) = 8 + x - \frac{3x^2}{5}$$

Sätt derivatan lika med noll för att få fram extrempunkter.

$$x^2 - \frac{5x}{3} - \frac{40}{3} = 0$$

$$x = \frac{5}{6} \pm \sqrt{\frac{25}{36} + \frac{480}{36}}$$

$$x_1 = 4,58$$

$$x_2 = -2,91$$

Teckenstudium ger att funktionen är växande då $-2,91 \leq x \leq 4,58$.

3316

Se facit.

3317

Se facit.

3318

$$y' = 2ax + b$$

$$y' = 0 \text{ då } x = 3.$$

$$0 = 2a \cdot 3 + b \Rightarrow b = -6a$$

Sätt in i

$$f(3) = 14$$

$$14 = a \cdot 3^2 - 6a \cdot 3 + 50$$

$$9a = 36 \Rightarrow a = 4$$

$$b = -24$$

3325

$$a) f'(x) = 3x^2 - 9x - 12$$

Extrempunkter i $x = -1$ och $x = 4$. Endast -1 ligger i intervallet. Teckenstudium ger maximipunkt i $(-1; 6,5)$

Kontroll av ytterlägena:

$$f(-2) = -2$$

$$f(1) = -15,5$$

$\Rightarrow$ minsta värdet $-15,5$ och största $6,5$.

b)

Samma metod som i a.

3326

$$a) f'(t) = 1,8t^2 - 0,24t^3$$

Extrempunkter då $t = 0$ och $t = 7,5$. Kontrollera $f(0)$ och $f(5)$ (ytterläge).

$$f(0) = 30$$

$$f(5) = 67,5$$

Dvs. min 30° och max $67,5^\circ$.

b) Kontrollera även $f(7,5)$ och ytterläget $f(10)$.

$$f(7,5) = 93,3^\circ \text{ dvs. max.}$$

$$f(10) = 30^\circ$$

3327

$$f'(x) = 2ax + 3$$

$$f'(3) = 0 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

Teckenstudium ger maximipunkt.

3328

Se facit.

3335

- a) Avläs i grafen. Badkaret fylls under 10 minuter. Efter 10 minuter är flödet negativt, dvs. vattenmängden i badkaret minskar.
- b) Se a)
- c) Ja, flödet är negativt och badkaret töms.
- d) Vid $t = 10$ minuter.

3336

Se facit.

3337

Se facit.

3338

Derivera de olika alternativen:

- a) $y' = -2x$ (ingen andragsgradsfunktion)
- b) $y' = 2 - 3x^2$ Stämmer med kurvan.

Kontroll av c) och d):

- c) $y' = 3x^2$ (skär y -axeln i origo)
- d) $y' = 3x^2 - 2$ (-2 då $x = 0$)

3339

- a) Sant, derivatan är positiv.
- b) Sant, därefter är derivatan negativ och folkmängden minskar.
- c) Falskt, derivatan är negativ.
- d) Sant, folkmängden minskar mellan B och D .

3340

$f'(x) = 3x^2 - 12$, dvs. derivatans graf är en andragsgradsfunktion som skär y -axeln i -12 och är symmetrisk runt origo $\Rightarrow$ Alternativ c).

3341

Derivatan av en tredjegradsfunktion är en andragsgradsfunktion. Minimipunkt i $x = -2$ ger att derivatan ska vara negativ då $x < -2$ och positiv då $x > -2$. Maximipunkt då $x = 2$ ger att derivatan ska vara positiv $x < 2$ och negativ då $x > 2 \Rightarrow$ Alternativ d).

3342

Se exempel 2 s. 152.

Derivatan negativ fram till $x = 1$ (minimipunkt) $\Rightarrow$ funktionen avtagande

Derivatan sedan positiv till $x = 2$ (maximipunkt) $\Rightarrow$ funktionen växande

Derivatan sedan negativ till $x = 3$ (minimipunkt) $\Rightarrow$ funktionen avtagande

Derivatan positiv då $x > 3 \Rightarrow$ funktionen växande

Se graf i facit.

3343

Linjen kan skrivas $y = 4x - 8$, dvs. $k = 4$.

Kurvans tangent är parallell med linjen då den har lutningen 4, dvs. då dess derivata är lika med 4.

Derivatan är en andragsgradskurva, dvs. den kan skrivas på formen $y' = x^2 + ax + b$.

$$y' = 1 \text{ då } x = 0 \Rightarrow b = 1$$

$$y' = 0 \text{ då } x = 1 \Rightarrow a = -2$$

$$y' = 4 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 4$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$x_1 = -1$$

$$x_2 = 3$$

3349

$f(2) = 3$ och $f(3) = 1$ är extrempunkter eftersom $f'(2) = f'(3) = 0$. Andraderivatan är < 0 då $x = 2 \Rightarrow$ maximipunkt. Andraderivatan är lika

med 0 då $x = 3$, vilket betyder att andra-derivatan kan byta tecken just i punkten (2; 3), något som den gör i en terrasspunkt.

3350

a)

$$y' = 12x^3 + 12x^2 - 24x = 0$$

$$12x(x^2 + x - 2) = 0$$

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = -2$$

$$x_3 = 1$$

$$y'' = 36x^2 + 24x - 24 = 0$$

$$y''(0) < 0 \Rightarrow \text{maximipunkt}$$

$$y''(-2) > 0 \Rightarrow \text{minimipunkt}$$

$$y''(1) > 0 \Rightarrow \text{minimipunkt}$$

b) Samma metod som i a).

3351

a)

$$v(t) = t - 0,18t^2$$

$$t = 5,55 \text{ s}$$

$\Rightarrow$

$$s(5,55) = \text{ca } 5,1 \text{ m}$$

b)

$$a(t) = 1 - 0,36t$$

$$a(0) = 1 \text{ m/s}^2$$

3352

Se uppg 3343. Derivatan är en andragradskurva. Med givna värden i figuren erhålls $y' = x^2 - 4x + 4$.

$$y'' = 2x - 4, \text{ dvs en rät linje.}$$

Ta fram funktionen genom att derivera "baklänges"

$$\Rightarrow y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x$$

Se graf i facit.

3359

Kalla sidan mot vägen för x .

$$A = xy$$

$$K_{\max} = 64\,000 \text{ kr} = (2y \cdot 200 + x \cdot 440 + x \cdot 200) \text{ kr}$$

$$\Rightarrow y = (160 - 1,6x)$$

Sätt in y i uttrycket för arean:

$$A = x(160 - 1,6x) \text{ m}^2$$

Söker maxvärdet för arean.

$$A' = 160 - 3,2x$$

$$\text{Kontroll: } A'' = -3,2 \text{ (maximipunkt)}$$

Sätt derivatan = 0:

$$160 - 3,2x = 0 \Rightarrow x = 50 \text{ m}$$

$$y = (160 - 1,6 \cdot 50) \text{ m} = 80 \text{ m}$$

$$\Rightarrow A_{\max} = 4\,000 \text{ m}^2$$

3360

a)

$$\text{Sätt } T'(q) = -6q + 0,015q^2 = 0$$

$$\Rightarrow q = 400$$

Kontroll:

$$T''(q) = -6 + 0,030q$$

$$T''(400) = 12, \text{ dvs minvärde.}$$

b)

$$T(400) = (450\,000 - 3 \cdot 400^2 + 0,005 \cdot 400^3) \text{ kr} = 290\,000 \text{ kr}$$

3361

Av figuren framgår att $0 < x < 15$.

$$\text{Sätt } V'(x) = 120x - 12x^2 = 0$$

$$\Rightarrow x = 10$$

$$\text{Kontroll: } V''(10) = 120 - 24x = -120$$

$\Rightarrow$ dvs. maxvärde.

3362

Sätt

$$V'(x) = 21 - 3x^2 + 18x = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 6x - 7 = 0$$

$$x_1 = -1 \text{ (ej i definitionsmängd)}$$

$$x_2 = 7$$

$\Rightarrow$

$$V(7) = (21 \cdot 7 - 7^3 + 9 \cdot 7^2 - 10) \text{ tkr} =$$

$$= 235 \text{ tkr}$$

3363

Se exempel 2 s. 160 och facit.

3364

$$A = xy$$

$$\text{Givet: } 2x + y = 40$$

$$\Rightarrow y = 40 - 2x$$

$$\Rightarrow A = 40x - 2x^2$$

Sätt

$$A'(x) = 40 - 4x = 0$$

$$\Rightarrow x = 10 \text{ och } y = 20$$

$$A_{\max} = 20 \cdot 10 \text{ cm}^2 = 200 \text{ cm}^2$$

3365

Se exempel 2 s. 160.

Skissa grafen. Kurvan symmetrisk kring y-axeln.

$$h = 4 - x^2$$

$$b = 2x$$

$$A = \frac{2x(4 - x^2)}{2} = 4x - x^3$$

$$0 \leq x \leq 2$$

Bestäm derivatans nollställen.

$$A'(x) = 4 - 3x^2$$

$$A'(0) \Rightarrow x = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$A''(x) = -6x \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{3}} \text{ maxvärde}$$

$$\Rightarrow A_{\max} = 4 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} - \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^3 = 3,1 \text{ a.e}$$

3366

Triangeln symmetrisk kring y-axeln.

Pythagoras ger höjden i triangeln: 12 cm

Linjen i första kvadranten kan tecknas

$$y = 12 - 2,4x$$

Räkna på halva triangeln:

$$A_{\text{halva}} = x(12 - 2,4x) = 12x - 2,4x^2$$

$$A'_{\text{halva}} = 12 - 4,8x$$

$$A'_{\text{halva}} = 0 \Rightarrow x = 2,5 \text{ cm}$$

$$A'' = -4,8 \text{ (maximivärde)}$$

$$\Rightarrow A_{\text{halva}} = 12 \cdot 2,5 - 2,4 \cdot 2,5^2 \text{ a.e} = 15 \text{ cm}^2$$

$$A_{\max} = 2 \cdot 15 \text{ cm}^2 = 30 \text{ cm}^2$$

3367

$$V = r^2 \pi h + \frac{2\pi r^3}{3} \quad (\text{ekv.1})$$

$$A = r^2 \pi + 2\pi r h + 2\pi r^2 \quad (\text{ekv. 2})$$

Två ekvationer och två obekanta, r och h .

$$\text{Ekv. 2} \Rightarrow$$

$$h = \frac{70 - r^2 \pi - 2\pi r^2}{2\pi r} = \frac{70 - 3\pi r^2}{2\pi r}$$

ln i ekvation 1:

$$\text{Ekv. 1} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} V &= r^2 \pi \left(\frac{70 - 3\pi r^2}{2\pi r} \right) + \frac{2\pi r^3}{3} = \\ &= \frac{70r}{2} - \frac{3\pi r^3}{2} + \frac{2\pi r^3}{3} \end{aligned}$$

$$V'(r) = 35 - 2,5\pi r^2$$

Kontroll:

$$V''(r) = -2,5\pi r^2 \quad (\text{dvs. maxvärde})$$

Sätt derivatan lika med noll:

$$35 - 2,5\pi r^2 = 0$$

$$\Rightarrow r^2 = \frac{35}{2,5\pi} \quad \Rightarrow$$

$$\text{Golvarean } r^2\pi = \frac{35}{2,5} \text{ m}^2 = 14 \text{ m}^2$$

3404

$$\text{a) } \dots = \frac{x}{x(x-b)} - \frac{x-b}{x(x-b)} = \frac{b}{x(x-b)}$$

b)

$$\begin{aligned} \dots &= \frac{x-h}{(x-h)(x+h)} - \frac{x+h}{(x-h)(x+h)} = \\ &= \frac{-2h}{(x-h)(x+h)} \end{aligned}$$

3405

$$\text{a) } \dots = \frac{2-\sqrt{x}}{(2+\sqrt{x})(2-\sqrt{x})} = \frac{2-\sqrt{x}}{4-x}$$

b)

$$\begin{aligned} \dots &= \frac{(x-y)(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})} = \\ &= \frac{(x-y)(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{x-y} = \sqrt{x}-\sqrt{y} \end{aligned}$$

3415

a)

$$y = x^4 \cdot x^{-3} + 2x \cdot x^{-3} = x + 2x^{-2}$$

$$y' = 1 - 4x^{-3}$$

$$y'' = 12x^{-4} = \frac{12}{x^4}$$

b)

$$y' = 2,5x^{1,5} + 1,2x^{0,2}$$

$$y'' = 3,75x^{-0,5} + 0,24x^{-0,8}$$

3416

$$f(x) = 8\sqrt{x} = 8 \cdot x^{\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = 4x^{-\frac{1}{2}} = \frac{4}{\sqrt{x}} = 1$$

$$x = 16$$

Se facit.

3417

$$y'(x) = 1 - 4x^{-2}$$

I punkten $x = 2$ har tangenten lutningen

$$y'(2) = 1 - 4 \cdot 2^{-2} = 0$$

Tangenten (rät linje) kan skrivas:

$$y = 0 \cdot x + m = m$$

I punkten $x = 2$ är m lika med kurvans värde:

$$m = x + \frac{4}{x} = 2 + \frac{4}{2} = 4$$

$$\Rightarrow y = 4$$

3418

$$\text{a) } f'(t) = 4t^3$$

$$\text{b) } f'(t) = 3$$

$$\text{c) } f'(t) = v_0 + at$$

3419

Se facit.

3423

Se facit.

3424

Se facit.

3425

a) Funktionen kontinuerlig om funktionsvärdena lika då $x = 1$.

Funktionen $\frac{1}{x}$ har värdet 1 då $x = 1$.

Då måste gälla att

$$x^2 + C = 1 \text{ då } x = 1 \Rightarrow C = 0$$

b) Jfr a-uppgiften.

$$5C - 2 = \sqrt{2 \cdot 2 - 5C}$$

$$(5C - 2)^2 = 2 \cdot 2 - 5C$$

$$25C^2 - 20C + 4 = 4 - 5C$$

$$25C^2 - 15C = 0$$

$$C(C - \frac{3}{5}) = 0$$

$$\Rightarrow C = \frac{3}{5}$$

($C = 0$ löser inte den ursprungliga ekvationen

ty $\sqrt{2 \cdot 2 - 5C}$ kan inte vara negativt.)

3430

Skissa y' och y'' . Av skissen framgår att

a) $y'' = 0$ i punkten C.

b) $y'' > 0$ i punkterna D och E.

c) $y'' < 0$ i punkterna A och B.

3431

Se facit.

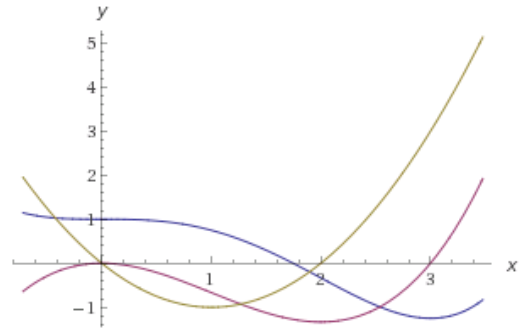
$$f'(x) = \frac{x^3}{3} - x^2$$

$$f''(x) = x^2 - 2x$$

Då $x = 0$ och då $x = 2$

- byter kurvans tangent riktning
- är $f'(x) = 0$
- byter $f''(x)$ tecken.

Se graferna nedan.



Kapitel 4

4111

a)

$$\dots = \frac{101 \cdot (e^{-0,12 \cdot 11,1} - e^{-0,12 \cdot 10,9})}{0,2} = -3,24 \text{ kPa/km}$$

Lufttryckets genomsnittliga förändrings-
hastighet mellan 10,0 km och 11,1 km över
havet.

b)

$$P'(x) = 101 \cdot 0,12 \cdot e^{-0,12x} = 12,12 \cdot e^{-0,12x}$$

$$P'(11) = 12,12 \cdot e^{-0,12 \cdot 11} = 3,24 \text{ kPa/km}$$

Tolkning: Se facit.

4112

$$f'(x) = n \cdot e^{n \cdot x}$$

$x = 0$ då grafen skär y-axeln.

$$f'(0) = n \cdot e^{n \cdot 0} = n$$

4113

a) $(1 + 0,0001)^{1/0,0001} \approx 2,7181$

b) $\left(1 + \frac{1}{10000}\right)^{10000} = 2,7181$

c) Se facit

4114

För att få $f'(x) = 12e^{2x}$ ska man derivera

$$f(x) = 6e^{2x} + m.$$

Då $x = 0$ ska $f(x)$ vara lika med 30 $\Rightarrow m = 24$.

4115

Se facit.

4116

a) $e^{2a} \neq 2e^a$

b) $e^{2a} = (e^a)^2 = e^{2a}$

c) $e^{2a} \neq e^2 \cdot e^a = e^{2+a}$

d) $e^{2+a} = e^2 \cdot e^a = e^{2+a}$

e) $e^{-a} \neq -e^a$

f) $e^{-a} = (e^a)^{-1} = e^{-a}$

4124

$$g'(x) = -7,5 \cdot e^{-0,5x}$$

$$e^{-0,5x} = \frac{-3}{-7,5}$$

$$x = \frac{\ln\left(\frac{-3}{-7,5}\right)}{-0,5 \cdot \ln e} \approx 1,83$$

4125

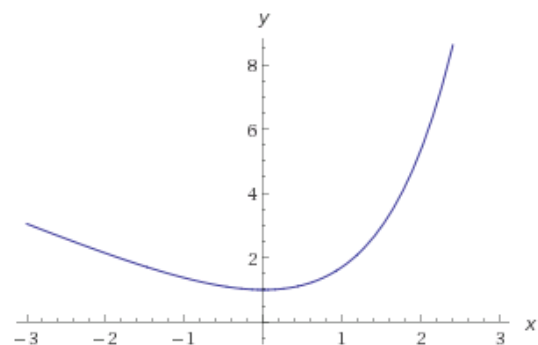
Sätt

$$y' = e^x - 1 = 0$$

$$(y'' = e^x > 0 \Rightarrow \text{minimipunkt})$$

$$\Rightarrow x = 0$$

$$\Rightarrow y = e^0 - 0 = 1$$



4126

$$\text{Sätt } f'(x) = 4e^{2x} - 8 = 0$$

$$e^{2x} = 2$$

$$x = \frac{\ln 2}{2 \ln e} \approx 0,35$$

$$\Rightarrow y = 2e^{2 \cdot 0,35} - 8 \cdot 0,35 + 3 \approx 4,2$$

(Kontroll: $f''(x) > 0 \Rightarrow \text{minimipunkt}$)

4127

Se facit.

4128-4129

Se facit.

4130

$$f(x) - g(x) = e^x - 2x$$

Sätt derivatan = 0:

$$e^x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{\ln 2}{\ln e} = \ln 2$$

$$\Rightarrow f(\ln 2) - g(\ln 2) = e^{\ln 2} - 2 \ln 2 = 2 - 2 \ln 2$$

4131

a)

$$130 \cdot 1,2^x = C \cdot e^{kx}$$

$$C = 130 \text{ och } x \ln 1,2 = kx \ln e$$

$$\Rightarrow k = \ln 1,2$$

$$\Rightarrow y = 130 \cdot e^{(\ln 1,2) \cdot x}$$

$$\text{b) } T = 130 \cdot e^{0,18 \cdot 10} \text{ } ^\circ\text{C} = 805 \text{ } ^\circ\text{C}$$

$$\text{c) } y' = 130 \cdot \ln 1,2 \cdot e^{(\ln 1,2) \cdot x}$$

d)

$$y'(10) = 130 \cdot \ln 1,2 \cdot e^{(\ln 1,2) \cdot 10} \text{ } ^\circ\text{C} / \text{min} = 147 \text{ } ^\circ\text{C} / \text{min}$$

Tolkning. Se facit.

4132

Se facit.

4138

a)

$$y = 25 + 70 \cdot 0,955^5 \text{ } ^\circ\text{C} = 81 \text{ } ^\circ\text{C}$$

$$\text{b) } y' = 70 \cdot \ln 0,955 \cdot 0,955^x$$

c)

$$y' = 70 \cdot \ln 0,955 \cdot 0,955^5 \text{ } ^\circ\text{C} / \text{min} = -2,6 \text{ } ^\circ\text{C} / \text{min}$$

d)

$$60 = 25 + 70 \cdot 0,955^x$$

$$\ln 0,5 = x \ln 0,955$$

$$x = 15 \text{ min}$$

e)

$$y' = 70 \cdot \ln 0,955 \cdot 0,955^x = -1,4$$

$$0,955^x = \frac{-1,4}{70 \cdot \ln 0,955}$$

$$x = \frac{\ln\left(\frac{-1,4}{70 \cdot \ln 0,955}\right)}{\ln 0,955} = 18 \text{ min}$$

4139

Sätt

$$y' = 3 \cdot \ln 5 \cdot 5^x = 2$$

$$\Rightarrow x = \frac{\ln\left(\frac{2}{3 \ln 5}\right)}{\ln 5} = -0,548$$

$$y = 3 \cdot 5^{-0,548} = 1,24$$

4140

Se facit.

4141

Utgå från given punkt:

$$2 = C \cdot 2^{0,5 \cdot 4} = C \cdot 2^2 \Rightarrow C = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow g(0) = \frac{1}{2} \cdot 2^0 = \frac{1}{2}$ dvs. $g(x)$ skär y -axeln i punkten $(0; 1/2)$.

Härled derivatan $g'(x)$:

$$2 = e^{\ln 2} \Rightarrow 2^{0,5x} = (e^{\ln 2})^{0,5x} = e^{0,5 \ln 2 \cdot x}$$

$$\Rightarrow g'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \ln 2 \cdot e^{0,5 \ln 2 \cdot x} = \frac{1}{4} \cdot \ln 2 \cdot 2^{0,5x}$$

Tangenten kan skrivas på formen:

$$y = kx + m \quad \text{där } m = \frac{1}{2}$$

Då $x = 0$ har tangenten lutningen k :

$$g'(0) = \frac{1}{4} \cdot \ln 2 \cdot 2^{0,5 \cdot 0} = \frac{\ln 2}{4} = k$$

Tangenten har samma lutning då $y = 0$:

$$\begin{aligned} \Rightarrow 0 &= \frac{1}{4} \ln 2 \cdot x + \frac{1}{2} \\ x &= -\frac{\frac{1}{4} \ln 2}{\frac{\ln 2}{4}} = -\frac{1}{\ln 2} \end{aligned}$$

4147

Utnyttja de givna punkterna:

(0, 5): Då $x = 0$ är $y = 5 \Rightarrow C = 5$.

(5, 20):

$$20 = 5 \cdot a^5$$

$$4 = a^5$$

$$a = 4^{\frac{1}{5}} \approx 1,32$$

$$\Rightarrow y' = 5 \cdot \ln 1,32 \cdot 1,32^x$$

$$\Rightarrow y'(6) = 5 \cdot \ln 1,32 \cdot 1,32^6 \approx 7,3$$

4148

a)

$$\text{Ansätt } y = C \cdot e^{-px}.$$

$$y(0) = 100 \Rightarrow C = 100$$

$$66 = 100 \cdot e^{-p \cdot 5}$$

$$\ln 0,66 = -p \cdot 5$$

$$\Rightarrow p = 0,083$$

b)

$$y = 100 \cdot e^{-0,083 \cdot 2} \text{ } ^\circ\text{C} = 85 \text{ } ^\circ\text{C}$$

c)

$$y' = -100 \cdot 0,083 \cdot e^{-0,083 \cdot x}$$

$$y(1) = 7,6 \text{ } ^\circ\text{C/min}$$

Se facit.

d)

$$8 = 100 \cdot e^{-0,083 \cdot x}$$

$$\ln 0,08 = -0,083x$$

$$x = 30 \text{ min}$$

e) Se facit.

4149

$$\text{a) } V(0) = (8,1 + e^{0,4 \cdot 0} - 2 \cdot 0) \text{ kr} = 9,1 \text{ kr}$$

b)

$$\text{Sätt } V(x) = 0,4e^{0,4x} - 2 = 0$$

$$\ln \frac{2}{0,4} = 0,4x$$

$$x = 4$$

$$\Rightarrow 2007 + 4 = 2011$$

(Kontroll ger att $V''(x) > 0 \Rightarrow$ minimivärde).

c)

$$V(4) = (8,1 + e^{0,4 \cdot 4} - 2 \cdot 4) \text{ kr} = 5 \text{ kr}$$

4150

a)

$$N'(t) = 2 - 0,35e^{0,35t}$$

$$2 - 0,35e^{0,35t} = 0$$

$$\ln \frac{2}{0,35} = 0,35t$$

$$\Rightarrow t = 5$$

$$\Rightarrow \text{år 2010}$$

$$\text{b) } N(5) = (3,2 + 2 \cdot 5 - e^{0,35 \cdot 5}) \cdot 1000 \text{ st} = 7400 \text{ st}$$

4151

Se metod i t.ex. 4148 och facit.

4152

$$h(0) = b = 17,0 \text{ cm}$$

$$h(300) = 17,0 \cdot a^{300} = 6,3 \text{ cm}$$

$$\Rightarrow a = \left(\frac{6,3}{17,0} \right)^{1/300} = 0,9967$$

$$h'(t) = 17,0 \cdot \ln 0,9967 \cdot 0,9967^t \text{ cm/s}$$

$$h'(300) = 17,0 \cdot \ln 0,9967 \cdot 0,9967^{300} \text{ cm/s} = -0,021 \text{ cm/s}$$

Se kommentar facit.

4153

Se facit

4154

$$h_A = 13,4 \ln d - 21,4 \quad d > 20$$

$$h_B = 13,4 \ln 2d - 21,4 \quad d > 20$$

$$\Rightarrow h_B = 13,4(\ln 2) + 13,4 \ln d - 21,4$$

$$h_A = 13,4 \ln d - 21,4 \quad d > 20$$

$$h_B = 13,4 \cdot \ln 2d - 21,4 \quad d > 20$$

$$h_B - h_A = (13,4 \cdot \ln 2 + 13,4 \cdot \ln d - 21,4 - 13,4 \ln d + 21,4) \text{ m} = 13,4 \cdot \ln 2 \text{ m} \approx 9,3 \text{ m}$$

4155

Se facit

4156

$$\text{a) } y(0) = 200 - 180 \cdot e^0 \text{ } ^\circ\text{C} = 20 \text{ } ^\circ\text{C}$$

b)

När x ökar närmar sig temperaturen $200 \text{ } ^\circ\text{C}$.

c) Se facit.

d) Lös ekvationen

$$200 - 180 \cdot e^{-0,0133x} = 65$$

$$\Rightarrow x \approx 22 \text{ min}$$

4157

Se facit

4209

$$\text{a) } F(x) = \frac{3e^{2x}}{2} + \frac{6e^{-7}}{7} - \frac{2e^{0,5x}}{0,5}$$

$$\text{b) } F(x) = \frac{x^{1,5}}{1,5} + \frac{x^{2,5}}{2,5} + \frac{x^{0,5}}{0,5}$$

4210

$$\text{a) } F(x) = \frac{x^2}{4} + 2x^4$$

b)

$$f(x) = 4x^3 - 3x^2$$

$$F(x) = x^4 - x^3$$

4211

a)

$$f(x) = 3x - \frac{1}{2}$$

$$F(x) = \frac{3x^2}{2} - \frac{1}{2}x$$

b)

$$f(x) = \frac{3x^2}{5} - \frac{2x}{5}$$

$$F(x) = \frac{x^3}{5} - \frac{x^2}{5}$$

4212

a)

$$F(x) = x^2 + C$$

$$4 = 1^2 + C \Rightarrow C = 3$$

b) Se facit.

4213

a)

$$P(t) = 60 \cdot e^{0,2t} + C$$

$$74 = 60 \cdot e^{0,2 \cdot 0} + C \Rightarrow C = 14$$

b)

$$P(t) = (60 \cdot e^{0,2 \cdot 7} + 14) \text{ kr} = 257 \text{ kr}$$

4214

a)

$$V(t) = 0,2t^3 + C$$

$$V(5) = 0,2 \cdot 5^3 + C = 120$$

$$C = 95$$

$$\Rightarrow V(0) = 0 + 95 \text{ kr} = 95 \text{ kr}$$

$$\text{b) } V(10) = (0,2 \cdot (10)^3 + 95) \text{ kr} = 295 \text{ kr}$$

4215

$$f'(x) = 2 \Rightarrow f(x) = 2x + C$$

$$f(2) = 2 \cdot 2 + C = 10 \Rightarrow C = 6$$

$$F(x) = x^2 + 6x + C$$

$$F(5) = 5^2 + 6 \cdot 5 + C = 20$$

$$\Rightarrow C = -35$$

4216

$$F(x) = \frac{-3x^{-5}}{5} + C$$

$$\frac{-3 \cdot 1^{-5}}{5} + C = 3 \Rightarrow C = 3,6$$

4217-4220

Se facit.

4229

a)

$$\dots = \left[x - 2x^{-1} \right]_1^5 = 5 - \frac{2}{5} - 1 + 2 = 5,6$$

b)

$$\dots = \left[2x + \frac{e^{-0,5x}}{0,5} \right]_0^2 = 4 + \frac{2}{e} - (0 + 2) = 2 + \frac{2}{e}$$

4230

a)

$$\dots = \left[\frac{t^{1,5}}{1,5} \right]_1^{16} = \frac{16^{1,5}}{1,5} - \frac{1^{1,5}}{1,5} = \frac{16\sqrt{16}}{1,5} - \frac{1}{1,5} = \frac{2 \cdot 63}{3} = 42$$

b)

$$\dots = \left[6t^{0,5} \right]_5^8 = 6 \cdot 8^{0,5} - 6 \cdot 5^{0,5} = 3,55$$

4231

Se facit.

4232

$$\text{Sätt } y = 3 + 2x - x^2 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$x = 1 \pm \sqrt{1+3}$$

$$x = 3 \quad (\text{negativ rot förkastas})$$

$$A = \left[3x + x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_0^3 = 9 + 9 - 9 - 0 = 9 \text{ a.e}$$

4233

a)

$$\dots = \int_0^1 \left(\frac{e^{3x}}{e^{2x}} + \frac{e^{5x}}{e^{2x}} \right) dx = \int_0^1 (e^{3x} e^{-2x} + e^{5x} e^{-2x}) dx = \int_0^1 (e^x + e^{3x}) dx = \left[e^x + \frac{e^{3x}}{3} \right]_0^1 = e + \frac{e^3}{3} - 1 - \frac{1}{3} = 8,08$$

b)

$$\dots = \left[\frac{x^{2,5}}{2,5} \right]_4^9 = \frac{9^{2,5}}{2,5} - \frac{4^{2,5}}{2,5} = \frac{9^2 \sqrt{9}}{2,5} - \frac{4^2 \sqrt{4}}{2,5} = 84,4$$

4234

$$a) \dots = \left[2x + x^{-1} \right]_1^4 = 8 + \frac{1}{4} - (2 + 1) = 5,25$$

b)

$$\dots = \int_{-1}^2 (x^2 + 6x + 9) dx = \left[\frac{x^3}{3} + 3x^2 + 9x \right]_{-1}^2 = \frac{8}{3} + 12 + 18 - \left(-\frac{1}{3} + 3 - 9 \right) = 39$$

4235

a) Skissa graferna.

$$\dots = \left[\frac{x^{1,5}}{1,5} \right]_0^3 = \frac{3\sqrt{3}}{1,5} = 3,46 \text{ a.e}$$

b)

$$\left[\frac{x^{1,5}}{1,5} \right]_0^a = \frac{a\sqrt{a}}{1,5} = \frac{3,46}{2}$$

$$a^2 a = \left(\frac{3,46 \cdot 1,5}{2} \right)^2$$

$$\Rightarrow a = 1,89$$

4236

$$\dots = \left[F(x) \right]_1^5 = F(5) - F(1) = 3$$

4237

Se facit.

4238

$$\dots = \int_1^5 f(x) dx + \int_1^5 5 dx = 6 + \left[5x \right]_1^5 = 6 + 25 - 5 = 26$$

4239-4240

Se facit.

4306

$$\int_1^2 (3 - (x^2 - 4)) dx = \left[3x - \frac{x^3}{3} + 4x \right]_1^2 = 6 - \frac{8}{3} + 8 - 3 + \frac{1}{3} - 4 \text{ a.e} = 7 - \frac{7}{3} \text{ a.e} = 4\frac{2}{3} \text{ a.e}$$

4307

$$y = 0 \Rightarrow x_1 = -2 \text{ och } x_2 = 0$$

$$\int_{-2}^0 (0 - (x^2 + 2x)) dx = \left[-\frac{x^3}{3} - x^2 \right]_{-2}^0 = 0 - \left(\frac{8}{3} - 4 \right) \text{ a.e} = \left(4 - 2\frac{2}{3} \right) \text{ a.e} = 1\frac{1}{3} \text{ a.e}$$

4308

$$\int_1^9 (3 - (\sqrt{x})) dx = \left[3x - \frac{x\sqrt{x}}{1,5} \right]_1^9 = 27 - \frac{2 \cdot 27}{3} - \left(3 - \frac{2}{3} \right) \text{ a.e} = 6\frac{2}{3} \text{ a.e}$$

4309

Skissa kurvorna.

$$\text{Sätt } 3x = 4 - x^2$$

$$x^2 + 3x - 4 =$$

$$x = -1,5 \pm \sqrt{2,25 + 4}$$

$$x = 1 \text{ (negativ rot förkastas)}$$

 $\Rightarrow$

$$\int_0^1 3x dx + \int_1^2 (4 - x^2) dx = \left[\frac{3x^2}{2} \right]_0^1 + \left[4x - \frac{x^3}{3} \right]_1^2 = \frac{3}{2} + 8 - \frac{8}{3} - \left(4 - \frac{1}{3} \right) \text{ a.e} = 3\frac{1}{6} \text{ a.e}$$

4310

Se facit.

4311

Se facit.

4312

Sätt

$$8x = 9 - x^2$$

$$x^2 + 8x - 9 = 0$$

$$x = -4 \pm \sqrt{25}$$

$$x = 1 \text{ (negativ rot förkastas)}$$

Sätt

$$2,5x = 9 - x^2$$

$$x^2 + 2,5x - 9 = 0$$

$$x = -\frac{5}{4} \pm \sqrt{\frac{25}{16} + \frac{144}{16}}$$

$$x = -\frac{5}{4} + \frac{13}{4} = 2$$

=>

$$\int_0^1 (8x - 2,5x) dx = \left[2,75x^2 \right]_0^1 = 2,75 \text{ a.e}$$

$$\int_1^2 (9 - x^2 - 2,5x) dx = \left[9x - \frac{x^3}{3} - 1,25x^2 \right]_1^2 =$$

$$= 18 - \frac{8}{3} - 5 - \left(9 - \frac{1}{3} - 1,25 \right) \text{ a.e} =$$

$$= 2,92 \text{ a.e}$$

$$\Rightarrow A = (2,75 + 2,92) \text{ a.e} = 5,67 \text{ a.e}$$

4313

$$\dots = \left[-ax^{-1} \right]_1^2 = -\frac{a}{2} + a = 9$$

$$\frac{a}{2} = 9 \Rightarrow a = 18$$

4314

$$\dots = \left[kx - \frac{x^4}{4} \right]_0^k = k^2 - \frac{k^4}{4}$$

Max då

$$2k - k^3 = 0$$

$$k(2 - k^2) = 0$$

$$k = \sqrt{2}$$

4315-4316

Se facit.

4323-4327

Se facit.

4328

Subtrahera =>

$$\int_a^b 2 dx = 2b - 2a$$

4329

a) Areal av A är positiv men integralen är negativ eftersom A ligger under x-axeln => -16/3.

b)

$$\text{Areal av } B - 16/3 = 125/12 \text{ a.e}$$

$$\Rightarrow \text{Areal av } B = 125/12 + 64/12 \text{ a.e} =$$

$$= 189/12 \text{ a.e}$$

4330

$$\dots = \left[\frac{kx^2}{2} + mx \right]_0^1 = \frac{k}{2} + m = 0$$

$$\Rightarrow k = -2m$$

Se facit.

4331-4332

Se facit.

4341

$$W = \int_0^{24} \left(4 + x - \frac{x^2}{24} \right) dx = \left[4x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{72} \right]_0^{24} =$$

$$= 4 \cdot 24 + \frac{24^2}{2} - \frac{24^3}{72} \text{ kWh} = 192 \text{ kWh}$$

4342

$$\int_0^{400} 0,001e^{-0,001x} dx =$$

$$= \left[-e^{-0,001x} \right]_0^{400} = -e^{-0,4} - (-1) = 0,33$$

4343

a) Se facit.

b) Areal under grafen från $t = 0$ och $t = 0,5$ s är stenens fallsträcka i luften.

$$s = \int_0^{0,5} v(t) dt = \frac{5 \cdot 0,5}{2} \text{ m} = 1,25 \text{ m}$$

c)

$$s = \int_{0,5}^4 1 + 18e^{-3t} dt = \left[t - 6e^{-3t} \right]_{0,5}^4 =$$

$$= 4 - 6e^{-12} - 0,5 + 6e^{-1,5} \text{ m} = 4,84 \text{ m}$$

4344

a)

$$\int_0^2 500 + 10t - t^2 dt =$$

$$= \left[500t + 5t^2 - \frac{t^3}{3} \right]_0^2 =$$

$$= \left(1000 + 20 - \frac{8}{3} \right) \text{ m}^3 = 1017 \text{ m}^3$$

b) Vattenflödet har ett max då

$$v'(t) = 0$$

$$2t - 10 = 0$$

$$t = 5 \text{ h}$$

c)

$$\int_2^3 500 + 10t - t^2 dt =$$

$$= \left[500t + 5t^2 - \frac{t^3}{3} \right]_2^3 =$$

$$= \left(1500 + 45 - 9 - \left(1000 + 20 - \frac{8}{3} \right) \right) \text{ m}^3 =$$

$$\left(536 - 20 + \frac{8}{3} \right) \text{ m}^3 > 500 \text{ m}^3$$

4345

$$\int_0^{0,30} 600x dx = \left[300x^2 \right]_0^{0,30} =$$

$$= 300 \cdot 0,30^2 \text{ Nm} = 27 \text{ Nm}$$

Se facit.

4336

$$s_A = \int_0^5 10 - 10e^{-t} dt =$$

$$= \left[10x + 10e^{-t} \right]_0^5 =$$

$$= 50 + 10e^{-5} - 10 = 40 \text{ m}$$

$$s_B = \int_0^5 9 - 9e^{-t} dt =$$

$$= \left[9x + 9e^{-t} \right]_0^5 =$$

$$= 45 + 9e^{-5} - 9 = 36 \text{ m}$$

A leder med 4 m.