Kapitel 1

1107

a) Rita t.ex. figur enligt s 9 =>fel.

b) Rita t.ex. figur enligt s 9 =>rätt.

c) Huvudräkning: 580° – 360° = 220° =>

Tredje kvadranten => fel.

d) tan *v* = tan (*v* + *n* ·180°) => rätt

1108

Pythagoras: => motstående katet = 3

sin *v* = 3/5 = 0,6

tan *v* = 3/4 = 0,75

1109

a)

$$\left(\frac{3}{10}\right)^2 + (\sin v)^2 = 1$$
$$=> \sin v = \pm\sqrt{\frac{91}{100}} = \pm\frac{\sqrt{91}}{10}$$

b) Trig. ettan:

$$1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2 = \frac{144}{169} = (\sin v)^2$$

$$\tan v = \frac{\sin v}{\cos v} = \frac{12/13}{5/13} = 12/5$$

1110

Se facit.

1111

a) sin *v* = *b*/1 = *b*

Uppgift b, c, d: jämför figur s. 9.

b) sin (180° – *v*) = *b*

c) cos *v* = *a*

d) cos (–*v*) = *a*

1112

Se facit.

1113

Se facit.

1114

a)

$$R = (-a, -b) \text{ ty}$$
$$\sin(v + 180°) = -\sin v$$
$$\cos(v + 180°) = -\cos v$$

Vridning 90°.

$$\cos(v + 90°) = -\sin v = -b$$
$$\sin(v + 90°) = \cos v = a.$$
$$dvs\ T = (-b,\ a)$$
$$\Rightarrow S = (b, -a)$$

b) Se facit.

1115

a)

$$B = \arccos(0{,}8) = 36{,}87°$$
$$\sin(180° - 36{,}87°) = 0{,}6$$

b) $0{,}8^2 + \cos^2(180° - 36{,}87°) = 1{,}28$

1116

Ej definierad om nämnaren = 0.

cos x = 0 då *x* = 90° + *n* · 180°.

=> T.ex. 90° och 270°.

1125

sin *x* har maxvärdet 1 och minvärdet –1.

a) $y_{\max} = 3 \cdot 1 = 3,\ y_{\min} = 3 \cdot (-1) = -3$

b) $y_{\max} = 1 + 1 = 2, y_{\min} = 1 + (-1) = 0$

c) $y_{\max} = 2 - 3 \cdot (-1) = 5,\ y_{\min} = 2 - 3 \cdot 1 = -1$

1126

Kurvan är förskjuten 30° åt höger och har toppvärdena 1,5 och –1,5, dvs. amplituden 1,5. Perioden är 180°.

$y = 1{,}5\sin 2\cdot(x - 30°)$

1127

Utgå från grafens ekvation på formen

$y = A\sin k(x + v) + C$.

a) $y = \sin 2x$

b) $y = 3\sin 2(x - 30^\circ)$

c) $y = 3\sin\frac{1}{2}(x + 40°)$

1128

Utgå från grafens ekvation på formen

$y = A\sin k(x + v) + C$.

a) Kurvan har perioden 360°, amplituden 2 och är förskjuten 45° åt höger:

$y = 2\sin(x - 45°)$

b) På samma sätt som i a)-uppgift.

$y = 2{,}5\sin 3(x - 45°)$

c) $y = 2\sin\frac{1}{4}(x + 120°)$, ty perioden är 1440°.

1129

Utgå från grafens ekvation på formen

$y = A\sin k(x + v) + C$.

$A = \frac{y_{max} - y_{min}}{2} = \frac{5-1}{2} = 2$

$C = \frac{y_{max} + y_{min}}{2} = \frac{5+1}{2} = 3$

T.ex. $y = 2\sin(4x) + 3$

1130

Se facit.

1131

Perioden 720° ger k = 360/720 = 0,5.

"Mittlinjen" C = 4 ligger mitt emellan det minsta och det största värdet:

$C = \frac{y_{max} + y_{min}}{2} = \frac{y_{max} + (-3)}{2}$
$\Rightarrow y_{max} = 11$

$A = \frac{11 - (-3)}{2} = 7$

=> $y = 7\sin(0{,}5x) + 4$, dvs. b = 7 och k = 0,5.

1132

Se facit.

1133

"Mittlinjen" C = 3, A = 2. Perioden är 180°.

Dessutom är kurvan förskjuten 30° åt höger.

$y = 2\sin 2(x - 30°) + 3 =$
$= 2\sin(2x - 60°) + 3$

1134

Se facit.

1135

$C = \frac{y_{max} + y_{min}}{2} = 6$

$2y_{min} = y_{max}$

$\Rightarrow \frac{2y_{min} + y_{min}}{2} = 6$
$\Rightarrow y_{min} = 4$

$A = \frac{y_{max} - y_{min}}{2} = \frac{8-4}{2} = 2$

1136

$C = \frac{y_{max} + y_{min}}{2} = \frac{5 + (-1)}{2} = 2$

A = 3. Perioden är 180°/2 = 90° och kurvan kan vara förskjuten 60° åt höger eller vänster.

$$y = 3\sin(4x - 60°) + 2 =$$
$$= 3\sin 4(x - 15°) + 2$$

1140
Jämför exempel s 24.

a) $y = \cos(x - 30°)$

b) $y = 3\cos 2(x - 40°)$

c) $y = 4\cos\frac{1}{2}(x + 10°)$

1141
Jämför exempel s 24.

a) $y = \sin 2x$ och $y = \cos 2(x - 45°)$

b)

$$y = 2\sin(x - 90°) \text{ och}$$
$$y = 2\cos(x - 180°) = -2\cos x$$

1142
a) Mittlinjen C = 3. Amplitud = 2.

Perioden = 360°.

$\Rightarrow$ t.ex. $y = 3 + 2\sin x$

b) Mittlinjen C = 1. Amplitud = 3.

Perioden = 360°.

$\Rightarrow$ t.ex. $y = 1 + 3\cos x$

1143
Se facit.

1144
Se facit.

1145

$$2 = A\cos 0° + B = A + B$$
$$6 = A\cos 180° + B = -A + B$$

$$\begin{cases} A + B = 2 \\ -A + B = 6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow B = 4 \text{ och } A = -2$$
$$\Rightarrow y = -2\cos 240° + 4 =$$
$$= -2 \cdot (-0{,}5) + 4 = 5$$

1215

a) $\arcsin\left(\frac{1}{3}\right) = 19{,}5°$

$$2x - 10° = 19{,}5° + n \cdot 360°$$
$$x \approx \frac{29{,}5° + n \cdot 360°}{2} \approx 14{,}7° + n \cdot 180°$$

Den andra lösningen är

$$2x - 10° = (180° - 19{,}5°) + n \cdot 360°$$
$$x \approx \frac{170{,}5° + n \cdot 360°}{2} \approx 85{,}3° + n \cdot 180°$$

b) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = 120°$

$$2x - 10° = \pm 120° + n \cdot 360°$$

$$x = \frac{130° + n \cdot 360°}{2} = 65° + n \cdot 180°$$
eller
$$x = -55° + n \cdot 180°$$

1216
Se till exempel s. 26.

$$\sin(2x - 20°) = \frac{1}{2}$$
$$2x - 20° = 30° \text{ eller}$$
$$2x - 20° = 180° - 30°$$

Lösning 1:

$x = 25° + n \cdot 180°$

Lösning 2:

$x = 85° + n \cdot 180°$

1217

a) Räknaren ger

$4x - 30° \approx 23,6°$

$x \approx \frac{53,6° + n \cdot 360°}{4} =$

$= 13,4° + n \cdot 90°$

eller

$4x - 30° \approx 180° - 23,6°$

$x \approx \frac{186,4° + n \cdot 360°}{4} =$

$= 46,6° + n \cdot 180°$

b) Använd räknare.

1218

Se facit.

1219-1220

Se facit.

1224

a) Räknaren ger

$2x + 10° \approx 20°$

$x = \frac{10° + n \cdot 360}{2} = 5 + n \cdot 180°$

eller

$2x + 10° \approx (180° - 20°)$

$x = \frac{150° + n \cdot 360}{2} = 75° + n \cdot 180°$

=>

$x = 5°,\ x = 75°,$

$x = 185°,\ x = 255°$

b) Räknaren ger

$4x + 15° \approx 75°$

$x = \frac{60° + n \cdot 360°}{4} = 15° + n \cdot 90°$

eller

$4x + 15° \approx 180° - 75°$

$x = \frac{90° + n \cdot 360°}{4} = 22,5° + n \cdot 90°$

=>

$x = 195°,\ x = 202,5°$

1225

a) Räknaren ger

$3x \approx 15°$

$x = 5° + n \cdot 120°$

eller

$3x \approx 180° - 15°$

$x = 55° + n \cdot 120°$

=>

$x = 125°,\ x = 175°, x = 245°$

b) Lös på samma sätt som a-uppgift.

1226

Räknaren ger

$0,5x \approx 19,5$

$x = 39° + n \cdot 720°$

eller

$0,5x \approx 180° - 19,5°$

$x = 321° + n \cdot 720°$

=>

$x = 321°,\ x = 759°$

1227

a) Räknaren ger

$2x \approx 60°$

$x = 30° + n \cdot 180°$

eller

$2x = (180° - 60°) + n \cdot 360°$

$x = 60 + n \cdot 180°$

=>

$x = 30°,\ x = 60°,$

$x = 210°,\ x = 240°$

b)

$4x = 0°$

$$x = \pm 0° + \frac{n \cdot 360°}{4}$$

$x = 90°,\ x = 180°,\ x = 270°$

c) Räknaren ger

$5x \approx 80{,}1°$

$$x = \frac{80{,}1°}{5} + \frac{n \cdot 360°}{5}$$

$x = 16 + n \cdot 72°$

eller

$5x = 180° - 80{,}1° + n \cdot 360°$

$x = 20° + n \cdot 72°$

=>

$x = 16°,\ \ x = 20°$

$x = 88$

d)

$x = \pm 90° + n \cdot 360°$

$x = 90°,\ x = 270°,\ x = 450°$

1228

a) Räknaren ger

$x > 20{,}5°$

=>

$20{,}5° < x < (180° - 20{,}5°)$

b) Räknaren ger

$x \leq \pm 107{,}5°$

$107{,}5° \leq x \leq (360° - 107{,}5°)$

1229

Räknaren ger

$3x \approx 72{,}5°$

$x = \pm 72{,}5° + n \cdot 360°$

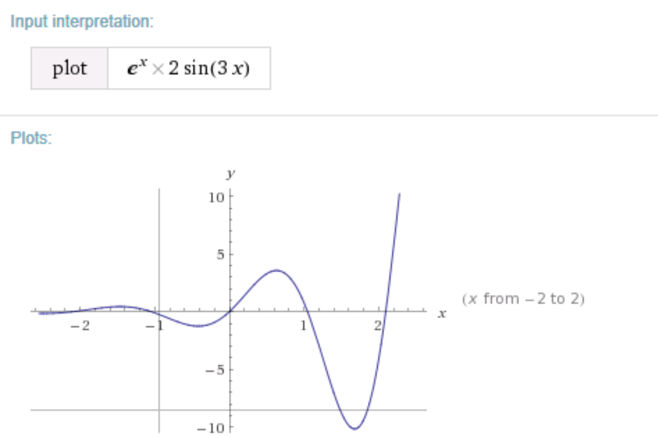
$x = \pm 24 + n \cdot 120°$

=> $384°,\ 456°,\ 504°,$

$576°, 624°$ och $696°$

1230

Använd räknare eller dator => 2 rötter.



1231

Se facit.

1232

$\sin(-90°) = -1\ \ (\min)$

$\sin(90°) = 1\ \ (\max)$

=>

$$\begin{cases} 2b - a \cdot 1 = 4 \\ 2b - a \cdot (-1) = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2b - a = 4 \\ 2b + a = 6 \end{cases}$$

$4b = 10 \Rightarrow b = 2{,}5,\ a = 1$

1236

Se facit.

1237
Använd räknare eller dator.

1238
a)

$\tan x = 5$
(Räknaren ger)
$x \approx 78{,}7° + n \cdot 180°$

b)

$\tan x = 1{,}5$
$x \approx 56{,}3° + n \cdot 180°$

c)

$\tan x = 0{,}2$
$x \approx 11{,}3° + n \cdot 180°$

d)

$\tan x = 10$
$x = 84{,}3° + n \cdot 180°$

1239
a)

$\tan x = 0{,}25$
$x = 14{,}0° + n \cdot 180°$
$=> -166°$ och $14°$

b)

$\tan x = 1$
$x = 45° + n \cdot 180°$
$=> x = 225°$

1240
a) Räknaren ger

$3x + 50° \approx 74°$
$3x + 50 \approx \pm 74 + n \cdot 360°$

Dela upp lösningarna:

Lösning 1:
$3x + 50 \approx 74 + n \cdot 360°$
$3x \approx 24 + n \cdot 360°$
$x = 8 + n \cdot 120°$

Lösning 2:
$3x + 50 \approx -74 + n \cdot 360°$
$3x \approx -124 + n \cdot 360°$
$x = -41{,}3 + n \cdot 120°$

b) Räknaren ger

$4x - 10° = 30°$
Lösning 1:
$4x = 40° + n \cdot 360°$
$x = 10° + n \cdot 90°$
Lösning 2:
$4x - 10° = 180° - 30° + n \cdot 360°$
$x = 40 + n \cdot 90°$

c) Räknaren ger

$4x - 30° \approx 65{,}6°$
$$x \approx \frac{95{,}6° + n \cdot 180°}{4}$$
$x \approx 23.9° + n \cdot 45°$

d) Räknaren ger

$2x + 60° \approx 21{,}8°$
$2x \approx -38{,}2° + n \cdot 180°$
$x \approx -19{,}1° + n \cdot 90°$
$x \approx 70{,}9° + n \cdot 90°$

1241
a)

$\tan x = \frac{3}{4}$
$x \approx 36{,}9° + n \cdot 180°$

b) Räknaren ger

$x \approx 11{,}5°$

Lösning 1: $x = 11{,}5° + n \cdot 360°$

Lösning 2: $x = 180° - 11,5° + n \cdot 360°$

$x = 168,5° + n \cdot 360$

c) $\tan x = \frac{7}{4}$

Räknaren ger

$x = 60,3° + n \cdot 180°$

d) Räknaren ger

$5x \approx 31,4°$
$x \approx 6,3° + n \cdot 36°$

1242

Se facit.

1243

a) Räknaren ger

$2x \approx 56,4°$

Lösning 1:

$x \approx 28,2° + n \cdot 180°$
$=> x \approx 28,2°$

Lösning 2:

$2x \approx 180° - 56,4° + n \cdot 360$
$x \approx 61,8° + n \cdot 180°$
$=> x \approx 61,8°$

b) Räknaren ger

$3x - 20° = \pm 180°$

$3x = 200° + n \cdot 360°$
$x = 66,7 + n \cdot 120°$

Lösning 1:

$x = 186,7°$
$x = 306,7$

c) Räknaren ger

$2x - 30° \approx 78,7°$
$x = \frac{108,7° + n \cdot 180°}{2}$
$x = 54,4° + n \cdot 90°$
$=> x = 234,4°$

d) Räknaren ger

$x \approx 33,7° + n \cdot 180°$

$\Rightarrow x = 33,7°$

1244

$\tan 0 = 0$
$6 = ka + \tan 0 => ka = 6$

Perioden: $\frac{180°}{k} = 45° => k = 4$, eftersom tangensfunktionen har perioden 180°-

$a = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

Vi får

$6 + \tan 4x = 5,423$
$4x \approx -30° + n \cdot 180°$
$x \approx -7,5° + n \cdot 45°$
$=> x \approx 37,5$ och $x \approx 82,5°$

1253

a) Lösning 1:

$6x = 4x + n \cdot 360°$
$2x = n \cdot 360°$
$x = n \cdot 180°$

Lösning 2:

$6x = 180° - 4x + n \cdot 360°$
$10x = 180° + n \cdot 360°$
$x = 18° + n \cdot 36°$

b) Lösning 1:

$x = x + 10° + n \cdot 360°$ => saknar lösning.

Lösning 2:

$x = 180° - (x + 10°) + n \cdot 360°$
$x = 85° + n \cdot 180°$

1254

a) Lösning 1:

$3x = x + 10° + n \cdot 360°$
$x = 5° + n \cdot 180°$

Lösning 2:

$3x = 180° - (x + 10°) + n \cdot 360°$
$4x = 170° + n \cdot 360°$
$x = 42,5° + n \cdot 90°$

=>5°; 42,5° och 132,5°

b) Lösning 1:

$x + 30° = x - 10°$ Saknar lösning.

Lösning 2:

$x + 30° = 180° - (x - 10°) + n \cdot 360°$
$2x = 160° + n \cdot 360°$
$x = 80° + n \cdot 180°$
$=> x = 260°$

1255

a) $3x - 70° = \pm 5x + n \cdot 360°$

Lösning 1:

$-2x = 70° + n \cdot 360°$
$x = -35° + n \cdot 180°$
$x = 145° + n \cdot 180°$

Lösning 2:

$8x = 70° + n \cdot 360°$
$x = 8,75° + n \cdot 45°$

b) $5x = 3x + n \cdot 360°$

Lösning 1:

$2x = n \cdot 360°$
$x = n \cdot 180°$

Lösning 2:

$5x = 180° - 3x + n \cdot 360°$
$8x = 180° + n \cdot 360°$
$x = 22,5° + n \cdot 45°$

1256

a) Lösning 1:

$3x = x + 40° + n \cdot 360°$
$x = 20° + n \cdot 180°$

Lösning 2:

$3x = 180° - (x + 40°) + n \cdot 360°$
$4x = 140° + n \cdot 360°$
$x = 35° + n \cdot 90°$

Se vidare facit.

b) $2x = \pm 3x + n \cdot 360°$

Lösning 1:

$x = n \cdot 360°$

Lösning 2:

$5x = n \cdot 360°$
$x = n \cdot 72°$

Se svaret i facit.

1257

a) Lösning 1:

$8x - 70° = 30° - x + n \cdot 360°$
$9x = 100° + n \cdot 360°$
$x = 11,1° + n \cdot 40°$

Lösning 2:

$8x - 70° = 180 - (30° - x) + n \cdot 360°$
$7x = 220° + n \cdot 360°$
$x = 31,4° + n \cdot 51,4°$

Se svaret i facit.

b) $2x - 25° = \pm(5° - x) + n \cdot 360°$

Lösning 1:

$$3x = 30° + n \cdot 360°$$
$$x = 10° + n \cdot 120°$$

Lösning 2:

$$x = 20° + n \cdot 360°$$

Se svar i facit.

1258
Se facit.

1263
1) $0,5x = 90° - 2x + n \cdot 360°$

$$2,5x = 90° + n \cdot 360°$$
$$x = 36° + n \cdot 144°$$

2) $0,5x = 180° - (90° - 2x) + n \cdot 360°$

$$-1,5x = 90° + n \cdot 360°$$
$$x = -60° + n \cdot 360°$$

Se facit för rötterna.

1264
1)
$$4x + v = 90° - 2x + n \cdot 360°$$
$$6x = 90° - v + n \cdot 360°$$
$$x = \frac{90° - v + n \cdot 360°}{6} =$$
$$= 15° - v/6 + n \cdot 60°$$

2)
$$4x + v = 180 - (90° - 2x) + n \cdot 360°$$
$$2x = 90° - v + n \cdot 360°$$
$$x = 45 - v/2 + n \cdot 180°$$

1308-1312
Se facit.

1313
a)

$$... = \sin(60° + 45°) =$$
$$\sin 60° \cdot \cos 45° + \cos 60 \cdot \sin 45° =$$
$$= [\text{se tabell}] = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} =$$
$$= \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}}$$

b)

$$... = \cos 30 \cdot \cos 45 - \sin 30 \cdot \sin 45 =$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}$$

1314-1316
Se facit.

1320
Rita figur och beräkna hypotenusan: $\sqrt{20}\ \text{cm}$.

a) $\sin x = \dfrac{2}{\sqrt{20}}$

b) $\cos x = \dfrac{4}{\sqrt{20}}$

c)

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x = 2 \cdot \frac{2}{\sqrt{20}} \cdot \frac{4}{\sqrt{20}} =$$
$$= \frac{16}{20} = \frac{4}{5}$$

d)

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x =$$
$$= \left(\frac{4}{\sqrt{20}}\right)^2 - \left(\frac{2}{\sqrt{20}}\right)^2 =$$
$$= \frac{16}{20} - \frac{4}{20} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$$

1321
Rita figur enligt exempel s 49.

Hypotenusan: $\sqrt{5}$

a) $\sin x = \frac{2}{\sqrt{5}}$

b) $\cos x = \frac{1}{\sqrt{5}}$

c)

$$... = 2\sin x \cos x = 2 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} =$$

$$= \frac{4}{5}$$

d)

$$... = \cos^2 x - \sin^2 x =$$

$$= \frac{1}{5} - \frac{4}{5} = -\frac{3}{5}$$

1322

a)

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 0,28$$
$$\cos^2 x = 0,64$$
$$\cos x = 0,8$$

b)

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x = 0,28$$
$$\sin^2 x = 0,36$$
$$\sin x = 0,6$$

c) $... = \frac{0,6}{0,8} = \frac{3}{4}$

d) $... = 2 \cdot 0,6 \cdot 0,8 = 0,96$

1323

Se facit.

1324-1325

Se facit.

1330

Observera förskjutningen i facit i första tryckningen.

a)

$$\sin x = \pm\sqrt{0,36} = \pm 0,6$$

1)

$$x = 37° + n \cdot 360°$$
eller
$$x = (180° - 37°) + n \cdot 360° = 143° + n \cdot 360°$$

2)

$$x = -37° + n \cdot 360°$$
eller
$$x = (180° - (-37°)) + n \cdot 360° = 217° + n \cdot 360°$$

Rita figur. Se omskrivning i facit.

b)

$$\cos x = \pm\sqrt{0,95}$$

1) $x = \pm 13° + n \cdot 360°$

2) $x = (180° \pm 13°) + n \cdot 360°$

Rita figur. Se omskrivning i facit.

1331

a)

$$... = \cos^2 x - 2\cos x = 0$$
$$\cos x(\cos x - 2) = 0$$
$$\cos x = 0 \Rightarrow x = \pm 90° + n \cdot 360°$$
$$dvs.\ x = 90° + n \cdot 180°$$
$$(\cos x - 2 = 0 \text{ saknar lösning}).$$

b)

$$\tan 2x = 1$$
$$2x = 45° + n \cdot 180°$$
$$x = 22,5° + n \cdot 90°$$

1332

Se facit.

1333

a)

$t^2+3t-4=0$

$t=-\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}+4}$

$t_1=-1,5+2,5=1$

$t_2=-1,5-2,5=-4$

$\Rightarrow \sin x=1$

$\Rightarrow x=90°+n\cdot 360°$

$(\sin x=-4 \text{ saknar lösning}).$

b) Se facit.

1334

a) Se ledning =>

$\cos^2 x=2\cos x+2\cos^2 x-1$

$\text{Sätt } \cos x=t$

$t^2+2t-1=0$

$t=-1\pm\sqrt{2}$

$\Rightarrow \cos x\approx 0,41$

$\Rightarrow x\approx \pm 66°+n\cdot 360°$

$(\cos x=-2,41 \text{ saknar lösning}).$

b) Skriv om:

$2\cos^2 x-1=-\cos x-1$

$t^2+\frac{1}{2}\cdot t=0$

$t(t+\frac{1}{2})=0$

$t=-\frac{1}{2} \text{ eller } t=0$

(Rita eventuellt figur)

$\Rightarrow \cos x=\pm 120°+n\cdot 360°$

eller

$\cos x=90°+n\cdot 180°$

1335

Se facit.

1340

Se facit och s 53-54.

1341

$\tan 26,6°=0,5$

$\sqrt{20}=\sqrt{a^2+b^2} \Rightarrow a=4 \text{ och } b=2$

$\Rightarrow y=4\sin x+2\cos x$

1342

Avläs ur grafen:

$y=m\sin(x-v) \text{ där}$

$m=2 \Rightarrow$

$2=\sqrt{a^2+b^2} \Rightarrow a^2+b^2=4$

$\Rightarrow a=b=\sqrt{2}$

$v=45° \text{ (grafen förskj. åt höger)}$

$\Rightarrow y=\sqrt{2}\cdot\sin x-\sqrt{2}\cdot\cos x$

1343

a)

$2=\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}\sin(x+\arctan\frac{1}{\sqrt{3}})$

$2=2\sin(x+30°) \quad \Rightarrow x=60°$

b)

$1=\sqrt{2}\sin(x-\arctan 1)$

$1=\sqrt{2}\sin(x-45°)$

$\frac{1}{\sqrt{2}}=\sin(x-45°)$

$\Rightarrow x=90° \text{ eller } x=180°$

c)

Förläng med cos *x* i alla led:

$2\sin x-2=\cos x$

$2\sin x-\cos x=2$

$\Rightarrow \sqrt{2^2+1^2}\sin(x-\arctan\frac{1}{2})=2$

$\sqrt{5}\sin(x-26,6°)=2$

$\sin(x-26,6°)=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

$x-26,6°=63,43°$

$=> x-26,6°=180°-63,43°$

$=> x\approx 143°$

Eftersom $\cos 90°=0$ är $x=90°$ en falsk rot. Division med noll är inte tillåten i ursprunglig ekvation.

1344

Se t.ex. viktigruta s. 54.

$10=\sqrt{a^2+8^2} => a=\pm 6$

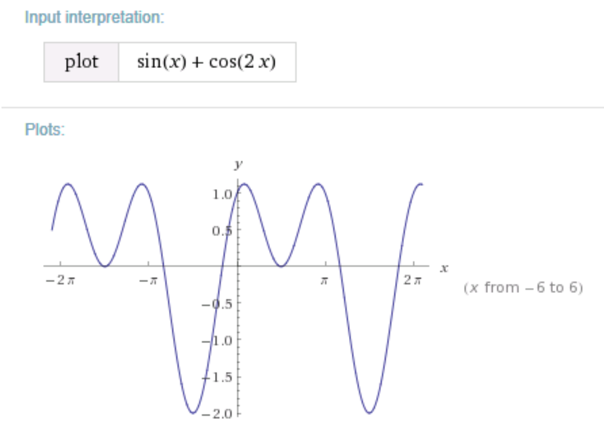
$\arctan\dfrac{8}{6}=53,13°$ (åt höger)

$\arctan\dfrac{-8}{6}=-53,13°$ (åt vänster)

1345

a) Grafisk lösning. Perioden $2\pi=360°$.

Största värde 1,125.



1417

a)

$\cos 2x=\dfrac{1}{3}$

$2x\approx \pm 1,231+n\cdot 2\pi$

$x\approx \pm 0,615+n\cdot \pi$

b)

$\sin 0,2x=-\dfrac{4}{5}$

1)

$0,2x\approx -0,927+n\cdot 2\pi$

$x\approx -4,64+n\cdot 10\pi$

Eller:

$x\approx 10\pi-4,64+n\cdot 10\pi\approx$

$\approx 26,8+n\cdot 10\pi$

2)

$0,2x\approx \pi-(-0,927)+n\cdot 2\pi$

$0,2x\approx 4,07+n\cdot 2\pi$

$x\approx 20,35+n\cdot 10\pi$

1418

Ur figur:

a)

Perioden: $\dfrac{2}{3}\pi$

Amplitud: 2,5

Förskjutning: $\dfrac{\pi}{12}$ åt vänster

=>

$y=2,5\sin 3(x+\dfrac{\pi}{12})$

b)

Perioden: 4π

Amplitud: 2

Förskjutning: $\dfrac{\pi}{3}$ åt vänster

=>

$y=2\sin\dfrac{1}{2}(x+\dfrac{\pi}{3})$

1419-1420

Se facit.

1421

Kurvan är förskjuten 2 rutor i höjdled => *a* = 2.

Amplituden är 1 => *b* = – 1, eftersom kurvans lutning är negativ under första kvartsperioden.

1422

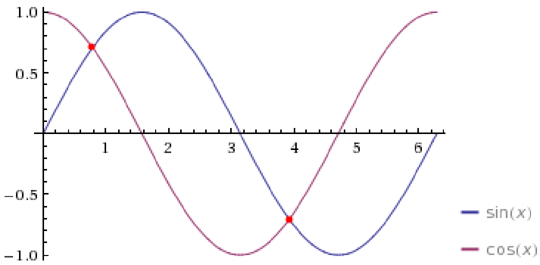
a) $x \approx 0{,}8$ eller $x \approx -3{,}9$

plot	$\sin(x) = \cos(x)$	$x = 0$ to 6.28

Result:

(endpoints not on curve)

Plot:



b)

$$\tan x = 1$$

$$x = \frac{\pi}{4} + n \cdot \pi$$

=>

$$x = \frac{\pi}{4} \text{ eller } x = \frac{5\pi}{4}$$

1423-1424

Se facit.

1435

a)

$$x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} \quad eller \quad \frac{5\pi}{6}$$

=>

$$x = -\frac{\pi}{6} + n \cdot 2\pi \quad eller$$

$$x = \frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi$$

b)

$$2x - \frac{\pi}{4} = 0$$

$$2x = \frac{\pi}{4} + n \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{\pi}{8} + n \cdot \pi$$

1436

a)

$$3x - \frac{\pi}{2} = \pm \frac{\pi}{3}$$

$$3x = \frac{3\pi}{6} \pm \frac{2\pi}{6}$$

$$3x = \frac{5\pi}{6} + n \cdot 2\pi \text{ eller}$$

$$3x = \frac{\pi}{6} + n \cdot 2\pi$$

=>

$$x = \frac{5\pi}{18} + n \cdot \frac{2}{3}\pi \text{ eller}$$

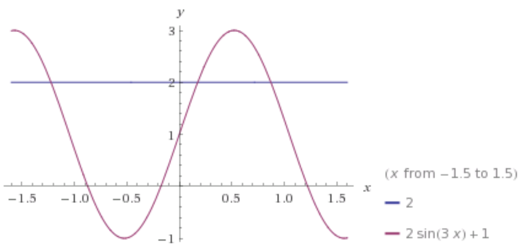
$$x = \frac{\pi}{18} + n \cdot \frac{2}{3}\pi$$

Se närmevärde facit.

b) Avläs i grafen.

plot	$y = 2$
	$y = 2\cos\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) + 1$

Plot:



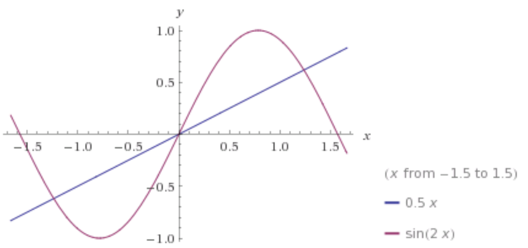
1437

Grafisk lösning => 3 rötter.

Input interpretation:

plot	$y = 0.5\,x$
	$y = \sin(2\,x)$

Plot:



1438

a)

Additionssatsen :

$$\ldots = \sin x \cos \frac{\pi}{3} + \cos x \sin \frac{\pi}{3} +$$

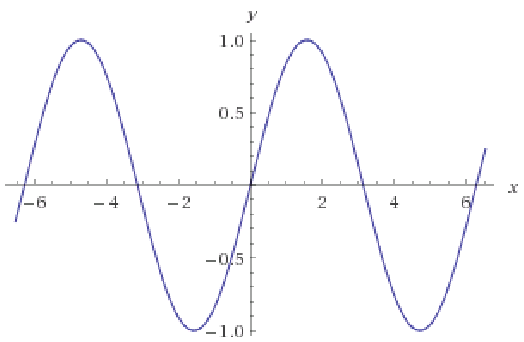
$$+ \sin x \cos \frac{\pi}{3} - \cos x \sin \frac{\pi}{3} =$$

$$2 \sin x \cos \frac{\pi}{3} = \sin x$$

Input interpretation:

plot	$\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

Plots:



b)

Additionssatsen:

$$\cos x \cos \frac{\pi}{6} + \sin x \sin \frac{\pi}{6} -$$

$$(\cos x \cos \frac{\pi}{6} - \sin x \sin \frac{\pi}{6}) =$$

$$= 2 \sin x \sin \frac{\pi}{6} = \sin x$$

1439

Summan av tre strömmar med samma amplitud förskjutna $\frac{2\pi}{3}$, dvs 120°, är 0.

Använd additionssatsen. Se föregående uppgift.

1440

a) Avläs i diagram. $f(x) = 2$ har två rötter i intervallet.

b) Rita linjen $f(x) = 2x$ => en rot.

c) Rita linjen $\frac{2+x}{2}$ =>fem rötter.

1441

Sätt $\cos x = t$

$$2t^2 - t - 1 = 0$$

$$t^2 - \frac{t}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

$$t = \frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{8}{16}}$$

$$t = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1 \text{ eller}$$

$$t = -\frac{1}{2}$$

=>

$$x = n \cdot 2\pi \quad \text{eller}$$

$$x = \pm \frac{2\pi}{3} + n \cdot 2\pi$$

1442

Räkna "baklänges". Rita figur. Ansätt

$2x = \frac{\pi}{4} + n \cdot 2\pi$ eller

$2x = \pi - \frac{\pi}{4} + n \cdot 2\pi$

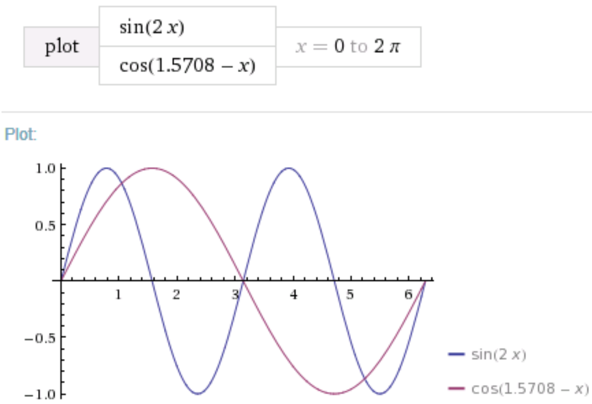
$\sin 2x = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ eller

$\sin 2x = \sin(\pi - \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

T.ex. $\sin 2x = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (= \frac{\sqrt{2}}{2})$

1443

a) $x \approx 1,\ x \approx 3{,}15$ och $x \approx 5{,}2$



b)

$\Rightarrow 2\sin x \cos x = \cos 0{,}5\pi \cos x +$
$\sin 0{,}5\pi \sin x$
$\Rightarrow$
$2\sin x \cos x = \sin x$

Flytta över och bryt ut sin *x*:

$2\sin x \cos x - \sin x = 0$

$\sin x(2\cos x - 1) = 0$

1) $\sin x = 0 \Rightarrow x = 0 + n \cdot \pi = n \cdot \pi$

2)

$2\cos x - 1 = 0 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2}$

$x = \pm\frac{\pi}{3} + n \cdot 2\pi$

I intervallet:

$x = \frac{\pi}{3},\ x = \pi,\ x = \frac{5\pi}{3}$

1450

$A = \frac{97-63}{2}\,\text{mmHg} = 17\ \text{mmHg}$

$B = \frac{97+63}{2}\,\text{mmHg} = 80\,\text{mmHg}$

Perioden 1,5 s. $\frac{2\pi}{k} = 1{,}5 \Rightarrow k \approx 4{,}19 \quad (\frac{4\pi}{3})$

$y = 17\sin 4{,}2t + 80 \quad (y = 17\sin\frac{4\pi}{3}t + 80)$

1451

a)

1)

$y = 13 - 50\cos\frac{\pi}{12}\cdot 6\ \text{W/m}^2 =$

$= 13 - 50\cos\frac{\pi}{2}\,\text{W/m}^2 = 13\ \text{W/m}^2$

2) $y = 13 - 50\cos\frac{\pi}{12}\cdot 10{,}5\ \text{W/m}^2 \approx 59\ \text{W/m}^2$

b) $y_{\min}$ då

$\cos\frac{\pi}{12}\cdot x = 1 \Rightarrow x = 0.$ Men ej inom intervallet.

$\Rightarrow y_{\min}$ då $x = 6$ och då $x = 18.$ Se uppgift a).

$y_{\max}$ då

$\cos\frac{\pi}{12}\cdot x = -1 \Rightarrow x = 12.$

$\Rightarrow y_{\max} = 13 - 50\cos\pi\ \text{W/m}^2 = 63\ \text{W/m}^2$

c)

$$13-50\cos\frac{\pi}{12}\cdot x=60$$
$$\cos\frac{\pi}{12}\cdot x=-\frac{47}{50}$$
$$\frac{\pi}{12}\cdot x=\pm 2,79+n\cdot 2\pi$$

1)

$$x=\frac{2,79\cdot 12}{\pi}+n\cdot 24=10,66$$
$$0,66\text{ tim}\approx 40\,\text{min}$$
$$=>\text{kl. }10.40$$

2)

$$x=\frac{-2,79\cdot 12}{\pi}+n\cdot 24=-10,66$$
$$x=-10,66+1\cdot 24=13,34\;tim$$
$$0,34\,tim\approx 20\,\text{min}$$
$$=>\text{kl. }13.20$$

d)

$$13-50\cos\frac{\pi}{12}\cdot x>50$$
$$\cos\frac{\pi}{12}\cdot x<-\frac{37}{50}$$
$$x=\pm\frac{2,40\cdot 12}{\pi}+n\cdot 24$$

1)

$$x=\frac{2,40\cdot 12}{\pi}+n\cdot 24\approx 9,2$$
$$0,2\text{ tim }=12\,\text{min}$$
$$=>\text{kl. }09.12$$

2)

$$x=\frac{-2,40\cdot 12}{\pi}+n\cdot 24=-9,2+n\cdot 24=$$
$$=-9,2+n\cdot 24=14,8$$
$$0,8\text{ tim}\approx 48\text{ min}$$
$$=>\text{kl.}14.48$$

$9,2 < x < 14,8$

Solinstrålningens intensitet är > 50 W/m^2 mellan kl. 09.12 och kl. 14.48.

1452

a)

$$\begin{cases}9,780=a\cos(2\cdot 0°)+b\\ 9,832=a\cos(2\cdot 90°)+b\end{cases}$$
$$\begin{cases}9,780=a+b\\ 9,832=-a+b\end{cases}$$
$$b=9,806,\ a=-0,026$$

b)

$$9,810=-0,026\cdot\cos(2\cdot x)+9,806$$
$$-0,1538=\cos 2x$$
$$2x=\pm 98,87°+n\cdot 2\pi$$
$$x\approx 49,4°$$

1453

a) Se facit

b)

$$\cos(2x+\pi)=-1$$
$$2x+\pi=\pm\pi+n\cdot 2\pi$$
$$=>$$
$$x=\frac{\pi-\pi+n\cdot 2\pi}{2}$$
$$x=n\cdot\pi$$

1454

Repetera t.ex. sid 14.

a) Positionen i *x*- respektive *y*-led kan skrivas:

$$x=A\cos wt,\quad y=A\sin wt$$
där $w=2\cdot 2\pi$ rad/min, $A = 5$ m och t anges i minuter.

b) Tänk avståndet mellan två punkter som en funktion av tiden *t*:

$$s(t)=\sqrt{(10-5\cos 4\pi t)^2+(0-5\sin 4\pi t)^2}=$$
$$=\sqrt{(10-5\cos 4\pi t)^2+(-5\sin 4\pi t)^2}$$

1463

Se facit.

1463

a)

$$\sin^2 x + 2\sin x\cos x + \cos^2 x +$$
$$\sin^2 x - 2\sin x\cos x + \cos^2 x =$$
$$= 2\sin^2 x + 2\cos^2 x =$$
$$= 2(\sin^2 x + \cos^2 x) = 2$$

b)

$$\frac{\sin x}{\cos x} - \frac{2\cdot\sin x\cos x}{2\cos^2 x} =$$
$$= \frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\sin x}{\cos x} = 0$$

1464-1466

Se facit

1467

$$\frac{1}{1-\sin x} + \frac{1}{1+\sin x} - \frac{2}{\cos^2 x} =$$
$$\frac{1+\sin x}{(1-\sin x)(1+\sin x)} + \frac{1-\sin x}{(1+\sin x)(1-\sin x)} - \frac{2}{\cos^2 x} =$$
$$\frac{1+\sin x}{1-\sin^2 x} + \frac{1-\sin x}{1-\sin^2 x} - \frac{2}{\cos^2 x} =$$
$$= \left[\cos^2 x = 1-\sin^2 x\right] =$$
$$= \frac{1+\sin x + 1 - \sin x - 2}{\cos^2 x} = 0$$

1468

Se facit.

1469

$$\cos 2x = 0 \Rightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + n\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2}$$

1470-1471

Se facit.

Kapitel 2

2104
Se facit.

2105
Tangeringspunkten är (4, 5).

Tangentens lutning är 3.

$$y = kx + m$$
$$5 = 3 \cdot 4 + m$$
$$\Rightarrow m = -7$$
$$\Rightarrow y = 3x - 7$$

2106
$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} =$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{3(x+h)^2 + 2(x+h) - (3x^2 + 2x))}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{3x^2 + 6xh + 3h^2 + 2x + 2h - 3x^2 - 2x}{h} =$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{6xh + 3h^2 + 2h}{h} = \lim_{h \to 0} 6x + 3h + 2 = 6x + 2$$

2107
a)

Rita figur.

Vi utgår från punkten (3, 4), där tangenten har $k = -2$.

Ungefär samma lutning då $x = 3{,}1$ =>
$f(3{,}1) \approx 4 - 2 \cdot 0{,}1 \approx 3{,}8$

b) Utgå från punkten (7; –2), där tangenten har $k = 3$.

Ungefär samma lutning då $x = 6{,}8$ =>

$$f(6{,}8) \approx -2 - 3 \cdot 0{,}2 = -2{,}6$$

2108
a)

$$-3 = 1 \cdot 2 + m \Rightarrow m = -5$$
$$\Rightarrow y = x - 5$$

b)

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{6} \cdot 2 + m \Rightarrow m = \frac{1}{3}$$
$$\Rightarrow y = \frac{1}{6}x + \frac{1}{3}$$

2109
Se facit.

2110-2111
Se facit.

2126
a)

$$f(x) = 3x + 2 \cdot x^{-1} \Rightarrow$$
$$f'(x) = 3 - 2 \cdot x^{-2} = 3 - \frac{2}{x}$$
$$f'(1) = 3 - 2 = 1$$

b)

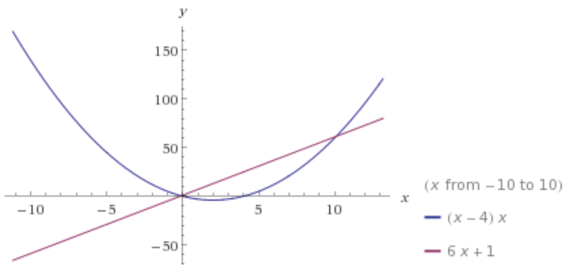
$$f(x) = \frac{3}{7} - \frac{2}{7x} = \frac{3}{7} - \frac{2}{7}x^{-1} \Rightarrow$$
$$f'(x) = \frac{2}{7x^2} \Rightarrow f'(1) = \frac{2}{7}$$

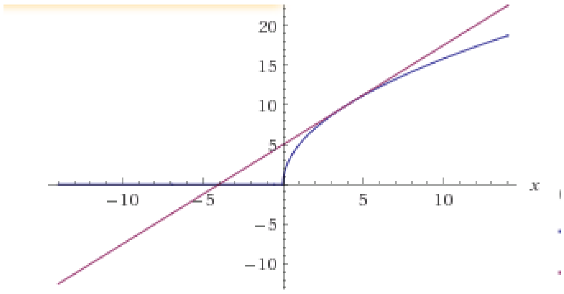
2127
$$g'(x) = 8000 \cdot \ln 1{,}045 \cdot 1{,}045^x \Rightarrow$$
$$g'(10) = 352{,}135 \cdot 1{,}045^{10} \text{ kr} \approx 547 \text{ kr}$$

Se kommentar facit.

2128
a) Linjen har lutningen $k = 6$.

$$y' = 2x - 4 = 6 \Rightarrow x = 5 \Rightarrow y = 5$$





b)) *x*-axeln har lutningen 0.

$y' = 2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow y = -4$

2129

a)

$T_{5\,\text{min}} = 20 + 78 \cdot 0{,}88^5 \ °\text{C} =$
$\approx 61\,°\text{C}$

b)

$y' = 78 \cdot \ln 0{,}88 \cdot 0{,}88^t$
$y'(10) = 78 \cdot \ln 0{,}88 \cdot 0{,}88^{10} \ °\text{C/min} =$
$= -2{,}8 \ °\text{C/min} \Rightarrow \text{Nej.}$

2130

$y' = 340 \cdot \ln 1{,}08 \cdot 1{,}08^x = 100$

$1{,}08^x = \dfrac{100}{340 \cdot \ln 1{,}08}$

$\ln 1{,}08^x = \ln \dfrac{100}{340 \cdot \ln 1{,}08}$

$x \approx 17$

2131

$y' = 2{,}5x^{-\frac{1}{2}}$

$y'(4) = \dfrac{2{,}5}{\sqrt{4}} = 1{,}25$

Tangentens ekvation?

$10 = 1{,}25 \cdot 4 + m$
$\Rightarrow m = 5$

Skär *x*-axeln då y = 0:

$\Rightarrow 0 = 1{,}25 \cdot x + 5$
$\Rightarrow x = -4$

2132

$g'(x) = -\dfrac{1}{p}x^{-2} + \dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$

$1 = -\dfrac{1}{p}4^{-2} + \dfrac{1}{2} \cdot 4^{-\frac{1}{2}}$

$1 = -\dfrac{1}{p} \cdot \dfrac{1}{4^2} + \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{4}}$

$p = -\dfrac{1}{4^2} + \dfrac{p}{2} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{4}}$

$p = -\dfrac{1}{16} + p \cdot \dfrac{1}{4}$

$\dfrac{3}{4}p = -\dfrac{1}{16} \Rightarrow p = -\dfrac{1}{12}$

2133

Se facit.

2141-2142

Se facit.

2143

Prova! Se facit.

2144

Derivatan (tangentens lutning) är positiv fram till *x* = 2 där kurvan har en extrempunkt. När kurvan är > 2 är derivatan negativ => B.

2145

Se facit.

2209

Kurvan skär *y*-axeln då *x* = 0.

$f(0) = 4\cos 0 = 4$

Tangentens ekvation i (0, 4)?

$f'(0) = --4\sin 0 = 0, \text{ dvs } k = 0.$

Tangentens ekvation:

$$y = kx + m,\ \text{där}\ k = 0.$$
$$y = m$$
$$=> m = 4$$

Tangentens ekvation: *y* = 4.

2210
Se facit.

2211
$$g'(x) = 2\cos x - \sin x$$
$$g'(0) = 2\cos 0 - \sin 0 = 2 = k$$

Tangentens ekvation:

$$y = kx + m = 2x + m$$

Sök *m*. Sätt in tangeringspunkten i formeln.

$$1 = 2 \cdot 0 + m => m = 1.$$

=> $y = 2x + 1$

2212
$$y' = \sin x$$
$$x = \pi => y' = 0 = k$$

Sök tangeringspunkten:

$$y = 2 - \cos\pi = 2 - (-1) = 3$$

Lös ut *m* genom att sätt in *k* = 0 och tangeringspunkten $(\pi, 3)$ i formeln
y = *kx* + *m* => *m* = 3.

2213
$$y' = 3 + 6\sin x = 0$$
$$\sin x = -\frac{1}{2}$$
$$x = -0,52 + n \cdot 2\pi$$
eller
$$x = \pi - (-0,52) + n \cdot 2\pi$$
$$=>$$
$$x_1 = 3,66$$
$$x_2 = 5,76$$

2214
Se facit.

2222
Se exempel.

a) $y' = -(x+1)^{-2}$

b) $y' = -3(3x-1)^{-2}$

c) $y' = -2x(x^2+1)^{-2}$

2223
a) $y' = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot (4x+5)^{-\frac{1}{2}} = 2 \cdot (4x+5)^{-\frac{1}{2}}$

b)

$$y' = \frac{1}{2} \cdot 2x(x^2+1)^{-\frac{1}{2}} =$$
$$= x(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}$$

c) $y' = -2x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$

2224
a) $y' = (2-6x)e^{2x-3x^2}$

b) $y' = 3\sin^2 x \cdot \cos x$

c) $y' = -4\cos^3 x \cdot \sin x$

2225
a) $y' = \cos(x^2) \cdot 2x$

b) $y' = -\sin(2x^3)\cdot 6x^2$

c) $y' = e^{\sin x}\cdot\cos x$

2226

a) Inre derivatan, dvs. derivatan av sin2*x* => 2cos2*x*

b) Den primitiva funktionen till *h*´(*x*), t.ex.

$$(x^3 + 2x^2)^2 + C$$

c) t.ex. $x^3 + C$

2227

$$y' = (2x+4)e^{x^2+4x}$$
$$y'(0) = 4$$

Sätt in *k* = 4 och tangeringspunkten i *y* = *kx* + *m* =>*m* = 1.

=>*y* = 4*x* + 1

2228

$$y' = \sin 2x \cdot 2$$
$$y = x - 4 \;=> k = 1$$

Sätt

$$\sin 2x\cdot 2 = 1$$
$$\sin 2x = \frac{1}{2}$$
$$2x = \frac{\pi}{6} + n\cdot 2\pi \;=> x = \frac{\pi}{12}$$
$$2x = \pi - \frac{\pi}{6} + n\cdot 2\pi \;=> x = \frac{5\pi}{12}$$

2229-2231

Se facit.

2240

$$f'(x) = \frac{9}{x} + x - 10$$
$$\frac{9}{x} + x - 10 = 0$$
$$x^2 - 10x + 9 = 0$$
$$x = 5 \pm \sqrt{25-9}$$
$$x_1 = 9,\; x_2 = 1$$

2241-2243

Se facit.

2244

a)

$$500 = 20 + 150\cdot\ln(8x+1)$$
$$\ln(8x+1) = \frac{480}{150}$$
$$(8x+1) = e^{\frac{480}{150}}$$
$$x = \frac{e^{\frac{480}{150}} - 1}{8}\text{ min} \approx 3\text{ min}\;\;(2{,}94)$$

b)

$$T'(x) = \frac{150}{8x+1}\cdot 8$$
$$T'(10) = \frac{150}{80+1}\cdot 8\;\;°\text{C/min} \approx 14{,}8\;°\text{C/min}$$

Se facit.

2245

Se facit.

2246

a)

$$y = -16\cdot 65^{2/3}\ln\left(\frac{100-45}{192}\right)\text{ s} \approx$$
$$\approx 323\text{ s} => 5\text{ min } 23\text{s}$$

b)

$$240 = -16 \cdot 65^{2/3} \ln\left(\frac{100-x}{192}\right)$$

$$\left(\frac{100-x}{192}\right) = e^{\frac{240}{-16 \cdot 65^{2/3}}}$$

$$x = 100 - 192 \cdot e^{\frac{240}{-16 \cdot 65^{2/3}}} \ °\text{C}$$

$$x \approx 24 \ °\text{C}$$

c)

$$y'(x) = -16 \cdot 65^{2/3} \frac{1}{\left(\frac{100-x}{192}\right)} \cdot \left(-\frac{1}{192}\right) =$$

$$= 16 \cdot 65^{2/3} \cdot \frac{1}{100-x}$$

$$=> x = 100 => \text{nämnaren} = 0$$

$$=> \text{Modellen gäller inte för } x = 100.$$

2255

a)

$$y = x^3 - 2x^2 + 3x$$

$$y' = 3x^2 - 4x + 3$$

b)

$$y' = 1 \cdot (x^2 - 2x + 3) + x \cdot (2x - 2) =$$

$$= x^2 - 2x + 3 + 2x^2 - 2x = 3x^2 - 4x + 3$$

2256

Se facit.

2257

$$y' = \cos x \cos x - \sin x \sin x =$$

$$= \cos^2 x - \sin^2 x = \left[\text{trig. ettan}\right] =$$

$$= 1 - 2\sin^2 x = 0$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2},$$

$$\text{Sätt } \sin x = t$$

$$t^2 = \frac{1}{2}$$

$$t = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

Byt tillbaka sin *x* = *t*.

$$\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow$$

$$x = \frac{\pi}{4} + n \cdot 2\pi \ \text{ och}$$

$$x = \pi - \frac{\pi}{4} + n \cdot 2\pi = \frac{3\pi}{4} + n \cdot 2\pi$$

$$\sin x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow$$

$$x = \frac{5\pi}{4} + n \cdot 2\pi \ \text{ och}$$

$$x = \pi - \frac{5\pi}{4} + n \cdot 2\pi = -\frac{\pi}{4} + n \cdot 2\pi$$

$$=> x = \frac{\pi}{4} + n \cdot \frac{\pi}{2} \qquad (= \pm\frac{\pi}{4} + n \cdot \pi \ )$$

2258

Se facit.

2259

$$f(0) = (0+1) \cdot e^0 = 1$$

Tangeringspunkten är (0, 1).

Tangentens lutning (*k*) i punkten:

$$f'(0) = (0+2) \cdot e^0 = 2 = k$$

Sätt in tangeringspunkten och *k* i ekvationen

$$y = kx + m \Rightarrow 1 = 2 \cdot 0 + m$$

$$\Rightarrow m = 1$$

$$=> y = 2x + 1$$

2260

$$y' = 3x^2 \cdot e^{-2x} - 2x^3 \cdot e^{-2x}$$

x-axeln har *k* = 0.

=>

$$3x^2 \cdot e^{-2x} - 2x^3 \cdot e^{-2x} = 0$$

$$x^2(3e^{-2x} - 2x \cdot e^{-2x}) = 0$$

$$=> x_1 = 0,\ x_2 = \frac{3}{2}$$

2261

a)

$$y'(x) = f'(x) + g'(x)$$

$$y'(2) = 4 + 7 = 11$$

b)

$$y'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$y'(2) = 4 \cdot 2 + 3 \cdot 7 = 29$$

c)

$$y'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) =>$$

$$y'(2) = f'(2) \cdot 7 = 4 \cdot 7 = 28$$

2262

Se facit.

2268

$$y' = \frac{\frac{1}{x} \cdot x^2 - \ln x \cdot 2x}{x^4} =$$

$$= \frac{1 - \ln x \cdot 2}{x^3} = 0$$

=>

$$\frac{1 - \ln x \cdot 2}{x^3} = 0$$

$$\frac{1}{x^3} = \frac{2\ln x}{x^3} \Rightarrow \ln x = \frac{1}{2}$$

$$=> x = e^{\frac{1}{2}}$$

2269

a)

$$y' = \frac{1 \cdot e^{-x} - (x+1) \cdot (-1) \cdot e^{-x}}{e^{-2x}} =$$

$$= \frac{e^{-x} + (x+1) \cdot e^{-x}}{e^{-2x}} = \frac{x+2}{e^{-x}} = 0$$

$$=> x = -2, \text{ dvs tangentens lutning, } k = 2.$$

Sätt in *k* = 2 i tangeringspunkten i $y = kx + m$:

$$1 = 2 \cdot 0 + m => m = 1$$

$$=> y = 2x + 1$$

b) Tangeringspunkten:

$$y = \frac{\ln 1}{1+1} = 0 \Rightarrow (1;\ 0)$$

Tangentens lutning, *k*:

$$y' = \frac{\frac{1}{x}(x+1) - \ln x \cdot 1}{(x+1)^2}$$

$$y'(1) = \frac{2-0}{4} = \frac{1}{2}$$

In i $y = kx + m => m = -\frac{1}{2} => y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

2270

Kurvan:

$$y' = \frac{-\sin x \sin x - \cos x \cos x}{\sin^2 x} =$$

$$= -\frac{(\sin^2 x + \cos^2 x)}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

Linjen: $y' = -4$, dvs. linjen har lutningen –4.

Sätt

$$\frac{1}{\sin^2 x} = 4$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{4}$$

$$\sin x = \pm\frac{1}{2}$$

$$x_{1,2} = \pm\frac{\pi}{6} + n \cdot 2\pi$$
$$x_{3,4} = \pi \pm \frac{\pi}{6} + n \cdot 2\pi$$
$$=> x = \frac{\pi}{6} \text{ ligger i intervallet.}$$

2271
Se facit.

2272
$$f'(x) = \frac{2e^{2x} \cdot g(x) - e^{2x} \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$$
$$f'(2) = \frac{2e^4 \cdot (-1) - e^4 \cdot 3}{1} =$$
$$= -5e^4 = -273$$

2273
Se facit.

2306
a)

$$|x^2 - 9| = 7 =>$$
$$x^2 - 9 = 7 => x = \pm 4$$
$$x^2 - 9 = -7 => x = \pm\sqrt{2}$$
$$=> 4 \text{ rötter}$$

b) Se a)-uppgift.

2307
a)

$$k = 2 \text{ och } m = -4 =>$$
$$y = |2x - 4| \text{ ty}$$
$$2x - 4 \geq 0, \text{ då } x \geq 2$$

För $x < 2$ finns grafen till $y = 2x - 4$ under x-axeln. Då gäller alltså

$$|2x - 4| = -(2x - 4) = -2x + 4$$

b)

$$k = 2 \text{ och } m = 3 =>$$
$$y = |2x + 3| \text{ ty}$$
$$2x + 3 \geq 0, \text{ då } x \geq -1{,}5$$

För $x < -1{,}5$ finns grafen till $y = 2x + 3$ under x-axeln. Då gäller alltså

$$|2x + 3| = -(2x + 3) = -2x - 3$$

2308
Se facit.

2309
$$x^2 - 4x + 3 = 0$$
$$x = 2 \pm \sqrt{4 - 3}$$
$$x_1 = 3,\ x_2 = 1$$

För $1 < x < 3$ finns grafen till $y = x^2 - 4x + 3 = 0$ under x-axeln.

$$=> \ldots = \begin{cases} x^2 - 4x + 3 \text{ för } x \leq 1 \text{ och } x \geq 3 \\ -x^2 + 4x - 3 \text{ för } 1 < x < 3 \end{cases}$$

2310
a) och b) Se facit.

c) $3 = |x - 1| + |x - 2|$

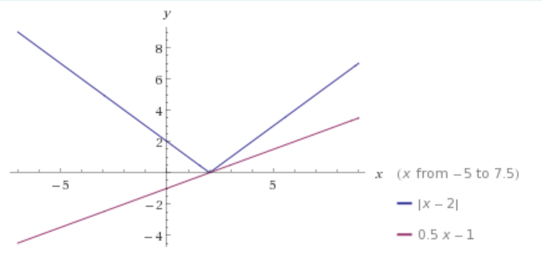
$$|x - 1| : -x + 1 \quad \text{för } x < 1$$
$$|x - 2| : -x + 2 \quad \text{för } x < 2$$

$$x < 1:\ 3 = -x + 1 - x + 2 \ => x = 0$$
$$1 \leq x < 2:\ 3 = x + 1 - x + 2 \ \text{(saknar lösning)}$$
$$x \geq 2 : 3 = x - 1 + x - 2 => x = 3$$

2311
Grafisk lösning. Rita $|x - 2|$ och t.ex.
$y = 0.5x - 1$ i samma diagram.

m parallellförskjuter kurvan i y-led.

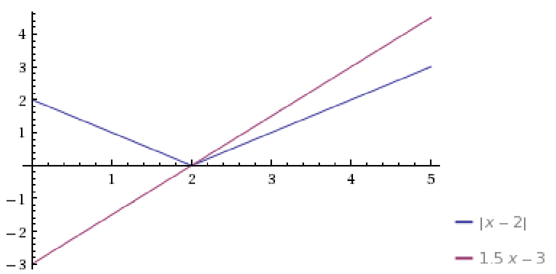
Vi ser att ekvationssystemet har två lösningar då $m > -1$, en lösning då $m = -1$ och att det saknar lösningar då $x < -1$.



b)

plot	$\lvert -2+x \rvert$	$x = 0$ to 5
	$y = -3 + 1.5\,x$	

ot:



Då $m > -3$ skär linjen endast den vänstra linjen ($-x + 2$). När $m < -3$ skär linjen endast den högra linjen ($x - 2$). Även när $m < -3$ har ekvationssystemet endast en lösning.

2312

3 nollställen: $x = 0,\ x = 2,\ x = 4$ =>

$$y = x(x-2)(x-4) = x(x^2 - 4x - 2x + 8) =$$
$$= x^3 - 6x^2 + 8x$$

$$=> y = \lvert x^3 - 6x^2 + 8x \rvert$$

2313

Se facit.

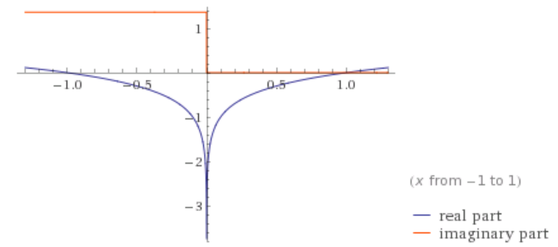
2321

$$y = \ln k + \ln x = 0$$
=>
$$\ln x = -\ln k = \ln k^{-1}$$
$$=> x = \frac{1}{k}$$

2322

plot	$y = \log_{10}(x)$

Plots:



Tangeringspunkten? $y = \lg 1 = 0$ =>(1; 0)

$$k = y' = \frac{1}{x \ln 10} = \frac{1}{\ln 10}$$

Sätt in i ekvationen $y = kx + m$:

$$=> 0 = \frac{1}{\ln 10} \cdot 1 - m \quad => m = \frac{1}{\ln 10}$$
$$=> y = \frac{1}{\ln 10} x - \frac{1}{\ln 10} = \frac{x-1}{\ln 10}$$

2323

a) $y' = \dfrac{1}{2x} \cdot 2 = \dfrac{1}{x} => \dfrac{1}{3}$

b) $y' = \dfrac{1}{3x} \cdot 3 = \dfrac{1}{x} => \dfrac{1}{3}$

d) Se facit.

2324

$$y' = \frac{1}{x^2 + 3} \cdot 2x$$

Linjen: $y = \dfrac{x}{2} + \dfrac{7}{2} => k = \dfrac{1}{2}$

$$\frac{1}{x^2+3} \cdot 2x = \frac{1}{2}$$
$$4x = x^2 + 3$$
$$x^2 - 4x + 3 = 0$$
$$x = 2 \pm \sqrt{4-3}$$
$$x_1 = 3,\ x_2 = 1$$

2325

$$y' = \frac{4}{x} - 8x$$
$$y'(1) = -4$$

Sätt in tangeringspunkten och k i ekvationen $y = kx + m$:

$$4 = -4 \cdot 1 + m \Rightarrow m = 8$$

Tangentens ekvation: $y = -4x + 8$

Sätt y = 0: => x = 2

2326

a) $f'(x) = \dfrac{1}{x^2 + 4} \cdot 2x$

b) $f(2) = \ln(2^2 + 4) = \ln 8$

Sätt in tangeringspunkten och k i ekvationen $y = kx + m$:

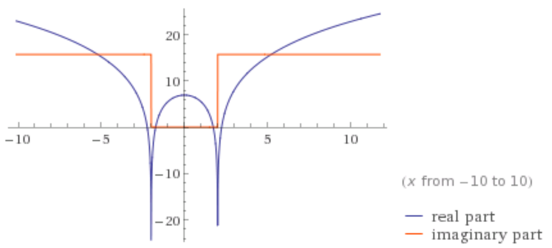
$$\ln 8 = \frac{1}{2} \cdot 2 + m \Rightarrow m = \ln 8 - 1$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{2}x + \ln 8 - 1$$

c) Se facit.

2327

a)



Funktionen ln x är endast definierad för $x > 0$.

$4 - x^2 > 0$ då $-2 < x < 2$.

b) Se facit.

2337

a) Definitionsmängdens gräns är x = 0.

=>y-axeln är asymptot.

$$f'(x) = 8x - \frac{1}{x^2}$$

$$0 = 8x - \frac{1}{x^2} \Rightarrow 8x = \frac{1}{x^2}$$

$$\Rightarrow x^3 = \frac{1}{8} \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$f''(x) = 8 + \frac{2}{x^3}$$

$$f''(0,5) = 8 + \frac{2}{8} = 8,25$$

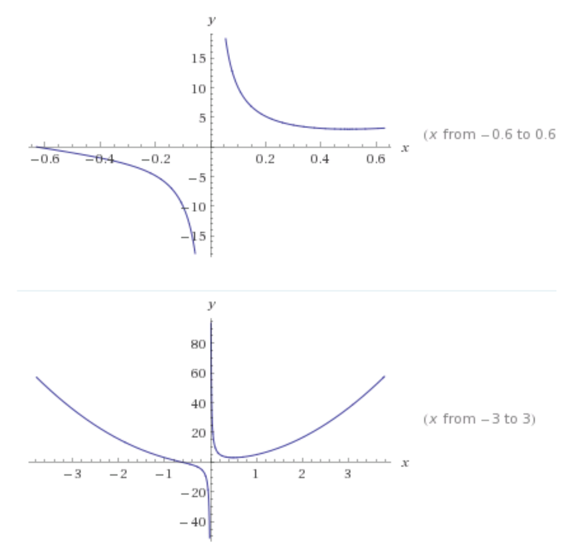
$\Rightarrow$ Lokal minimipunkt

$f(0,5) = 4 \cdot 0,5^2 + \dfrac{1}{0,5} = 3$ => minimipunkt i (0,5; 3).

Värdemängden? Grafisk lösning => värdemängden är alla y.

plot	$y = 4x^2 + \frac{1}{x}$

Plots:



b) Definitionsmängdens gräns är x = 0.

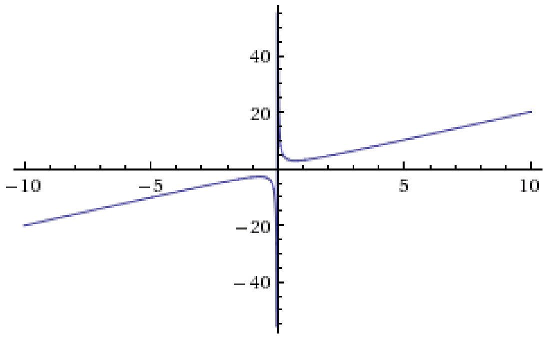
=>y-axeln är asymptot.

Vad händer om $|x| \to \infty$?

Termen $1/x$ går mot noll => $f(x) = 2x$ är också asymptot (fel i facit i första tryckningen).

plot	$\frac{1}{x} + 2x$	$x = -10$ to 10

'lot:



Extrempunkter:

$$f'(x) = 2 - \frac{4}{x^2}$$

$$0 = 2 - \frac{4}{x^2} \Rightarrow$$

$$x^2 = 2$$

$$x = \pm\sqrt{2}$$

Kontrollera andraderivatan för $x = \pm\sqrt{2}$.

Sätt in i funktionen => min- och maxpunkt enligt facit.

Värdemängden: Se facit.

2338

Se facit.

2339

Definitionsmängdens gräns är $x = 0$.

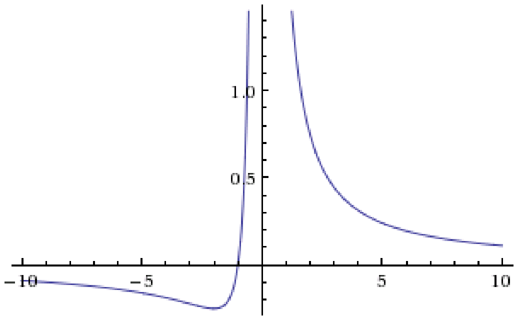
=>*y*-axeln är en asymptot.

Vad händer om $|x| \to \infty$?

Termen $1/x$ går mot noll => $f(x) = 0$, dvs. *x*-axeln är också asymptot.

plot	$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}$	$x = -10$ to 10

Plot:



Sätt derivatan = 0 för att få fram extrempunkt. Kontrollera max eller min med hjälp av andraderivatan.

Värdemängden: Se figur ovan.

2340

Derivera. Sätt $t = x^2$.

$$3x^2 - 15 + \frac{12}{x^2} = 0$$

$$\Rightarrow$$

$$3t^2 - 15t + 12 = 0$$

$$t^2 - 5t + 4 = 0$$

$$t = 2{,}5 \pm \sqrt{6{,}25 - 4}$$

$$t_1 = 1; \quad t_1 = 4$$

$$x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

Sätt andraderivatan = 0:

$$6x - \frac{24}{x^3} = 0$$

Sätt in 1, –1, 2 och -2:

$x = 1 \Rightarrow f''(x)$ negativ => max

$x = -1 \Rightarrow f''(x)$ positiv => min

$x = 2 \Rightarrow f''(x)$ positiv =>min

$x = -2 \Rightarrow f''(x)$ negativ =>max

Sätt in 1, –1, 2 och -2 i ursprunglig ekvation:

=>

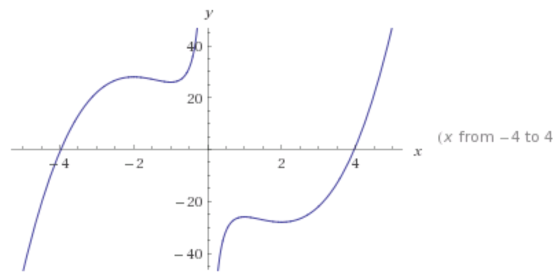
maximipunkter: (1, –26) och (-2; 28)

minimipunkter: (-1; 26) och (2, –28)

b)

plot	$y = x^3 - 15\,x - \frac{12}{x}$

Plots:



Se kommentar i facit.

2341

$$g'(t) = \frac{2}{5}t^{-\frac{3}{5}} + \frac{2}{5}$$

$$\frac{2}{5}\left(t^{-\frac{3}{5}} + 1\right) = 0$$

$$t^{-\frac{3}{5}} = -1$$

$$t = (-1)^{-\frac{5}{3}} = -1$$

Andraderivatan?

$$g''(t) = -\frac{6}{25}t^{-\frac{8}{5}} \quad \text{negativ=> max}$$

$$g(-1) = (-1)^{\frac{2}{5}} + \frac{2}{5}(-1) = 0{,}6$$

=> maximipunkt i (–1; 0,6)

Se även kommentar i facit.

2347

Sätt $f'(x) = 1 \cdot \sin x + x \cos x = 0$

$x = -\tan x$

Ej definierad då cos x = 0, dvs. då

$$x = \pm\frac{\pi}{2} + n \cdot \pi$$

Lös ekvationen:

solve	$x = -\tan(x)$

esults:

$x \approx \pm 7.97866571241324\ldots$

$x \approx \pm 4.91318043943488\ldots$

$x \approx \pm 2.02875783811043\ldots$

$x = 0$

Extrempunkter då

$x = 0,\ x = 2{,}028$ och $x = 4{,}913$

Sätt in i ursprunglig ekvation:

$x = 0 \Rightarrow f(x) = 0$

$x = 2{,}028 \Rightarrow f(x) = 1{,}82$

$x = 4{,}913 \Rightarrow f(x) = -4{,}81$

=> –4,81 < $f(x)$ < 1,82

2348

Se facit.

2349

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x^2+3) - x(2x)}{(x^2+3)^2} =$$

$$= \frac{x^2+3-2x^2}{(x^2+3)^2} = \frac{-x^2+3}{(x^2+3)^2} =$$

$$= \frac{-(x^2-3)}{(x^2+3)^2} = 0$$

=>

$x^2 = 3$

$x = \pm\sqrt{3} \quad \Rightarrow y = \pm\frac{\sqrt{3}}{6}$

Kontrollera andraderivatan =>

$\left(\sqrt{3};\ \frac{\sqrt{3}}{6}\right)$ maximipunkt

$\left(-\sqrt{3};\ -\frac{\sqrt{3}}{6}\right)$ minimipunkt

2350

a) Se facit.

b)

$$A' = -3x^2 \ln x - x^2 = 0$$

$$-x^2(3\ln x + 1) = 0$$

$$\ln x = -\frac{1}{3} \Rightarrow x = e^{-\frac{1}{3}}$$

$(x = 0$ ger ej max area)

c)

$$A_{\max} \text{ då } x = e^{-\frac{1}{3}}$$

$$A_{\max} = xy = e^{-\frac{1}{3}} \cdot (-e^{-\frac{1}{3}})^2 \cdot \ln e^{-\frac{1}{3}} \text{ a.e} =$$

$$= e^{-\frac{1}{3}} \cdot (-e^{-\frac{1}{3}})^2 \cdot (-\frac{1}{3}) \text{ a.e} = \frac{1}{3e} \text{a.e}$$

2351

Antag plåt med $A = 2r \cdot \pi \cdot h + 2r^2\pi$, dvs. mantelarean hos en cylinder.

$$\Rightarrow h = \frac{6 - 2r^2\pi}{2r\pi}$$

Sätt in detta i formeln för *V*:

$$V = r^2\pi h = r^2\pi \frac{6 - 2r^2\pi}{2r\pi} =$$

$$= r(3 - r^2\pi) = 3r - r^3\pi$$

Sätt

$$V'(r) = 3 - 3\pi r^2 = 0 \Rightarrow r = \pm\sqrt{\frac{3}{3\pi}}$$

$$\Rightarrow V_{\max} = 3r - r^3\pi =$$

$$= 3\sqrt{\frac{3}{3\pi}} - \sqrt{\frac{3}{3\pi}} \cdot \frac{3}{3\pi}\pi \text{ dm}^3 =$$

$$= 3\sqrt{\frac{1}{\pi}} - \sqrt{\frac{1}{\pi}} \text{ dm}^3 = 2\sqrt{\frac{1}{\pi}} \text{ dm}^3$$

2352

a)

$$s'(\alpha) = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha = \frac{2v_0^2}{g}\cos 2\alpha = 0$$

$$\Rightarrow \cos 2\alpha = 0$$

$$2\alpha = \frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$$

b) $s = \frac{30^2}{9{,}82} \cdot \sin 90° = 92 \text{ m}$

2353

Se facit.

2354

a) Se facit.

b)

$$A'(x) = 4 \cdot (25 - x^2)^{0{,}5} + 4x \cdot 0{,}5 \cdot (25 - x^2)^{-0{,}5} \cdot (-2x)$$

Sätt

$$4\left(25 - x^2\right)^{0{,}5} - \frac{4x^2}{\left(25 - x^2\right)^{0{,}5}} = 0$$

$$\frac{4\left(25 - x^2\right)}{\left(25 - x^2\right)^{0{,}5}} - \frac{4x^2}{\left(25 - x^2\right)^{0{,}5}} = 0$$

$$\frac{4\left(25-x^2\right)-4x^2}{\left(25-x^2\right)^{0,5}}=0 \quad \Rightarrow$$

$$4\left(25-x^2\right)-4x^2=0$$

$$100-4x^2-4x^2=0 \Rightarrow x^2=\frac{100}{8}=\frac{25}{2}$$

$$\Rightarrow x=\pm\frac{5}{\sqrt{2}}$$

2355

a)

$$g'(t)=-8\sin\left(\frac{\pi(360-t)}{180}\right)\cdot(-\frac{\pi}{180})=$$

$$=22,5\pi\sin\left(\frac{\pi(360-t)}{180}\right)=0$$

$$\left(\frac{\pi(360-t)}{180}\right)=0+n\cdot 2\pi$$

$$2\pi-\frac{\pi t}{180}=n\cdot 2\pi$$

$$1-\frac{t}{360}=n$$

$$t=(1-n)\cdot 360$$

b)

$$g'(t)=22,5\pi\sin\left(\frac{\pi(360-t)}{180}\right)$$

$$g''(t)=22,5\pi\cos\left(\frac{\pi(360-t)}{180}\right)\cdot(-\frac{\pi}{180})$$

=>

$$\sin\left(\frac{\pi(360-t)}{180}\right)=-\frac{\pi}{180}\cos\left(\frac{\pi(360-t)}{180}\right)$$

$$\tan\left(\frac{\pi(360-t)}{180}\right)=-\frac{\pi}{180}$$

$$\frac{\pi(360-t)}{180}=-0,017+n\cdot\pi$$

$$360-t=\frac{-0,017\cdot 180}{\pi}+n\cdot 180$$

$$en\ lösning => t\approx 361$$

2360

$$y=\frac{1}{20}\cdot x^2$$

$$\frac{dy}{dt}=\frac{1}{20}\cdot 2x\cdot\frac{dx}{dt}$$

$$3=\frac{1}{20}\cdot 2x\cdot 8 \ => x=3,75$$

2361

$$V=\frac{\pi r^2 h}{3}$$

Både *h* och *r* beroende av *t*. Uttryck *r* i *h*.

$$\frac{r}{h}=\tan 30° \ => r=\frac{h}{\sqrt{3}}$$

$$V=\frac{\pi h}{3}\cdot\frac{h^2}{3}=\frac{\pi h^3}{9}$$

$$\frac{dV}{dt}=\frac{\pi h^2}{3}\cdot\frac{dh}{dt}$$

=>

$$\frac{dh}{dt}=\frac{2\cdot 3}{\pi\cdot 8^2}\frac{\text{liter/min}}{\text{dm}^2}\approx$$

$$\approx 0,03 \text{ dm/min} = 3 \text{ mm/min}$$

Minustecken i facit eftersom vattendjupet minskar.

2362

$$V=\frac{4\pi r^3}{3};\ A=4\pi r^2$$

$$\frac{dA}{dt}=\frac{dA}{dr}\cdot\frac{dr}{dt}=4\pi\cdot 2r\cdot\frac{dr}{dt}$$

=>

$$\frac{dr}{dt}=\frac{28 \text{ cm}^2/\text{min}}{8\pi\cdot 6,5 \text{ cm}}\approx 0,17 \text{ cm/min}$$

$$\frac{dV}{dt}=\frac{dV}{dr}\cdot\frac{dr}{dt}=$$

$$4\pi\cdot 6,5^2\cdot 0,17 \text{ cm}^3/\text{min}=91 \text{ cm}^3/\text{min}$$

2363

Kalla horisontell katet för *x*.

$r = \sqrt{10^2 + x^2}$

$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$ där $\frac{dx}{dt}$ är givet.

$\frac{dr}{dx} = \frac{1}{2}(10^2 + x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{10^2 + x^2}}$

Uttryck *x* i *r* =>

$r^2 = 10^2 + x^2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{r^2 - 10^2}$ =>

$\frac{dr}{dx} = \frac{\sqrt{20^2 - 100}}{\sqrt{100 + 20^2 - 100}} = \frac{\sqrt{300}}{20} \approx 0,866$

=> $\frac{dr}{dt} \approx 0,866 \cdot 900 \text{ km/h} \approx 780 \text{ km/h}$

2364-2365

Se facit.

Kapitel 3

3111
Utnyttja tabell s143. Glöm inte att "kompensera" för inre derivata.

a) $F(x) = -\frac{8}{\pi}\cos(\pi x)$

b) $F(x) = \frac{3}{2\pi}\sin(2\pi x)$

3112
a)

$$f(x) = 5x - 10e^x$$
$$F(x) = \frac{5}{2}x^2 - 10e^x + C =$$
$$= \frac{5}{2}(x^2 - 4e^x)$$

b)

$$f(v) = \frac{2}{v} + e^v$$
$$F(v) = 2\ln v + e^v + C$$

c)

$$f(z) = 1 + \frac{1}{z^2}$$
$$F(z) = z - \frac{1}{z} + C$$

3113-3114
Se facit.

3115
a)

$$f(x) = \frac{1}{k}\cdot\frac{1}{x}$$
$$F(x) = \frac{1}{k}\cdot\ln x$$

b) $F(x) = k\cdot\ln x$

3116
a)

$$f(x) = (e^{\ln 5})^{3x} = e^{\ln 5\cdot 3x}$$
$$F(x) = \frac{1}{3\cdot\ln 5}\cdot e^{\ln 5\cdot 3x} + C = \frac{5^{3x}}{3\cdot\ln 5} + C$$

b)

$$f(x) = (e^{\ln a})^{kx} = e^{\ln a\cdot kx}$$
$$F(x) = \frac{1}{k\cdot\ln a}\cdot e^{\ln a\cdot kx} + C = \frac{a^{kx}}{k\cdot\ln a} + C$$

3117
Kurvan avtar fram till *x* = 3 => $f'(x)$ är negativ fram till *x* = 3 och därefter positiv, då kurvan är växande.

Eftersom *f*(*x*) är positiv i hela intervallet kommer den primitiva funktionen *F*(*x*) att vara växande i hela intervallet, bortsett från en terrasspunkt i *x* = 0.

Se kurvor i facit.

3118
Se facit.

3122 och 3124
Se facit.

3125
a)

$$s'(1) = 3\cos 0{,}2\pi\cdot 1 \text{ m/s} =$$
$$= 3\cos\frac{\pi}{5}\text{ m/s} \approx 2{,}4 \text{ m/s}$$

b)

$$s(t) = \frac{15}{\pi}\sin 0{,}2\pi t + C$$
$$s(0) = 0 + C \;\; => C = 0$$

c)

$$s(1)=\frac{15}{\pi}\sin 0,2\pi \text{ m} \approx 2,8 \text{ m}$$

3126

$$F(t)=2t^3-\frac{\ln t}{2}+C$$
$$F(1)=2\cdot 1^3-\frac{\ln 1}{2}+C=9$$
$$=> C=7$$

3127

$$F(x)=-\frac{a}{3}\cos 3x+C$$

Ekvationssystem:

$$\begin{cases}-\frac{a}{3}\cos\frac{\pi}{2}+C=5\\ -\frac{a}{3}\cos\pi+C=10\end{cases}$$

$$\begin{cases}C=5\\ \frac{a}{3}+C=10\end{cases}$$
$$=> a=15$$

$$F(\frac{\pi}{9})=-\frac{15}{3}\cos 3\cdot\frac{\pi}{9}+5=$$
$$=-5\cos\frac{\pi}{3}+5=-\frac{5}{2}+5=2,5$$

3128

$$xy'=2x^2+1$$
$$y'=2x+\frac{1}{x}$$
$$y=x^2+\ln x+C$$
$$y(1)=1^2+\ln 1+C=0$$
$$=> C=-1$$

3129-3130

Se facit.

3144

$$y'=1\cdot(\ln x-1)+x\cdot\frac{1}{x}=$$
$$=\ln x-1+1=\ln x$$

Jämför med:

$$y'=\frac{y}{x}+1=\frac{x(\ln x-1)}{x}+1=$$
$$=\ln x-1+1=\ln x$$

3145

$$y=\frac{5}{2}x^2-3e^{2x}+C$$
$$1=\frac{5}{2}\cdot 0^2-3e^{2\cdot 0}+C$$
$$=> C=4$$

3146

$$y(0)=10$$
$$=> 10=0+B\cdot 1 => B=10$$
$$y'=2A\cos 2x-2B\sin 2x$$
$$y'(0)=30=2A\cdot 1 => A=15$$

3147

a)

$$y'=6x^2-2x+C$$
$$y=2x^3-x^2+Cx+D$$

b)

$$y'(2)=0=6\cdot 2^2-2\cdot 2+C$$
$$=> C=-20$$
$$=> D=28$$

c)

$$\begin{cases}3=2\cdot 1^3-1^2+C\cdot 1+D\\ 20=2\cdot 2^3-2^2+C\cdot 2+D\end{cases}$$
$$=> C=6 \text{ och } D=-4$$

3148

Se facit.

3149-3150

Se facit.

3151

$y' = 2ax$
$y'' = 2a$

In i given ekvation:

$$2a + 2ax + ax^2 + 4 = x^2 + 2x + 6$$
$$a(2 + 2x + x^2) + 4 = x^2 + 2x + 6$$
$$a = \frac{x^2 + 2x + 2}{2 + 2x + x^2} = 1$$

3152

Se facit.

3209

a)

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x)dx = \left[\sin x + \cos x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} =$$
$$= \sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4} - (\sin 0 + \cos 0) =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - 0 - 1 = \frac{2}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} =$$
$$= \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \approx 0,4 \text{ a.e}$$

b) Var skär kurvorna varandra? sin och cos är fasförskjutna $\frac{\pi}{2}$ och lika då $\frac{\pi}{4} + n\cdot\pi$.

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (\sin x - \cos x)dx = \left[-\cos x - \sin x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} =$$
$$= -\cos\frac{5\pi}{4} - \sin\frac{5\pi}{4} - (-\cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{4}) =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} \approx 2,8 \text{ a.e}$$

3210

$$\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \left[2x^{\frac{1}{2}}\right]_1^4 = 2\cdot\sqrt{4} - 2\cdot\sqrt{1} =$$
$$= 4 - 2 = 2$$

Se kommentar facit.

3211

a) Sätt $\sqrt{x} = x \;\; \Rightarrow x = 1$

$$\ldots = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

b)

$$2,5 - x = \frac{1}{x}$$
$$2,5x - x^2 = 1$$
$$x^2 - 2,5x + 1 = 0$$
$$x = 1,25 \pm \sqrt{\frac{25}{16} - 1}$$
$$x_1 = 0,5; \quad x_2 = 2$$

=>

$$\ldots = \left[2,5x - \frac{x^2}{2} - \ln x\right]_{0,5}^2 =$$
$$= 2,5\cdot 2 - \frac{2^2}{2} - \ln 2 -$$
$$-(2,5\cdot 0,5 - \frac{0,5^2}{2} - \ln 0,5) \text{ a.e} =$$
$$= 3 - \ln 2 - 1,25 + 0,125 + \ln 0,5 \text{ a.e} =$$
$$= 1,875 - \ln 2 + \ln 0,5 \text{ a.e} \approx 0,5 \text{ a.e}$$

3212

$$\cos 4x = \frac{1}{2}$$
$$4x = \frac{\pi}{3} + n\cdot\pi$$
$$x = \frac{\pi}{12} + n\cdot\frac{\pi}{4}$$

=>

$$\ldots\left[\frac{1}{2}\sin 4x - x\right]_0^{\frac{\pi}{12}} =$$

$$\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{12}\text{ a.e} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{12}\text{a.e} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{12}\text{ a.e}$$

3213-3215

Se facit.

3216

$$\int_b^e \frac{5}{x}dx = \left[5\ln x\right]_b^e =$$

$$= 5(\ln e - \ln b) =$$

$$= 5 - 5\ln b = 3\text{ a.e}$$

$$=> \frac{2}{5} = \ln b$$

$$=> b = e^{\frac{2}{5}}$$

3217

Se facit.

3218

$$ax - bx^2 = 0$$

$$bx^2 - ax = 0$$

$$x(bx - a) = 0$$

$$=> x = 0 \text{ och } x = \frac{a}{b}$$

$$\int_0^{\frac{a}{b}} ax - bx^2 dx = \left[\frac{a}{2}x^2 - \frac{b}{3}x^3\right]_0^{\frac{a}{b}} =$$

$$= \frac{a}{2}\left(\frac{a}{b}\right)^2 - \frac{b}{3}\left(\frac{a}{b}\right)^3 =$$

$$= \frac{a^3}{2b^2} - \frac{b}{3}\cdot\frac{a^3}{b^3} = \frac{a^3}{2b^2} - \frac{a^3}{3b^2} =$$

$$= \frac{3a^3}{6b^2} - \frac{2a^3}{6b^2} = \frac{a^3}{6b^2}$$

3219

Se facit.

3224

Se facit.

3227

$$\frac{1}{24-0}\int_0^{24}(5\sin(0,3\text{x} - 4) + 8)dx =$$

$$\frac{1}{24}\left[-\frac{5}{0,3}\cos(0,3x - 4) + 8x\right]_0^{24} dx =$$

$$= \frac{1}{24}(-\frac{5}{0,3}\cos(0,3\cdot 24 - 4) + 8\cdot 24 +$$

$$\frac{5}{0,3}\cos(0,3\cdot 0 - 4)) =$$

$$= -\frac{5}{7,2}\cos(3,2) + 8 + \frac{5}{7,2}\cos(-4)) \approx 8,2\ ^\circ\text{C}$$

3228

$$\int_0^8 240\sin\frac{\pi x}{12} + 400\, dx =$$

$$= \left[\frac{-240\cdot 12}{\pi}\cos\frac{\pi x}{12} + 400x\right]_0^8 =$$

$$= \frac{-240\cdot 12}{\pi}\cos\frac{\pi\cdot 8}{12} + 400\cdot 8$$

$$+ \frac{240\cdot 12}{\pi}\cos 0)\ \text{m}^3/\text{min} \approx 4\,600\ \text{m}^3/\text{min}$$

3229

a)

$$v'(t) = -0,32\cdot 1,4\sin 1,4t = 0$$

$$=> \sin 1,4t = 0\ \ => 1,4t = 0 + n\cdot 2\pi$$

$$t \approx 0 + n\cdot 4,49$$

$$=> v_{\text{max}} = 0,32\cos 0\text{ m/s} = 0,32\text{ m/s}$$

b) Repetera ev. kap 1, t.ex. s16.

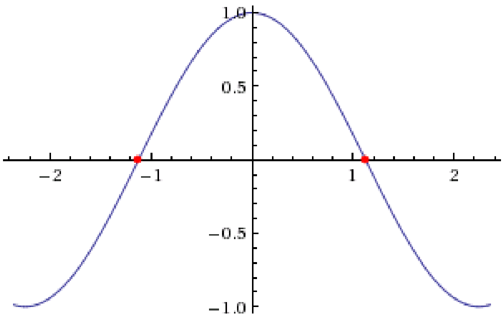
$$\text{Perioden} = \frac{2\pi}{1,4}$$

c) Vändlägen då $v(t) = 0$.

$$=> \cos 1,4t = 0$$

$$1,4t = \pm\frac{\pi}{2} + \frac{n\cdot 2\pi}{1,4}$$

Skiss cos(1,4*t*).



$=>$ integrationsgränserna:

$t_1 = -\dfrac{\pi}{2,8} \approx -1,12$

$t_2 = +\dfrac{\pi}{2,8} \approx 1,12$

$$s(t) = 0,32 \int_{-1,12}^{1,12} \cos 1,4t \, dt =$$

$$= 0,32 \left[\frac{1}{1,4} \sin 1,4t \right]_{-1,12}^{1,12} =$$

$$= \frac{0,32}{1,4} (\sin(1,4 \cdot 1,12) - \sin(1,4 \cdot (-1,12)) \text{ m} \approx$$

$$\approx \frac{0,32}{1,4} \cdot 2 \text{ m} \approx 0,46 \text{ m}$$

3230

a)

$$... = \left[-\cos 2x \right]_0^a = -\cos 2a - (-\cos 0) = 0$$

$=> \cos 2a = 1$

$2a = \pm \arccos 1 + n \cdot 2\pi$

$2a = n \cdot 2\pi \; => a = \pi$

b)

$$... = \left[-\cos 2x \right]_0^a = -\cos 2a - (-\cos 0) = 1$$

$=> \cos 2a = 0$

$2a = \pm \arccos 0 + n \cdot 2\pi$

$2a = \pm \dfrac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi$

$a = \pm \dfrac{\pi}{4} + n \cdot \pi$

$=> a = \dfrac{\pi}{4}; \; a = \dfrac{3\pi}{4}$

3231

$\text{Perioden} = \dfrac{2\pi}{3} => a = 0 \text{ och } b = \dfrac{2\pi}{3}$

$f'(x) = 6\cos 3x$

Integralen beräknas med hjälp av digitalt hjälpmedel:

$$s = \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \sqrt{1 + (f'(x))^2} \, dx = \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \sqrt{1 + (6\cos 3x)^2} \, dx \approx 8,4 \text{ l.e.}$$

3232

Se facit.

3237

$x^2 - bx - a = 0$

$x = 0 => g(x) = 0 => a = 0$

$x^2 - bx - a = 0$

$x = 4 => g(x) = 0 + 4b - 4^2 = 0$

$=> b = 4$

$$\int_0^4 4x - x^2 dx = \left[2x^2 - \frac{1}{3} x^3 \right]_0^4 =$$

$$= \frac{96}{3} - \frac{64}{3} \text{ a.e} = \frac{32}{3} \text{ a.e}$$

3238

$f(-1) = e^{-1} \approx 0,37$

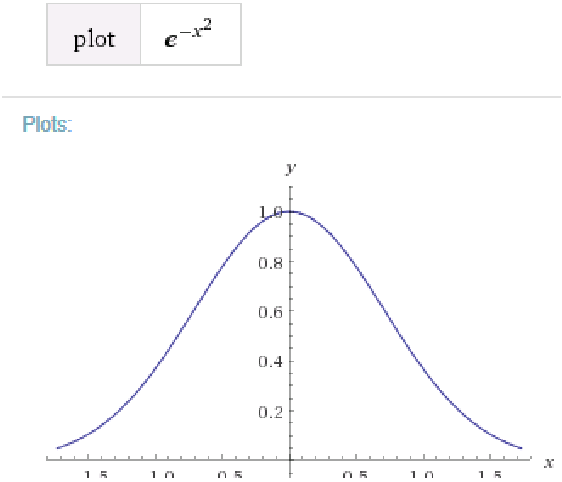
$f(-0,5) = e^{-0,25} \approx 0,79$

$f(0) = 1$

$f(0,5) = e^{-0,25}$

$f(1) = e^{-1}$

Kurvan symmetrisk runt $x = 0$.



$$A_1 = \frac{0,5(1+0,79)}{2} \text{ a.e}$$
$$A_2 = \frac{0,5(0,79+0,37)}{2} \text{ a.e}$$
$$A_{tot} = 2\cdot(A_1 + A_2) \approx 1,5 \text{ a.e}$$

3239

Se facit.

3240

Intervallet *a* till *b* delas in i *n* trapetser.

=> Se facit.

3242

Se facit.

3245

a)

$$\int_0^{58} \frac{1}{5\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-70}{5}\right)^2} dx = 0,8\ \%$$

b)

$$860 \cdot \int_{76}^{\infty} \frac{1}{5\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-70}{5}\right)^2} dx \approx 100 \text{ st}$$

c)

$$860 \cdot \int_{59}^{71} \frac{1}{5\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-70}{5}\right)^2} dx \approx 500 \text{ st}$$

3246

$$100\,000 \cdot \int_{140}^{\infty} \frac{1}{15\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-100}{15}\right)^2} dx \approx 380 \text{ st}$$

3249

a) Se facit.

b) $\int_0^1 0,2\cdot e^{-0,2\cdot x} dx = 0,18 \quad Ja$

c) $\int_2^3 0,2\cdot e^{-0,2\cdot x} dx = 0,12$

d) Se facit.

3250

a)

$$\int_0^x 0,01\cdot e^{-0,01\cdot x} dx =$$
$$= \left[-e^{-0,01\cdot x}\right]_0^x =$$
$$= -e^{-0,01\cdot x} - 0 = 0,5$$
$$\Rightarrow -0,01x = \ln 0,5$$
$$\Rightarrow x \approx 69 \text{ min}$$

b) $T_{1/2} = \frac{\ln 2}{0,01} \Rightarrow \text{samma svar}$

3309

$$\pi \int_0^1 (e^{0,5x})^2 dx = \pi\left[e^x\right]_0^1 =$$
$$= \pi(e-1) \text{ v.e} \approx 5,4 \text{ v.e}$$

3310

a)

$$4x - x^2 = 3 \Rightarrow x_1 = 1;\ x_2 = 3$$

$$\pi\int_1^3 (4x-x^2)^2dx-\pi\int_1^3 3^2dx=$$

$$=\pi\int_1^3 (16x^2-4x^3+x^4-4x^3-3^2)dx=$$

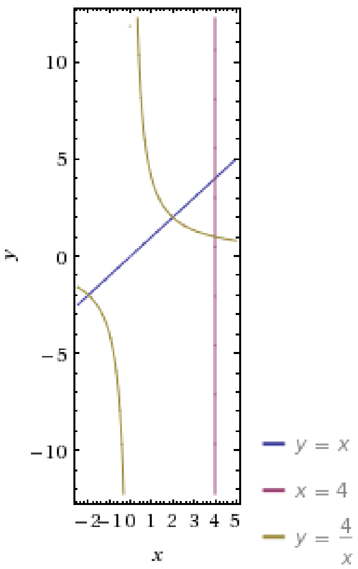
$$=\pi\left[\frac{16}{3}x^3-2x^4+\frac{1}{5}x^5-9x\right]_1^3=$$

$$=\pi(\frac{16}{3}3^3-2\cdot 3^4+\frac{1}{5}3^5-27-$$

$$-\frac{16}{3}+2-\frac{1}{5}+9)\text{ v.e}\approx 28,5\text{ v.e}$$

b) Kurvan $y=\frac{4}{x}$ ej def för $x = 0$.

Undre gräns: $\frac{4}{x}=x \quad => x=2$



$$\pi\int_2^4 x^2\,dx-\pi\int_2^4\frac{16}{x^2}dx=$$

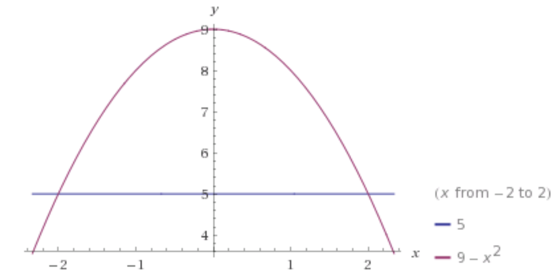
$$=\pi\int_2^4 x^2-\frac{16}{x^2})dx=$$

$$=\pi\left[\frac{1}{3}x^3-(-\frac{16}{x})\right]_2^4=$$

$$=\pi(\frac{1}{3}\cdot 64+4-\frac{1}{3}\cdot 8-8)\approx 46\,\text{v.e}$$

3311

Plot:



$$9-x^2=5$$

$$=> x_{1,2}=\pm 2$$

$$\pi\int_{-2}^2 ((9-x^2)^2-5^2)dx=$$

$$=\pi\int_{-2}^2 (81-9x^2-9x^2+x^4-5^2)dx=$$

$$=\pi\int_{-2}^2 (56-18x^2+x^4)dx=$$

$$=\pi\left[56x-6x^3+\frac{x^5}{5}\right]_{-2}^2\approx 442\text{ v.e}$$

3312

a)

$$...=\pi\left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^a=$$

$$=\frac{\pi}{2}(e^{2a}-1)=\pi\text{ v.e}$$

$$=> 3=e^{2a}$$

$$a=\frac{\ln(3)}{2}=0,549$$

b)

$$...=\pi\left[-4e^{-x}\right]_1^a=$$

$$=\pi(-4e^{-a}+4e^{-1})=\pi\text{ v.e}$$

$$=> 1=4(e^{-1}-e^{-a})$$

$$\ln e^{-a}=\ln(e^{-1}-\frac{1}{4})$$

$$a=2,14$$

3113

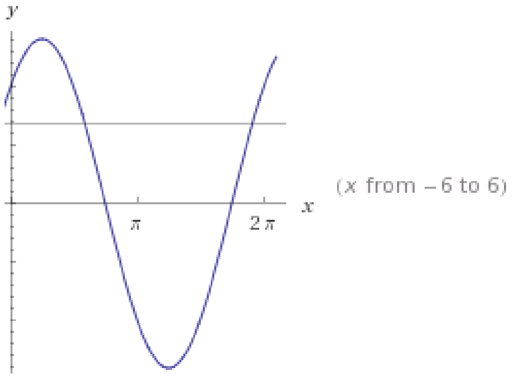
$$\pi\int_0^{\pi}(2\sin x)^2dx=\pi\int_0^{\pi}4\sin^2 x\,dx=$$

$$=\pi\int_0^{\pi}2(2\sin^2 x)\,dx=2\pi\int_0^{\pi}(1-\cos 2x)\,dx$$

$$=2\pi\left[x-\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\pi}=$$

$$=2\pi(\pi-\frac{1}{2}\sin 2\pi)=2\pi^2$$

3314



Lös ekvationen: $\cos x+\sin x=0$

=> $x=2,356$

$$\pi\int_0^{2,356}(\cos x+\sin x)^2dx=$$

$$=\pi\int_0^{2,356}(\cos^2 x+2\cos x\sin x+\sin^2 x)\,dx=$$

$$=\pi\int_0^{2,356}(1+2\cos x\sin x)\,dx=$$

$$=\pi\int_0^{2,356}(1+\sin 2x)\,dx=$$

$$=\pi\left[x-\frac{1}{2}\cos 2x\right]_0^{2,356}=$$

$$=\pi(2,356-\frac{1}{2}\cos(2\cdot 2,356)+\frac{1}{2})=$$

$$=8,98\text{ v.e}$$

3315

Se facit.

3319

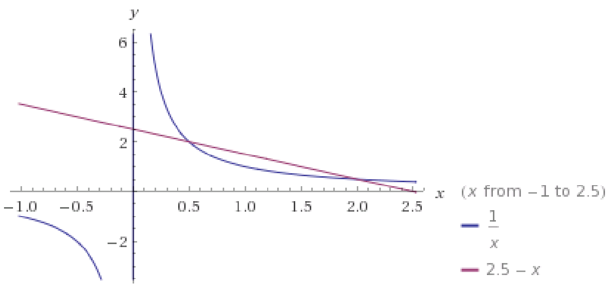
$y=\ln x$

$x=e^y$

$$V=\pi\int_0^2 x^2dy=\pi\int_0^2 e^{2y}dy=$$

$$=\pi\left[\frac{1}{2}e^{2y}\right]_0^2=\pi(\frac{1}{2}e^4-\frac{1}{2})\text{ v.e}$$

3320



$$\frac{1}{x}=2,5-x$$

$$x^2-2,5x+1=0$$

$$x_1=0,5,\quad x_2=2$$

a)

$$V=\pi\int_{0,5}^{2}(2,5-x)^2dx-$$

$$-\pi\int_{0,5}^{2}(\frac{1}{x})^2dx=$$

$$=\pi\int_{0,5}^{2}6,25-5x+x^2-\frac{1}{x^2}dx=$$

$$=\pi\left[6,25x-\frac{5}{2}x^2+\frac{x^3}{3}+x^{-1}\right]_{0,5}^{2}=$$

$$=\pi(6,25\cdot 2-\frac{5}{2}2^2+\frac{2^3}{3}+\frac{1}{2}$$

$$-(6,25\cdot 0,5-\frac{5}{2}0,5^2+\frac{0,5^3}{3}+2)=$$

$$=\pi(12,5-10+\frac{8}{3}+\frac{1}{2}-3,125+\frac{5}{8}$$

$$-\frac{0,125}{3}-2)=1,125\pi$$

b)

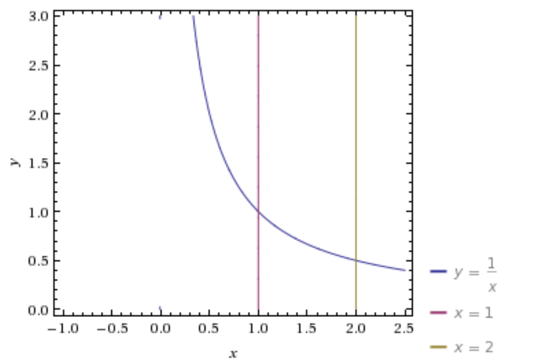
$$x=\frac{1}{y};\ x=2{,}5-y \Rightarrow$$

$$\pi\int_{0,5}^{2}(2{,}5-y)^2dy-$$

$$-\pi\int_{0,5}^{2}(\frac{1}{y})^2dy=\ldots..=1{,}125\pi$$

3321

Implicit plot:



$$x=1 \Rightarrow y=1$$

$$x=2 \Rightarrow y=\frac{1}{2}$$

Dela upp i två areor och "dra bort hålet".

$$\pi\int_{0,5}^{1}\frac{1}{y^2}dy-\pi\int_{0,5}^{1}1^2dy+$$

$$\pi\int_{0}^{0,5}2^2\,dy-\pi\int_{0}^{0,5}1^2dy=$$

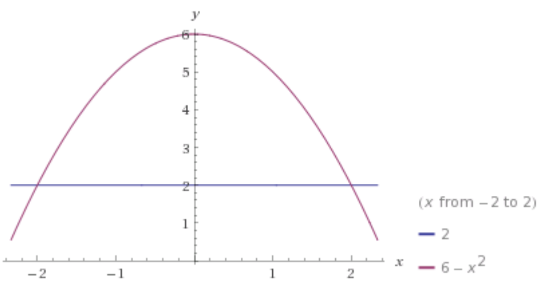
$$=\pi\left[-y^{-1}-y\right]_{0,5}^{1}+\pi\left[4y-y\right]_{0,5}^{1}=$$

$$=\pi(-1-1+2+0{,}5)+$$

$$+\pi(4-1-2+0{,}5)\ \text{v.e}=2\pi\ \text{v.e}$$

3322

Plot:

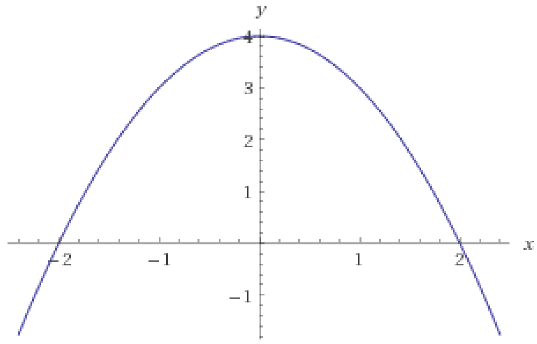


$$\text{A}: V=\pi\int_0^6(6-y)dy-\pi\int_0^2(6-y)dy\ =$$

$$=\pi\left[6y-\frac{y^2}{2}\right]_0^6-\pi\left[6y-\frac{y^2}{2}\right]_0^2=$$

$$=\pi(36-18-0-(12-2))\ \text{v.e}=8\pi\ \text{v.e}$$

B: Förskjutning av kurvan 2 steg i *y*-led ger $y=4-x^2$.



Kurvan symmetrisk =>

$$V=2\cdot\pi\int_0^2(4-x^2)^2\,dx=$$

$$=2\pi\int_0^2(16-8x^2+x^4)\,dx=$$

$$=2\pi\left[16x-\frac{8}{3}x^3+\frac{x^5}{5}\right]_0^2=$$

$$=2\pi(32-\frac{64}{3}+\frac{32}{5}-0)\ \text{v.e}=$$

$$=2\cdot32\pi\,(1-\frac{2}{3}+\frac{1}{5})\,\text{v.e}=$$

$$64\pi\,(\frac{15}{15}-\frac{10}{15}+\frac{3}{15})\,\text{v.e}=$$

$$=64\pi\cdot\frac{8}{15}\,\text{v.e}$$

=>Förhållandet mellan det två rotationskropparnas volymer

$$=\frac{64\cdot8\pi}{15}\Big/8\pi=\frac{64}{15}$$

Kapitel 4

4109

$|z| = \sqrt{50};\ |u| = \sqrt{61}$

$|v| = \sqrt{50};\ |w| = \sqrt{64}$

$=> w$

4110

a)

$|z| = \sqrt{a^2 + 36}$

$|\overline{z}| = \sqrt{a^2 + 36}$

$=>$ sant

b) $a + 6i - (a - 6i) = 12i =>$ falskt

c) $\text{Im}\, z = 6;\ \text{Im}\, \overline{z} = -6 =>$ sant

d) $\frac{6}{6} = 1$

4111

Se facit.

4125

a)

$\frac{(3+4i)(6+8\text{i})}{(6-8i)(6+8\text{i})} = \frac{18+48i-32}{36+64} =$

$= \frac{-14+48i}{100} = -0{,}14 + 0{,}48i$

b) $|z| = \sqrt{9+16} = 5$

$|w| = \sqrt{36+64} = 10$

$=> \left|\frac{z}{w}\right| = 0{,}5$

c) Se facit.

4126

a) $... = 3 - 8 = -5$

b) $... = -2 + 3 = 1$

c) $... = 3 - 8 = -5$

d)

$|\overline{z}_1| = 3 + 2i;\ |\overline{z}_2| = -8 - 3i$

$... = 2 - 3 = -1$

4127

$z = 25 - i^2 + 5i - (9 + 6i + i^2) =$

$= 25 + 1 - i - 9 + 1 = 18 - i$

4128

$2 + 3i + 4 - 5i = 6 - 2i$

$=> 6 + 2i$

4129-413

Se facit.

4134

$... = \frac{(5+i)(4+ai)}{(4-ai)(4+ai)} =$

$= \frac{20+5ai+4i+ai^2}{(4-a^2i^2)} =$

$= \frac{20+5ai+4i-a}{(4+a^2)} =$

$\frac{(20-a)+(5a+4)i}{(4+a^2)}$

Reellt om $5a + 4 = 0 => a = -\frac{4}{5}$

4135

$\frac{2(x-i)}{(x+i)(x-i)} = \frac{2x-2i}{x^2+1}$

$\text{Re}\left(\frac{2x-2i}{x^2+1}\right) = \frac{2x}{x^2+1} = 0{,}6$

$2x = 0{,}6x^2 + 0{,}6$

$x^2 - \frac{2}{0{,}6}x + 1 = 0$

$x = \frac{5}{3} \pm \sqrt{\frac{25}{9} - \frac{9}{9}}$

$x_1 = \frac{1}{3};\ x_2 = 3$

4136

Se facit.

4144

a)

$$z=\frac{(3+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=$$

$$=\frac{3+3i+i-1}{1+1}=\frac{2+4i}{2}=1+2i$$

b)

$$z=\frac{1-3i}{i}=\frac{-\mathrm{i}(1-3i)}{i(-i)}=$$

$$=\frac{-3-i}{1}=-3-i$$

4145

a)

$$z(1-2i)=5i$$

$$z(1-2i)=\frac{5i(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)}=$$

$$=\frac{5i-10}{5}=-2+i$$

b)

$$z(2+i)=3-i$$

$$z=\frac{(3-i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}=$$

$$=\frac{6-3i-2i-1}{4+1}=1-i$$

4146

a)

$$z=\frac{20}{3+i}=\frac{20(3-i)}{(3+i)(3-i)}=$$

$$=\frac{60-20i}{9+1}=6-2i$$

b)

$$z(2i+1)=3-4i$$

$$z=\frac{(3-4i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}=$$

$$=\frac{3-6i-4i-8}{1^2-4i^2}=$$

$$=\frac{-5-10i}{5}=-1-2i$$

4147

a)

$$z+i=iz(1+2i)$$

$$z+i=iz-2z$$

$$3z-iz=-i$$

$$z=\frac{-i(3+i)}{(3-i)(3+i)}=$$

$$=\frac{1-3i}{9+1}=0,1-0,3i$$

b)

$$z-i=(2-3i)(z+i)$$

$$z-i=2z+2i-3iz-3i^2$$

$$z-2z+3iz=i+2i+3$$

$$z(-1+3i)=3+3i$$

$$z=\frac{(3+3i)(-1-3i)}{(-1+3i)(-1-3i)}=$$

$$=\frac{(-3-9i-3i+9}{1+9}=0,6-1,2i$$

4148

Se facit.

4149

a)

$$(5+2i)^2-10(5+2i)+a=0$$

$$25+20i-4-50-20i+a=0$$

$$=>a=29$$

b)

$$(i-1)^2-2i(i-1)+a=0$$

$$-1-2i+1+2+2i+a=0$$

$$a=-2$$

4150

$$z = -\frac{ai}{2} \pm \sqrt{-\frac{a^2}{4} + 9} =$$

Dubbelrot om

$$\frac{a^2}{4} = 9 \ \Rightarrow a = \pm 6$$

4151

a)

$$3(a+bi) + a - bi = 1 + 2i$$
$$3a + 3bi + a - bi = 1 + 2i$$
$$4a + 2bi = 1 + 2i$$
$$\Rightarrow a = 0{,}25;\ b = 1$$

b)

$$a + bi + 5(a - bi) = 4 + 4i - 1$$
$$a + bi + 5a - 5bi = 3 + 4i$$
$$\Rightarrow a = 0{,}5;\ b = -1$$

4152

$$a^2 + 2abi - b^2 + a^2 + b^2 = 8 + 16i$$
$$2a^2 + 2abi = 8 + 16i$$
$$\Rightarrow a = 2;\ \Rightarrow b = 4$$
$$\text{eller } \Rightarrow a = -2;\ \Rightarrow b = -4$$

4152-4153

Se facit.

4160

Se exempel s. 204 och figurer i facit.

4161

Rita figur.

$$a + bi = -6 + 2i + 4 + 2i$$
$$\Rightarrow a = -2;\ b = 4i$$

Samt

$$4 + 2i - (-6 + 2i) = 10$$
Eller
$$-6 + 2i - (4 + 2i) = -10$$

4162-4163

Se facit.

4164

$$z = a + 2i$$
$$z^2 = a^2 + 4ai - 4 = (a^2 - 4) + 4ai$$
$$\Rightarrow \operatorname{Re} z^2 = a^2 - 4$$

a^2 alltid positiv $\Rightarrow \operatorname{Re} z^2 \geq -4$

4165

Skissa figur. Avståndet mellan *z* och 2*i* är lika med avståndet mellan *z* och 6*i* =>*z* = 4*i*.

Algebraiskt:

$$a + bi - 2i = a + bi - 6i$$
$$a + (b-2)i = a + (b-6)i$$
$$\Rightarrow$$
$$a^2 + (b-2)^2 = a^2 + (b-6)^2$$
$$a^2 + b^2 - 4b + 4 = a^2 + b^2 - 12b + 36$$
$$8b = 32 \ \Rightarrow b = 4$$

4166

Se facit.

4172

Se facit.

4173

Se exempel s. 208.

$$p(x) = k(x+5)^2(x-1)$$
$$p(2) = 147 \ \Rightarrow k(2+5)^2(2-1) = 147$$
$$\Rightarrow k = 3$$

4174-4175

Se facit.

4176

$P(-2) = -8 - 2k + k^2 = 0$

$k^2 - 2k - 8 = 0$

$k = 1 \pm \sqrt{1+8}$

$k_1 = 4; \quad k_2 = -2$

4177

a)

$p(x) = k(x-2)(x-(2+3i))(x-z)$

Se faktaruta s. 207: Alla….

$=> z = 2 - 3i$

b)

$p(0) = 13$

$$=> k = \frac{13}{-2\cdot(-2-3i)(-2+3i)} =$$

$$= \frac{13}{-2\cdot(4+9)} = -\frac{1}{2}$$

Se vidare lösning i facit.

4181

Se exempel. Ställ upp divisionen på ett sätt som passar dig. T.ex.

$$\begin{array}{l} \qquad x^2 + 2x + 3 \\ \hline x-2 \,|\, x^3 - x - 6 \\ \qquad -(x^3 - 2x^2) \\ \hline \qquad\qquad 2x^2 - x - 6 \\ \qquad\qquad -(2x^2 - 4x) \\ \hline \qquad\qquad\quad 3x - 6 \end{array}$$

4182-4183

Se facit.

4184

Testa om x = 1 är en rot =>Ja.

Utför polynomdivision och se facit.

4189-4192

Se exempel och facit.

4193

Sätt in $z = 2i$ i den givna ekvationen:

$(2i)^3 + a(2i)^2 + b(2i) - 20 = 0$

$-8i - 4a + 2bi - 20 = 0$

$=> b = \frac{8}{2} = 4; \; a = \frac{-20}{4} = -5$

4194

a) Polynomdivisionen $\frac{z^3 + az + a^2}{z+2}$ ger resten $a^2 - 2a - 8$.

Sätt detta uttryck lika med noll och lös ut *a*.

$=> a_1 = 4; \; a_2 = -2$

Alternativ lösning:

Faktorsatsen ger

$p(-2) = 0 \Rightarrow (-2)^3 - 2a + a^2 = 0 \Rightarrow a^2 - 2a - 8 = 0$

Vilket ger $a_1 = 4; a_2 = -2$

b) Se facit.

4208

a)

$\sqrt{a^2 + 3^2} = 5$

$a^2 + 3^2 = 25$

$=> a = \pm 4$

b)

$\arg z = \arcsin\frac{3}{5} = 36{,}9°$

$eller\ 180° - 36{,}9° = 143{,}1°$

4209

Rita figur. => –*v*.

4210

Se facit.

4211

a) Rita figur. Multiplikation med *i* motsvarar 90° vridning: $i(3+4i)=-4+3i$

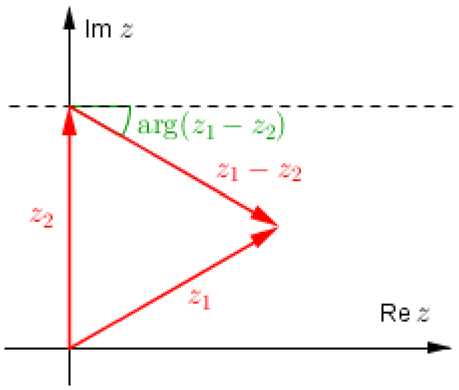
$$A=\frac{b\cdot h}{2}=\frac{\sqrt{3^2+4^2}\cdot\sqrt{(-4)^2+3^2}}{2}=$$
$$=12{,}5 \text{ a.e}$$

b)

$$A=\frac{b\cdot h}{2}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{(-b)^2+a^2}}{2}=$$
$$=\frac{a^2+b^2}{2}$$

4212

Då likheterna $|z_1|=|z_2|=|z_1-z_2|$ gäller bildar de tre komplexa talen inritade som vektorer en liksidig triangel (se figur nedan).



Vinklarna i en liksidig triangel är 60° = $\frac{\pi}{3}$.

arg z_2 = arg z_1 + $\frac{\pi}{3}$ = $\frac{\pi}{6}$ + $\frac{\pi}{3}$ = $\frac{\pi}{2}$ och

arg(z_1-z_2) = $-\frac{\pi}{2}$ + $\frac{\pi}{3}$ = $-\frac{\pi}{6}$.

4219

Se regelrutor s. 220-221.

a) Multiplikation => $z^2=4(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3})$

=>

$$a=r\cdot\cos v=4\cdot\cos\frac{2\pi}{3}=-2$$
$$b=r\cdot\sin v=4\cdot\sin\frac{2\pi}{3}=2\sqrt{3}$$

b) Multiplikation med *i*:

$$iz=2(\cos(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2})+i\sin(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2})) \text{ =>}$$

$$a=r\cdot\cos v=2\cdot\cos\frac{5\pi}{6}=-\sqrt{3}$$
$$b=r\cdot\sin v=2\cdot\sin\frac{5\pi}{6}=1$$

c) Division med *i*:

$$iz=2(\cos(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{2})+i\sin(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{2})) \text{ =>}$$

$$a=r\cdot\cos v=2\cdot\cos\frac{-\pi}{6}=\sqrt{3}$$
$$b=r\cdot\sin v=2\cdot\sin\frac{-\pi}{6}=-1$$

4220

a)

$$\ldots=0{,}5(\cos(-180°)+i\sin(-180°))$$
$$\text{=> } a=-0{,}5;\ b=0 \text{ => } -0{,}5+0i=-0{,}5$$

b)

$$z^2=16(\cos 60°+i\sin 60°)$$
$$\frac{z^2}{w}=2(\cos 0°+i\sin 0°)$$
$$\text{=> } a=2;\ b=0$$

c)

$$wu=128(\cos 300°+i\sin 300°)$$
$$\frac{wu}{z}=32(\cos 270°+i\sin 270°)$$
$$\text{=> } a=0;\ b=-32$$

4221

Se facit.

4222

$$z = 2(\cos(\frac{k\pi}{3} - \frac{\pi}{3}) + i\sin(\frac{k\pi}{3} - \frac{\pi}{3}))$$
$$z = 2(\cos(\frac{(k-1)\pi}{3}) + i\sin(\frac{(k-1)\pi}{3}))$$

=>

$$-1 = 2\cos\frac{(k-1)\pi}{3}$$
$$=> \frac{(k-1)\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$$
$$=> k = 5$$

4223

a) Rita figur och markera ett negativt reellt tal.

=> t.ex.

$$z^2 = 5(\cos\pi + \text{i}\sin\pi)$$
$$=> z = \sqrt{5}(\cos\frac{\pi}{2} + \text{i}\sin\frac{\pi}{2})$$

b) Rita figur och markera ett imaginärt tal. => t.ex.

$$z^2 = 5(\cos\frac{\pi}{2} + \text{i}\sin\frac{\pi}{2})$$
$$=> z = \sqrt{5}(\cos\frac{\pi}{4} + \text{i}\sin\frac{\pi}{4})$$

4228

Skriv om på polär form och utnyttja de Moivres formel.

a)

$$|z| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = 2$$
$$\arg z = \arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$$
$$z = 2(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$$
$$=> z^9 = 512(\cos\frac{9\pi}{6} + i\sin\frac{9\pi}{6}) =$$
$$= 512(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}) = -512i$$

b)

$$|z| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$$
$$\arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$$
$$=> \arg z = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$$
$$z = 2(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6})$$
$$=> z^5 = 32(\cos\frac{25\pi}{6} + i\sin\frac{25\pi}{6}) =$$
$$= 32(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{2}) =$$
$$= 32(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}) = 16\sqrt{3} + 16i)$$

c)

$$|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$
$$\arg z = \arcsin\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}$$
$$z = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$$
$$=> z^4 = 4(\cos\pi + i\sin\pi) = -4$$

d)

$$|z| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$
$$\arg z = \arcsin\frac{-1}{\sqrt{2}} = \frac{11\pi}{6}$$
$$z = \sqrt{2}(\cos\frac{11\pi}{4} + i\sin\frac{11\pi}{4})$$
$$=> z^7 = 8\sqrt{2}(\cos\frac{77\pi}{4} + i\sin\frac{77\pi}{4}) =$$
$$= 8\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}) =$$
$$= 8\sqrt{2}(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}) = 8 + 8i$$

4229

$$|6+2i| = \sqrt{36+4} = \sqrt{40}$$
$$\arg(6+2i) = \arcsin\frac{2}{\sqrt{40}} = 18,4°$$

=>

$$z = (\sqrt{40})^6(\cos(18,4\cdot 6) + i\sin(18,4\cdot 6)) =$$
$$= 64000(\cos 110,4° + i\sin 110,4°)$$

4230

$$|1-\sqrt{3}|=2$$

$$\arg z=\arcsin\frac{-\sqrt{3}}{2}=\frac{4\pi}{3}$$

=>

$$z^8=256(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2})=$$

$$=-128-128\sqrt{3}\,i$$

4231

$$|1+i|=\sqrt{2}$$

$$\arg z=\arcsin\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\pi}{4}$$

=>

$$2^{50}(\cos\frac{100\pi}{4}+i\sin\frac{100\pi}{4})=$$

$$=2^{50}(\cos 25\pi+i\sin 25\pi)=$$

$$2^{50}(\cos\pi+i\sin\pi)=-2^{50}$$

4232

täljare: $2(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})$

nämnare: $\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$

$$=>\sqrt{2}^a(\cos\frac{a\pi}{12}+i\sin\frac{a\pi}{12})$$

Uttrycket reellt då:

$$\sin\frac{a\pi}{12}=0\quad => a=12$$

4233

Se facit.

4234

Skriv om på polär form:

$$z=4^n(\cos\frac{n\pi}{6}+i\sin\frac{n\pi}{6})$$

$\operatorname{Re} z=0$ då $\cos\frac{n\pi}{6}=0$

$$=> n=\pm 3,\pm 9,\pm 15...$$

$=> n=3+6\cdot k,$ där

$$k=\pm 1,\pm 2,\pm 3...$$

4240

$$z(z^3+8i)=0\quad => z_1=0$$

Skriv om på polär form:

$z^3=r^3(\cos 3v+i\sin 3v)$ och

$$8(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2})$$

$$=> z=\sqrt[3]{8}=2$$

$$3v=\frac{3\pi}{2}+n\cdot 2\pi$$

$$=> v=\frac{\pi}{2}+n\cdot\frac{2\pi}{3}$$

$$z_2=2(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2})=2(0+i)=2i$$

$$z_3=2(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6})=$$

$$=2(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2})=-\sqrt{3}-i$$

$$z_4=\left[\text{på samma sätt}\right]=\sqrt{3}-i$$

4241

De fyra rötterna ligger på en cirkel med radien 2 och vinkeln mellan dem är $\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$.

=>

$$z_2=2(\cos(\frac{\pi}{4}+n\cdot\frac{2\pi}{4})+i\sin(\frac{\pi}{4}+n\cdot\frac{2\pi}{4}))=$$

$$=2(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4})$$

Gör på samma sätt för att få fram övriga rötter.

4242

Se facit.

4243

Av figuren framgår att ekvationen är av femte graden => n = 5 och vinkeln mellan de komplexa rötterna är $\frac{2\pi}{5}$.

$$z=3i\quad => z^5=243i$$

4244
Åtta rötter => n = 8.

Skriv om z på polär form:

$$z = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}) =$$
=>

$$r^8 = 256(\cos\frac{8\pi}{3} + i\sin\frac{8\pi}{3}) =$$
$$= 256(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}) =$$
$$= 256(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}) =$$
$$= -128 + 128\sqrt{3} \cdot i$$

4245
Ekvationen är av 18:e graden => vinkeln mellan rötterna är $\frac{2\pi}{18} = \frac{\pi}{9}$. (20°)

Rita figur. I andra kvadranten finns återfinns rötter med arg 110°, 130°, 150° och 170°.

=> För 4 rötter gäller $\frac{\pi}{2} < \arg z < \pi$.

4246
Rita in 125i i figur.

Skriv om på polär form:

$$z^3 = 5^3(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$$
$$\Rightarrow r = 5 \text{ och } \arg z = \frac{\pi}{6} + \frac{n \cdot 2\pi}{3}$$

Rötterna ger liksidig triangel, dvs. alla vinklar 60° och sidan

$$a = 5(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}) - 5(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}) = 5\sqrt{3}$$

Ur formelsamling:

$$A = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{(5\sqrt{3})^2\sqrt{3}}{4} \text{a.e=32,5 a.e}$$

4251
Se facit.

4252
a)

$$e^2 \cdot e^{-3i} \cdot e^{2i} \cdot e^{-2} =$$
$$= \frac{e^2}{e^2} \cdot \frac{e^{2i}}{e^{3i}} = e^{-i} =$$
$$= 1 \cdot (\cos(-1) + i\sin(-1)) =$$
$$= 0,54 - 0,84i$$

b)

$$e^1 \cdot e^{2\pi i} \cdot e^{\frac{\pi}{2}i} \cdot e^{-1} =$$
$$= e^{2\pi i} \cdot e^{\frac{\pi}{2}i} = e^{2,5\pi i} =$$
$$= \cos(2,5\pi) + i\sin(2,5\pi) =$$
$$= i$$

4253
$$e^1 e^{i\pi} = e(\cos\pi + \text{i}\sin\pi) = -e$$

4254
Se facit.

4255-4257
Se facit.

4262-4263
Se facit.

4264-4267
Se facit.

4271-4272
Se facit.

4273-4274
Se facit.