Kapitel 1

1107

a) Mängden av alla *x*, sådana att *x* är ett naturligt tal och $2x = 3$ =>$x = 1,5$, dvs. inte ett naturligt tal => den tomma mängden.

b) Mängden av alla *x*, sådana att *x* är ett reellt tal och $3x = 4$ =>$x = 4/3$, dvs. ett reellt tal.

c) Mängden av alla *x*, sådana att *x* är ett reellt tal och $x^2 = -1$ => $x = i$, dvs. ett komplext tal =>den tomma mängden.

d) Mängden av alla *x*, sådana att *x* är ett komplext tal och $x^2 = -4$ => den tomma mängden.

1108

Se facit.

1109

Mängden kan skrivas: $2^1, 2^2, 2^3$.... =>

$$\{x : x = 2^n, x \in N \text{ (större än noll)}\}$$

1110

Se facit.

1111

Mängden av alla $\frac{p}{q}$, sådana att *q* är ett heltal och skiljt från noll => Mängden av alla rationella tal.

1112

$$x = 2,5 \pm \sqrt{6,25 - b}$$
$$=> x \text{ reellt om } b \leq 6,25$$

Dvs. $B = \{b : b > 6,25, b \in R\}$

1118

Se s. 12, exempel 1 och facit. Alla kvadrater ingår i A, likaså alla rektanglar med höjden 2 cm. Det finns element som tillhör både C och D, men det finns också element i C som inte tillhör D och vice versa. Trianglar ingår inte i mängden alla rektanglar.

1119-1120

Se genomgång och facit.

1121

a) Nej, det finns arbetslösa män som är mellan 20 och 30 år gamla.

b) Arbetslösa män som är mellan 20 och 30 år gamla.

1128

a) Snittet av A och B: $A \cap B = \{2,5,9\} \Rightarrow$

$$A \cap B \cap C = \{5,9\}$$

b) Se definition unionen och facit.

c) $B \cap C = \{5,9,17\}$ =>

$$A \cup (B \cap C) = \{1,2,4,5,9,11,17\}$$

d)

$$A \cap B = \{2,5,9\}$$
$$A \cap C = \{5,9,11\}$$
$$=> (A \cap B) \cup (A \cap C) = \{2, 5, 9, 11\}$$

1129

Jämför exempel 2 s. 15-16. Rita ett venndiagram (jfr t.ex. figuren i uppgift 1124) och summera alla fält.

$$\text{gluten} \cap \text{laktos} \cap \text{damm} : 2 \text{ st} \quad \text{(i mitten)}$$

$$\text{gluten} \cap \text{laktos} : (7-2)\text{st} = 5 \text{ st}$$
$$\text{gluten} \cap \text{damm} : (6-2) \text{ st} = 4 \text{ st}$$
$$\text{enbart gluten: } (16\text{-}5\text{-}4\text{-}2) \text{ st} = 5 \text{ st}$$

$\text{laktos} \cap \text{damm}: (5-2)\text{ st} = 3\text{ st}$

$\text{enbart laktos}: (18-5-3-2)\text{ st} = 8\text{ st}$

$\text{enbart damm}: (17-4-3-2)\text{ st} = 8\text{ st}$

=>Patienter som inte fått diagnos:

40 – (2 + 5 + 4 + 5 + 3 + 8 + 8) st = 5 st

1130

Se facit.

1131

a) Markerat område utgörs av de element i *A* som inte tillhör *B* => *A**B*

b) Markerat område utgörs av de element i *A* som varken ingår i *B* eller *C* => $A \setminus (B \cup C)$.

1132

a) Komplementet till komplementet till *A* måste vara *A* => sant.

b) Snittmängden består av alla de element som finns i *A och* i komplementet till *A*, dvs. den tomma mängden =>falskt.

c) Mängden av alla element som finns i *A*, eller i komplementet till *A*, eller i båda => falskt.

d) Komplementet till unionen av *A* och *B* är alla element som inte ingår i *A* eller *B*. Även snittet av komplementet till *A* och komplementet till *B* utgörs av alla element som inte ingår i *A* eller *B* => sant.

e) Alla element som inte ingår i snittet av *A* och *B* kan också skrivas som unionen av komplementet till *A* och komplementet till *B* =>sant.

1133

Rita figur (jfr t.ex. uppgift 1131a).

Procent av eleverna som gillar hamburgare, pizza eller båda:

$A + B - A \cap B = 0{,}70 + 0{,}60 - 0{,}50 = 0{,}80$ =>

20 % av eleverna gillar varken hamburgare eller pizza.

1134-1135

Se facit.

1209

a) ... $= P(B) + P(C) - P(B \cap C) =$

$= 0{,}07 + 0{,}06 - 0{,}04 = 0{,}09$

b) $P_{(inget\ A)} = 1 - 0{,}09 = 0{,}91$

c) $P(B \cup C) - P(B \cap C) = 0{,}09 - 0{,}04 = 0{,}05$

1210

a) *A* och *B* är beroende, ty

$P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$

=> $0{,}008 + 0{,}015 - 0{,}003 = 0{,}02$

b) $1 - 0{,}02 = 0{,}98$

c) Rita figur.

$P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) =$

$= 0{,}008 + 0{,}015 - 2 \cdot 0{,}003 = 0{,}017$

1211

$P(A \cup B) = 0{,}7 + 0{,}8 - P(A \cap B) = 0{,}9$

=> $P(A \cap B) = 0{,}6$

1212

Se facit.

1213-1214

Se facit.

1305

Fyra bokstäver: Första bokstaven kan väljas på 4 sätt, den andra på tre sätt, osv. =>

$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24.$

Tre bokstäver: 4 · 3 · 2 = 24

Två bokstäver: 4 · 3 = 12; En bokstav: 4 sätt

=> Totalt $2 \cdot 24 + 12 + 4 = 64$

1306
Bokstäverna och siffrorna kan kombineras på $3\cdot2\cdot1\cdot3\cdot2\cdot1=36$ sätt.

1307
Varje steg nedåt kan väljas på 5 olika sätt. För att nå punkten Q krävs 7 steg ned =>5^7.

1308
Talet kan inte börja med en nolla => sannolikheten för att den första siffran är en trea är $\frac{8}{9}$. Sannolikheten att någon av de övriga siffrorna är en trea: $\frac{9^6}{10^6}$.

=>$\frac{8\cdot9^6}{9\cdot10^6}$.

1320
$n=1: n!=1$ och $2^n=2$

$n=2: n!=2$ och $2^n=4$

$n=3: n!=6$ och $2^n=8$

$n=4: n!=24$ och $2^n=16$

$=> n\geq 4$

1321
Se facit.

1322
Prova med positivt tal, t.ex. n = 3.

a) $(3\cdot2\cdot1)!=6!=6\cdot5\cdot4\cdot2\cdot1\neq(3\cdot2\cdot1)^2=36$

Dvs. ej sant.

b) $3!(3+1)=3\cdot2\cdot1\cdot4=(3+1)!=4!$, dvs. sant för n = 3.

Sant för alla n? Skriv om VL:

$n!(n+1)=(n+1)\cdot n!=(n+1)!\quad =>$ sant

c) $3\cdot2\cdot1\neq4\cdot3\cdot2\cdot1-4$

1323
Antalet permutationer av 2 element valda bland 5 element är

$\frac{5!}{3!}=5\cdot4=20$

Men eftersom elementen i mängder inte är ordnade blir antalet 20/2 = 10.

1324
Utfallsrummet = antalet möjliga sätt att välja de fyra hjulen, dvs 4!

Gynnsamma utfall är 1 (dvs. alla däck hamnar på samma plats som förra året).

=>$\frac{1}{4!}=\frac{1}{24}$

1325
Se facit.

1326
Den första bonden kan placeras på 8 olika sätt på den första raden. Den andra bonden på 7 olika sätt på den andra raden...=> 8!

1327
Antalet permutationer av de 5 bokstäverna är 5!. Men halva antalet kommer att vara dubbletter eftersom det förekommer 2 "T". Eftersom 2 bokstäver kan ordnas på 2! sätt är antalet permutationer som är olika

$\frac{5!}{2!}=\frac{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{2\cdot1}=60$

1328
$\frac{5!}{(5-5)!}=\frac{5!}{0!}$

Svaret ska bli 5! och det blir det bara om man inför tilläggsdefinitionen 0! = 1. Se s. 30.

1334
a)

$$\ldots = \frac{100!}{2!(100-2)!} = \frac{100\cdot 99\cdot \ldots \cdot 2\cdot 1}{2\cdot 1\cdot (98\cdot 97\cdot \ldots \cdot 2\cdot 1)} =$$
$$= \frac{100\cdot 99}{2\cdot 1} = 4950$$

b)

$$\ldots = \frac{10!}{6!(10-6)!} = \frac{10\cdot 9\cdot \ldots \cdot 2\cdot 1}{6\cdot 5\cdot \ldots \cdot 2\cdot 1\cdot (4\cdot 3\cdot 2\cdot 1)} =$$
$$= \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = \frac{10\cdot 3\cdot 7}{1} = 210$$

1335

Se kommentar facit.

$$\frac{10!}{10!(10-10)!} = \frac{10\cdot 9\cdot \ldots \cdot 2\cdot 1}{10\cdot 9\cdot \ldots \cdot 2\cdot 1\cdot (0)!} = 1$$

1336

Se facit.

1337

a) Utan återläggning.

$$\frac{4}{52}\cdot\frac{3}{51} = \frac{12}{2652} \approx 0,45\ \%$$

Alternativt se facit.

b)

$$\frac{13}{52}\cdot\frac{12}{51} = \frac{156}{2652} \approx 5,9\%$$

Alternativt se facit.

1338

Att välja en röd kula bland 8 kan ske på

$\binom{8}{1}$ sätt. För vart och ett av dessa sätt finns

det $\binom{7}{1}$ sätt att välja en blå kula.

….

Enligt multiplikationsprincipen finns det

$$\binom{8}{1}\cdot\binom{7}{1}\cdot\binom{10}{1} = \frac{8!}{1!(8-1)!}\cdot\frac{7!}{1!(7-1)!}\cdot\frac{10!}{1!(10-1)!} =$$
$$= \frac{8!}{7!}\cdot\frac{7!}{6!}\cdot\frac{10!}{9!} = \frac{8!}{1}\cdot\frac{1}{6!}\cdot\frac{10}{1} = 8\cdot 7\cdot 10 = 560$$

sätt att välja en kula av varje färg.

Antalet sätt att välja 3 kulor bland totalt 25 är

$$\binom{25}{3} = \frac{25!}{3!(25-3)!} = \frac{25\cdot 24\cdot 23}{3\cdot 2\cdot 1} = \frac{25\cdot 4\cdot 23}{1} = 2300$$

=>

$$\frac{560}{2300} = 0,243$$

b) Antalet sätt att välja 4 kulor bland totalt 25

är $\binom{25}{4}$.

Om ingen blå kula väljs ska enbart bitar väljas bland de röda och gula, som är totalt 18

stycken. Det kan ske på $\binom{18}{4}$ sätt.

Sannolikheten att få 4 som inte är blå är alltså

$$\frac{\binom{18}{4}}{\binom{25}{4}} = \frac{\frac{18!}{4!(18-4)!}}{\frac{25!}{4!(25-4)!}} = \frac{18!\cdot 21!}{14!\cdot 25!} = \frac{18\cdot 17\cdot 16\cdot 15}{25\cdot 24\cdot 23\cdot 22} = 0,242$$

1339

Antalet sätt att välja 5 elever bland totalt 30 är

$\binom{30}{5}$.

Om ingen pojke väljs ska enbart elever väljas bland flickorna, som är totalt 12 stycken. Det

kan ske på $\binom{12}{5}$ sätt.

Sannolikheten att få 5 flickor är alltså

$$\frac{\binom{12}{5}}{\binom{30}{5}}=\frac{\frac{12!}{5!(12-5)!}}{\frac{30!}{5!(30-5)!}}=\frac{12!\cdot 25!}{7!\cdot 30!}=\frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8}{30\cdot 29\cdot 28\cdot 27\cdot 26}=$$
$$=0{,}56\ \%$$

1340

Antalet sätt att välja 5 träd bland totalt 500 är $\binom{500}{5}$.

Om endast en äppelsort ska väljas kan det ske på $5\cdot\binom{100}{5}$ sätt.

Sannolikheten att få samma äppelsort är alltså

$$5\cdot\frac{\binom{100}{5}}{\binom{500}{5}}=5\cdot\frac{\frac{100!}{5!(100-5)!}}{\frac{500!}{5!(500-5)!}}=5\cdot\frac{100!\cdot 495!}{500!\cdot 95!}=$$
$$=5\cdot\frac{(100\cdot 99\cdot 98\cdot 97\cdot 96)}{500\cdot 499\cdot 498\cdot 497\cdot 496}=0{,}0015$$

1341

Antalet sätt att välja 2 element bland totalt 6 är $\binom{6}{2}=\frac{6!}{2!(6-2)!}=15$.

1342

Att välja 5 ettor bland totalt 13 ettor kan ske på $\binom{13}{5}$ sätt.

Att välja 3 kryss kan sedan ske på $\binom{8}{3}$ sätt.

De återstående 5 raderna består av tvåor.

Enligt multiplikationsprincipen finns det

$\binom{13}{5}\cdot\binom{8}{5}\cdot\binom{5}{5}=72\,072$ sätt att välja raden.

1343

Steg 1: Totalt antal utfall?

Antalet sätt att välja den första plattan bland ett mycket stort antal plattor är 3 (det finns 3 olika färger). Antalet sätt att välja den andra plattan är också 3.

=>Totalt antal utfall är 3^{15}.

Steg 2:

Antalet sätt att välja 5 plattor som har färg 1 bland totalt 15 plattor är $\binom{15}{5}$.

Antalet sätt att välja 5 plattor som har färg 2 bland totalt 10 plattor är $\binom{10}{5}$.

Återstår 5 plattor som har färg 3 => $\binom{5}{5}$

Sannolikheten att kunden får 5 plattor av varje färg är

$$\frac{\binom{15}{5}\cdot\binom{10}{5}\cdot\binom{5}{5}}{3^{15}}=0{,}053$$

1349

a)

$$\ldots=(a+(-b))^4=[\text{binomialsatsen}]=$$
$$=a^4+4a^3(-b)+6a^2(-b)^2+4a(-b)^3+b^4=$$
$$=a^4-4a^3b+6a^2b^2-4ab^3+b^4$$

b)

$$\ldots=(p+(-2q))^3=[\text{binomialsatsen}]=$$
$$=p^3+3p^2(-2q)+3p(-2q)^2+(-2q)^3=$$
$$=p^3-6p^2q+12pq^2-8q^3$$

1350
Se facit.

1351
a) $... = \binom{16}{2} = \frac{16!}{2!(16-2)!} = \frac{16 \cdot 15}{2} = 120$

b) $... = \binom{14}{2} = \frac{14!}{2!(14-2)!} = \frac{14 \cdot 13}{2} = 91$

c) $... = \binom{100}{1} = \frac{100!}{1!(100-1)!} = \frac{100}{1} = 100$

1352-1353
Se facit.

1354
Om *x* kan förkortas bort gäller att

$$\binom{9}{k}(5x^2)^{9-k}(-\frac{2}{x})^k = \binom{9}{k}(5)^{9-k}(-2)^k \Rightarrow$$

$$x^{2(9-k)} \cdot \frac{1}{x^k} = 1$$

$$\Rightarrow k = 18 - 2k \Rightarrow k = 6 \quad \text{(sjunde termen)}$$

$$\Rightarrow \binom{9}{6}(5)^{9-6}(-2)^6 = 672\,000$$

1355

$$\text{andra raden}: \binom{1}{0} + \binom{1}{1} = 1 + 1 = 2$$

$$\text{tredje raden}: \binom{2}{0} + \binom{2}{1} + \binom{2}{2} = 1 + 2 + 1 = 4$$

$$\text{fjärde raden}:$$

$$\binom{3}{0} + \binom{3}{1} + \binom{3}{2} + \binom{3}{3} = 1 + 3 + 3 + 1 = 8$$

Försök att identifiera ett mönster:

$$\Rightarrow 2, \quad 2 \cdot 2, \quad 2 \cdot 2 \cdot 2$$

$$\Rightarrow 2, \quad 2^2, \quad 2^3 \ldots \Rightarrow 2^{n-1}$$

för rad *n*.

Testa för sjätte raden:

$2^5 = 32$

$$\binom{5}{0} + \binom{5}{1} + \binom{5}{2} + \ldots + \binom{5}{5} = ..$$

$$= 1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 32$$

=> Om *n* betecknar rad i Pascals triangel kan summan skrivas 2^{n-1}.

1356

$$\ldots = \binom{6}{0} \cdot 2^6 + \binom{6}{1} \cdot 2^5 i + \binom{6}{2} \cdot 2^4 i^2 +$$

$$+ \binom{6}{3} \cdot 2^3 i^3 + \binom{6}{4} \cdot 2^2 i^4 + \binom{6}{5} \cdot 2i^5 + \binom{6}{6} \cdot i^6 =$$

$$= 2^6 + 192i + 240i^2 + 160i^3 + 60i^4 + 12i^5 + i^6 =$$

$$= 64 + 192i - 240 - 160i + 60 + 12i - 1 =$$

$$= -117 + 44i$$

1357
Se facit.

1362-1363
Se facit.

1364-1365
Se facit.

1406-1407
Se facit.

1410-1411
Se facit.

1412
Se facit.

Kapitel 2

2110

a)

$$12672 = \left[\text{siffersumman är delbar med 9}\right] =$$
$$= 9 \cdot 1408 =$$
$$= \left[\text{de två sista siffrorna är delbara med 4}\right] =$$
$$= 3 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 352 = 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 88 =$$
$$= 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 22 =$$
$$= 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 11 = 3^2 \cdot 2^7 \cdot 11$$

b)

$$42120 = \left[\text{siffersumman är delbar med 9}\right] =$$
$$= 9 \cdot 4680 = 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 936 = 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 312 =$$
$$= 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 104 = 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 26 =$$
$$= 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 13 = 3^4 \cdot 2^3 \cdot 5 \cdot 13$$

c)

$$185895 = \left[\text{delbart med 5}\right] =$$
$$= 5 \cdot 37179 = 5 \cdot 9 \cdot 4131 =$$
$$= 5 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 459 = 5 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 51 =$$
$$= 5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 17 = 3^7 \cdot 5 \cdot 17$$

2111

a) $\ldots = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 = 2^3 \cdot 3$

b)

$$\ldots = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 =$$
$$= 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$$

c) Utnyttja resultatet i b-uppgiften:

$$\ldots = 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot (2^4 \cdot 3^2 \cdot 5) =$$
$$= 11 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot (2^4 \cdot 3^2 \cdot 5) =$$
$$= 11 \cdot 7 \cdot 2^8 \cdot 5^2 \cdot 3^4$$

2112

Mängden av alla *m*, sådana att *m* är delbart med 3 och där *m* tillhör de naturliga talen.

2113-2115

Se facit.

2116-2117

Se facit.

2204

a) 120/4 = 30 => kvoten 30 och resten 0.

b) 13/15 = 0,8666....

Vi kan skriva 13 = 0 · 15 + 13

Kvoten är 0 och resten är 13.

2205

a) $0 \le r < 8$ ger $k = -1$ och $r = 3$.

b) $0 \le r < 6$ ger $k = -2$ och $r = 4$.

2206

a)

$$a = k \cdot b + r,\ 0 \le r < b$$
$$25 = 2 \cdot 12 + r \ \ => r = 1$$

Alternativt $b = 10 => r = 5$. Se facit.

Alternativt $b = 9 => r = 7$.

b)

$$a = k \cdot b + r,\ 0 \le r < b$$
$$25 = 5 \cdot 5 + r \ \ => r = 0$$

c)

$$a = k \cdot b + r,\ 0 \le r < b$$
$$25 = 4 \cdot 6 + r \ \ => r = 1$$

d)

$$a = k \cdot b + r,\ 0 \le r < b$$
$$25 = 12 \cdot 2 + r \ \ => r = 1$$

2207

T ex 97+13 = 110 eller 97–13 = 84, ty

110 = 8 · 13 + 6 och 84 = 6 · 13 + 6

2208
Se facit.

2209
252 = 3 · 81 +9

Resten är 9, dvs. delbar med 9.

2210
Se facit.

2211
Oldtimers gör så här:

$$\begin{array}{l} \qquad x \;\; + \; 3 \\ x-1\overline{)x^2+2x} \\ \quad -(x^2-x) \\ ---------- \\ \qquad\qquad 3x+0 \\ \qquad\quad -(3x-3) \\ ---------- \\ \qquad\qquad\quad 3 \end{array}$$

$=> r = 3$

2212
Se facit.

2219
a)

$270 = 198 \cdot 1 + 72$

$198 = 72 \cdot 2 + 54$

$72 = 54 \cdot 1 + 18$

$54 = 18 \cdot 2 + 18$

$18 = 18 \cdot 1 + 0$

$=> \text{SGD}(270,198) = 18$

b)

$270 = 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 9 = 5 \cdot 3 \cdot \overbrace{2 \cdot 3 \cdot 3}^{18}$

$198 = \overbrace{2 \cdot 3 \cdot 3}^{18} \cdot 11$

$\text{SGD}(198,\ 270) = 2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$

2220
a)

$35 = 2 \cdot 12 + 11$

$12 = 1 \cdot 11 + 1$

$11 = 1 \cdot 11 + 0$

$=>$ relativt prima

b)

$588 = 1 \cdot 483 + 105$

$483 = 4 \cdot 105 + 63$

$105 = 1 \cdot 63 + 42$

$63 = 1 \cdot 42 + 21$

$42 = 2 \cdot 21 + 0$

$=>$ *ej* relativt prima

Gör på samma sätt med c) och d).

2221
Se facit.

2222
Se facit.

2306
13 delat med 9 ger kvoten 1 och resten 4.
Några av de tal som ger samma rest, dvs. ingår i restklassen, är

$[4]_9 = \ldots. -5,\ 4,\ 13,\ 22,\ 31, \ldots.$

2307
Se facit.

2308
Det finns 4 restklasser modulo 4:

$[0]_4, [1]_4, [2]_4$ och $[3]_4$

2309
Se facit.

2317-2320
Se facit.

2321-2322
Se exempel 3 och facit.

2323
Observera att:

$$292 \equiv -8 \equiv -2$$
$$429 \equiv 9 \equiv 3$$
$$523 \equiv -7 \equiv -3$$
$$225 \equiv -15 \equiv -3 \text{ (alla mod 6)}$$

Alltså är

$$292 \cdot 429 + 533 \cdot 225 \equiv (-2) \cdot 3 + (-1) \cdot (-3) =$$
$$= -6 + 3 \equiv 0 + 3 = 3.$$

Resten blir 3.

2334-2335
Se facit.

2408
a) $a_n = a_1 + d \cdot (\mathrm{n} - 1)$

Differensen *d* mellan två på varandra följande kolumner är konstant =>

$$a_n = a_1 + d \cdot (n-1) =$$
$$a_n = 4 + 2 \cdot (n-1)$$

b)

$$28 = 4 + 2 \cdot (n-1)$$
$$=> n = 13$$

c)

$$4, 6, 8, 10.....$$
$$a_n = a_1 + d \cdot (n-1) =$$
$$4 + 2 \cdot (20-1) = 42$$
$$=> S_{20} = \frac{20}{2} \cdot (4 + 42) = 460$$

2409
Utnyttja

$$a_n = a_1 + d \cdot (n-1)$$
$$444 = 12 + 6 \cdot (n-1)$$
$$=> n = 73$$

2410
Se facit.

2411
Talföljden kan skrivas $a_n = 2 + 3(n - 1)$.
Då $a_{33} = 101$ och $a_{333} = 998$ finns 300 tresiffriga tal i talföljden.

a) I talföljden är vartannat tal jämnt. Det finns alltså 150 tresiffriga tal i följden som är delbara med 2.

b) I talföljden ingår inga tal som är delbara med 3 => 0 tal.

c) Ett tal som är delbart med 6 måste vara delbart med både 2 och 3. Alltså är inga tal i talföljden delbara med 6.

2412
Ledning: Teckna de ursprungliga talen så här:

$$a,\ a+4,\ a+8$$

Den nya talföljden:

$$a+2,\ a+7,\ a+13$$

Givet:

$$\frac{a+7}{a+2} = \frac{a+13}{a+7}$$
$$a^2 + 14a + 49 = a^2 + 15a + 260$$
$$a = 49 - 26 = 23$$
$$=> b = 23 + 4 = 27 \text{ och } c = 23 + 8 = 31$$

2413
Rad 1: 7 platser

Rad 2: 10 platser

Rad 3: 13 platser osv.

$$124 = 7 + 3 \cdot (n-1) \quad => n = 40$$

$$=> S_{40} = \frac{40}{2} \cdot (7 + 124) = 2620$$

2414
Se facit.

2415
Ledning: Hur stort är det mellersta talet om summan är 3?

$$a-k+a+a+k=3$$
$$=> a=1$$
Kvadrering:
$$(1-k)^2,\ 1^2,\ (1+k)^2$$

kvoten konstant =>
$$\frac{1^2}{(1-k)^2}=\frac{(1+k)^2}{1^2}$$

$$1=(a+k)^2(a-k)^2$$
$$1=(1^2-k^2)^2$$
$$1=1^2-2k^2+k^4$$
$$k^4-2k^2=0$$

Sätt $k^2=z$
$$z^2-2z=0$$
$$z=1\pm\sqrt{1-0}$$
$$z_1=2,\ z_2=0$$

$$k^2=2\ => k=\pm\sqrt{2}$$
De tre talen är

$$1-\sqrt{2},\ 1,\ 1+\sqrt{2}$$

2416
$$f'(x)=2ax+b$$
$$=>$$
$$f'(0)=b$$
$$f'(1)=2a+b$$
$$f'(2)=4a+b$$
....
$$f'(9)=18a+b$$

$$=> k=2a$$

$$S_{10}=\frac{10}{2}(b+18a+b)=$$
$$=5(18a+2b)=90a+10b$$

2423
a)

$$k=\frac{1}{2}$$
$$S_n=\frac{a_1(k^n-1)}{k-1}=$$
$$=\frac{32((\frac{1}{2})^6-1)}{\frac{1}{2}-1}=\frac{32((\frac{1}{64})-1)}{-\frac{1}{2}}=$$
$$=-2(\frac{32}{64}-32)=64-1=63$$

b) $k=1,3$

$$S_n=\frac{1(1,3^5-1)}{1,3-1}=9,0$$

c)

$$1,\ 3,\ 3^2,\ 3^3,...,\ 3^9\ => k=3$$
$$S_{10}=\frac{1(3^{10}-1)}{3-1}=29\,524$$

2424
a)

$$\frac{x}{1}=\frac{16}{x} => x^2=16$$
$$k=\pm\sqrt{\frac{16}{1}}=\pm4$$
$$=> a_n=a_1\cdot k^{n-1}=$$
$$=1\cdot4^{n-1}=4^{n-1}\quad \text{eller}\quad (-4)^{n-1}$$

b)

$$\frac{a_5}{a_1}=k^{5-1}$$
$$\frac{16}{1}=k^4 => k=\pm2$$

$$=> a_n = 1 \cdot 2^{n-1} =$$
$$= 1 \cdot 2^{n-1} = 2^{n-1} \quad \text{eller} \quad (-2)^{n-1}$$

c)

$$k = \frac{1}{4}$$
$$a_1 = \frac{a_3}{k^{3-1}} = \frac{20}{\left(\frac{1}{4}\right)^2} = 320$$
$$a_n = 320 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

d) Element a_6 får man genom att multiplicera element a_3 med kvoten , k, tre gånger.

$$a_3 \cdot k^3 = a_6$$
$$k^3 = \frac{-6250}{50}$$
$$k = -5$$

Det första elementet kan beräknas ur sambandet $50 = a_1 \cdot k^2$

$$a_1 = \frac{50}{k^2} = \frac{50}{25} = 2$$

$$a_n = 2 \cdot (-5)^{n-1}$$

2425
Se facit.

2426
Se exempel 4.

$$45000 = x \cdot 1{,}07^1 + x \cdot 1{,}07^2 ... x \cdot 1{,}07^6$$
$$S_6 = 1{,}07\left(\frac{1{,}07^6 - 1}{1{,}07 - 1}\right) = 7654$$
$$=> x = \frac{90000}{7554}\ \text{kr} = 5880\ \text{kr}$$

2427
Talföljden kan skrivas $a_n = 1 \cdot 3^{n-1} = 3^{n-1}$.
Endast $a_{10} = 19\,683$ och $a_{11} = 59\,049$ är femsiffriga tal.

a) Båda talens siffersumma är delbar med 3, så båda talen är delbara med 3.

b) Inget av talen har 0 eller 5 som sista siffra, så inget av talen är delbara med 5.

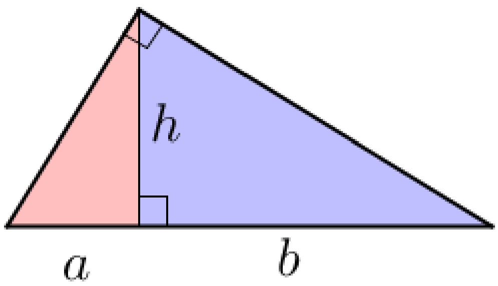
c) Båda talens siffersumma är delbar med 9, så båda talen är delbara med 9.

2428
Se facit.

2429
$$5000 = 100 \cdot 1{,}05^1 + 100 \cdot 1{,}05^2 ... 100 \cdot 1{,}05^n$$
$$1{,}05\left(\frac{1{,}05^n - 1}{1{,}05 - 1}\right) = \frac{5000}{100}$$
$$=> \ln 1{,}05^n = \ln 3{,}38$$
$$=> n \approx 25\ \text{år}$$

2430
$$k = x$$
$$S_6 = 1 \cdot \left(\frac{x^6 - 1}{x - 1}\right) = \frac{x^6 - 1}{x - 1}$$

2431
Ledning: Rita figur. Använd likformighet.



Röd triangel och hela triangeln har varsin rät vinkel och en gemensam vinkel, och är därmed likformiga.

Blå triangel och hela triangeln har varsin rät vinkel och en gemensam vinkel, och är därmed även de likformiga. Alltså är röd triangel och blå triangel likformiga.

Av likformigheten följer

$$\frac{b}{h} = \frac{h}{a}$$

v.s.v.

2432

$$a_1 = 2,\ a_9 = 512$$
$$k^{9-1} = \frac{512}{2} = 256$$
$$k = 256^{1/8}$$

Ny serie:

$$a_1 = \frac{1}{2},\ a_9 = \frac{1}{512}$$
$$k^{9-1} = \frac{1/512}{1/2} = \frac{1}{256}$$
$$k = \left(\frac{1}{256}\right)^{1/8} = 0,5$$

b) Se facit.

2433

Se facit.

2434

Utnyttja att

$$S_n = a_1 \frac{1-k^n}{1-k}$$

a_2 kan skrivas $a_1 \cdot (1-0,16)$

=>

$$k = \frac{(1-0,16) \cdot a_1}{a_1} = 0,84$$

$S_n = 15$ mg =>

$$15 = a_1 \frac{1-0,84^{10}}{1-0,84}$$

=> $a_1 = 2,9$ mg

2439

a) Geometrisk talföljd.

Utnyttja $a_n = a_1 \cdot k^{n-1}$ där $k = 2$.

$$8 = a_1 \cdot 2^{5-1} \Rightarrow a_1 = \frac{1}{2}$$

b) Geometrisk talföljd.

$$\frac{3}{4} = 3 \cdot k^{5-1} \Rightarrow k^4 = \frac{1}{4}$$
$$k^2 = \pm\frac{1}{2}$$
$$k = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

c) Aritmetisk talföljd.

$$a_{n+1} = a_n + 12$$

=>

$$a_2 = a_1 + 12$$
$$a_3 = a_1 + 24$$
$$a_4 = a_1 + 36$$
$$a_5 = a_1 + 48$$

Utnyttja $S_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n)$.

$$45 = \frac{5}{2} \cdot (a_1 + a_1 + 48)$$

=> $a_1 = -15$

2440

a) Aritmetisk talföljd.

$d = 8$.

Rekursiv :

$$\begin{cases} a_0 = 2 \\ a_{n+1} = a_n + 8 \end{cases}$$

$d = 8$ och $a_0 = 2$

Sluten:

$$a_n = 2 + 8n$$

b) Aritmetisk talföljd.

$d = -2$.

Rekursiv

$$\begin{cases} b_0 = 1 \\ b_{n+1} = b_n - 2 \end{cases}$$

$d=-2$ och $b_0=1$

Sluten:

$b_n=1-2n$

c) Aritmetisk talföljd.

$d=100.$

$c_2=0 \Rightarrow c_0=-200$

Rekursiv

$$\begin{cases} c_0=-200 \\ c_{n+1}=c_n+100 \end{cases}$$

$d=100$ och $c_0=-200$

Sluten:

$c_n=-200+100n=100\cdot(n-2)$

2441

Se facit.

2442

a)

$a_0=1.$

$a_1=1\cdot(1+1)=2$

$a_2=2\cdot(2+1)=6$

$a_3=6\cdot(3+1)=24$

$a_4=24\cdot(4+1)=120$

b) Vi tar värdet av det föregående elementet och multiplicerar med n+1. Till exempel kan a_4 skrivas:

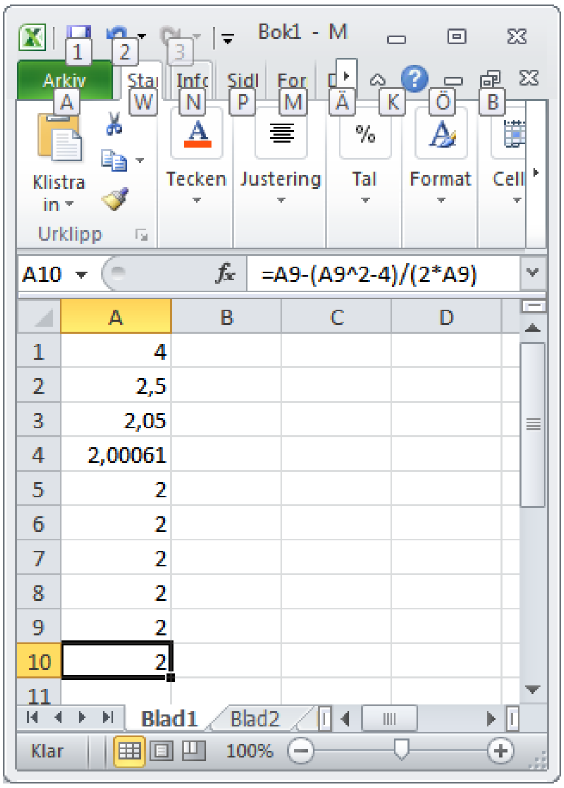
$(1\cdot2\cdot3\cdot4)\cdot(n+1)=4!\cdot(4+1)=5!$

=>

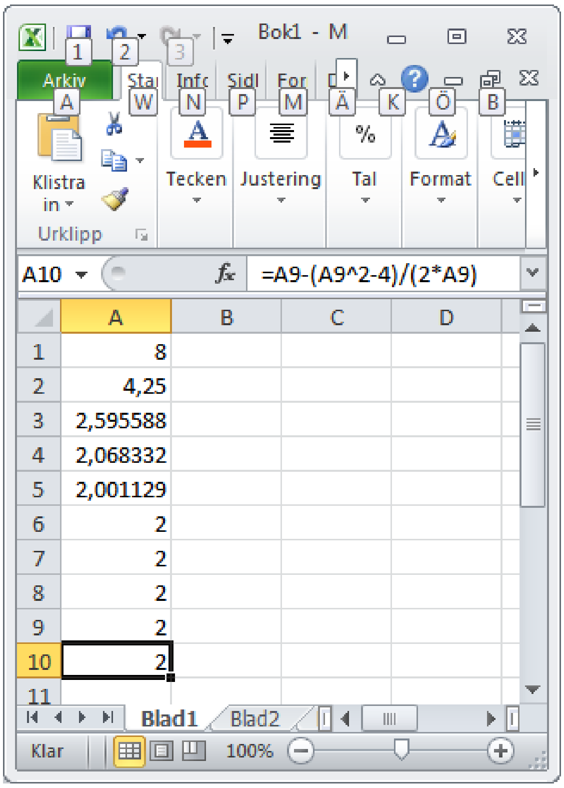
$n!=n\cdot(n-1)!$

2443

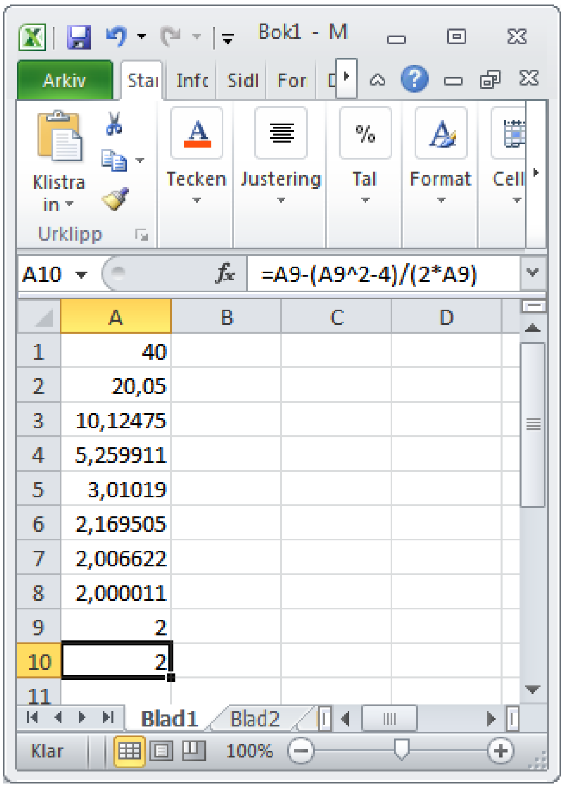
a) Lösning med hjälp av EXCEL:



b)



c)



2444

$n=1 \Leftrightarrow 0$ vinklar

$n=2 \Leftrightarrow 1$ vinkel

$n=3 \Leftrightarrow 3$ vinklar

$n=4 \Leftrightarrow 6$ vinklar

$n=5 \Leftrightarrow 10$ vinklar

......

Försök att hitta ett mönster.

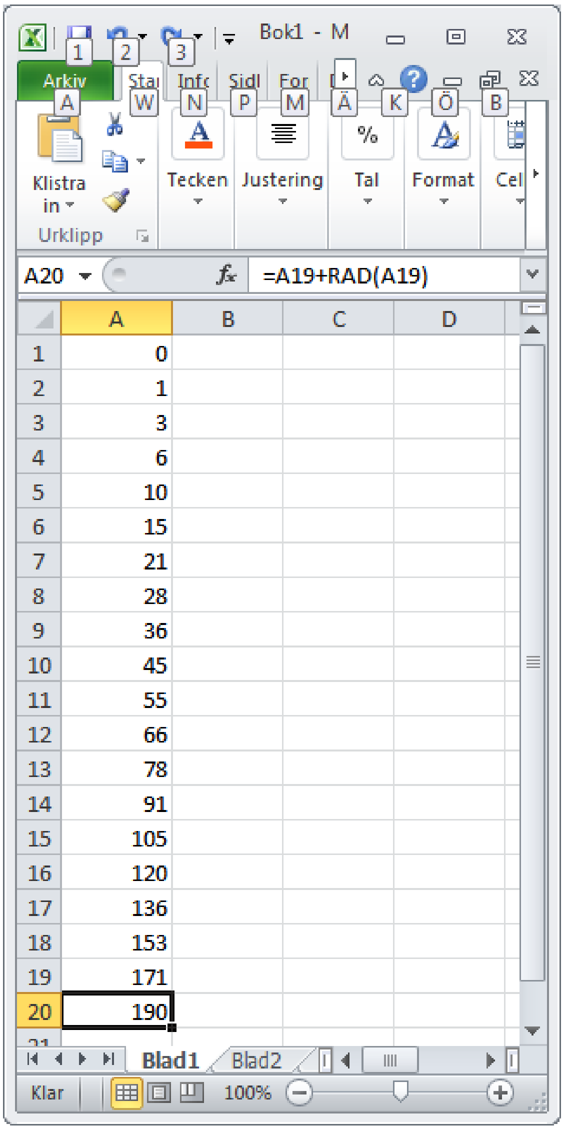
Antalet vinklar ökar med n för varje stråle som läggs till =>

$$a_{n+1} = a_n + n$$

Med $n=20$ strålar =>

$a_{20} = a_{19} + 19 =$

$= [\text{Använd räknare eller digitalt verktyg}] =$



= 190 vinklar

2445

Summan av de två föregående termerna ger nästföljande term.

$0+1=1 \quad (a_1 = 1)$

$1+1=2 \quad (a_2 = 1)$

$1+2=3 \quad (a_3 = 1)$

$2+3=5 \quad (a_4 = 1)$

$3+5=8 \quad (a_5 = 1)$

....

=> $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$

2446

a) Studera figur. Det är hela tiden längden, dvs. längsta sidan, som halveras. Ett A4-papper är ett A0-papper vars längd och bredd har "halverats två gånger":

$$\text{Längd: } \frac{2^{\frac{1}{4}}}{2\cdot 2}\ \mathrm{m} = 0{,}297\ \mathrm{m}$$

$$\text{Bredd: } \frac{2^{-\frac{1}{4}}}{2\cdot 2}\ \mathrm{m} = 0{,}210\ \mathrm{m}$$

b)

$$A_{\mathrm{A0}} = 2^{\frac{1}{4}}\cdot 2^{-\frac{1}{4}}\ \mathrm{m}^2 = 2^0\ \mathrm{m}^2 = 1\,\mathrm{m}^2$$

$$A_{\mathrm{A1}} = \frac{2^{\frac{1}{4}}}{2}\cdot 2^{-\frac{1}{4}}\ \mathrm{m}^2 = \frac{2^0}{2}\mathrm{m}^2 = \frac{1}{2}\mathrm{m}^2$$

$$A_{\mathrm{A2}} = \frac{2^{\frac{1}{4}}}{2}\cdot\frac{2^{-\frac{1}{4}}}{2}\mathrm{m}^2 = \frac{2^0}{4}\mathrm{m}^2 = \frac{1}{4}\mathrm{m}^2$$

När *n* ökar med ett halveras arean =>

$$A_{\mathrm{A}n} = \frac{1}{2^n}\mathrm{m}^2$$

2450

Enda skillnaden mellan A och B är att index betecknas med olika bokstäver. D är lika med A och B eftersom termerna i summan är identiska. C innehåller andra termer än de övriga summorna.

2451

Se facit.

2452

a) $\ldots = \sum_{k=11}^{11} 6^k = 6^{11}$

b) $\ldots = \sum_{k=n+1}^{n+1} a_k = a_{n+1}$

2453

a) Se facit.

b)Ett sätt är att skriva ut några summor och försök se sambandet:

$$\sum_{n=1}^{1} a_n = a_1 = 3$$

$$\sum_{n=1}^{2} a_n = a_1 + a_2 = 3+6 = 9$$

$$\sum_{n=1}^{3} a_n = a_1 + a_2 + a_3 = 3+6+12 = 21$$

$$\sum_{n=1}^{4} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 3+6+12+24 = 45$$

=>

$$a_1 + a_2 \ + a_3 \quad + a_4 =$$

$$3 \ + 6 \ + 12 \quad + 24 =$$

$$a_1 + 2a_1 + 2\cdot 2a_1 + 2\cdot 2\cdot 2a_1 =$$

$$a_1\cdot 2^0 + a_1\cdot 2^1 + a_1\cdot 2^2 + a_1\cdot 2^3$$

$$\Rightarrow a_n = a_1\cdot 2^{n-1} = 3\cdot 2^{n-1}$$

c) Fel i uppgiften. Antingen byts variabeln i summan till *i*, eller så kan t.ex. *m* ange antal termer i summan:

$$\sum_{n=1}^{m} a_n = \sum_{n=1}^{m} 3\cdot 2^{n-1}$$

Utnyttja att kvoten *k* = 2 =>

$$S_m = a_1\cdot\frac{(k^m-1)}{k-1} = 3\cdot\frac{(2^m-1)}{2-1} =$$

$$= 3\cdot(2^m-1)$$

2454

A. Geometrisk serie:

$$a_1 = -1,\ k = \frac{2}{-1} = -2$$

$$\Rightarrow a_n = -1\cdot(-2)^{n-1}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{6} -1\cdot(-2)^{n-1}$$

B. Aritmetisk serie:

$$a_1 = -1,\ d = -\frac{4}{3} - (-1) = -\frac{1}{3}$$

$$=> a_n = -1 + d \cdot (n-1) = -1 - \frac{1}{3} \cdot (n-1) =$$

$$= -1 + \frac{1}{3} - \frac{n}{3} = -(\frac{2}{3} + \frac{n}{3})$$

$$=> \sum_{n=1}^{7} -(\frac{2}{3} + \frac{n}{3})$$

Alternativt se facit.

2455

a)

Vecka 1 skickas 1 brev

Vecka 2 skickas 2 brev

Vecka 3 skickas 4 brev….

Talföljden 1, 2, 4, 8….. kan skrivas som

$$2^0, 2^1, 2^2, 2^3 .... 2^{20-1}$$

$$a_n = a_1 \cdot k^{n-1} =$$

$$= 1 \cdot 2^{20-1} = 524\,288$$

b)

$$\sum_{n=1}^{20} 2^{n-1}$$

Geometrisk summa med $k = 2$:

$$S_{20} = 1 \cdot \frac{(2^{20} - 1)}{2-1} = 1048\,575$$

2502

a) Induktionsbevis.

Steg 1: Formeln gäller för n = 1, ty

$$1 = 1^2$$

Steg 2: Anta att formeln gäller för n = k:

$$S_k = 1 + 3 + 5 + ... + (1 + (2(k-1)) = k^2$$

Steg 3: Med n = k + 1 får vi

$$S_{k+1} = 1 + 3 + 5 + ...(1 + 2(k-1)) + (1 + 2(k+1-1)) =$$

$$= (k+1)^2$$

Enligt induktionsantagandet gäller att

$$S_k = k^2 \ =>$$

$$S_{k+1} = k^2 + (1 + 2(k+1-1)) =$$

$$= k^2 + 1 + 2k = (k+1)^2$$

Tillsammans visar steg 1, 2 och 3 att formeln gäller.

b) Se facit.

2503-2507a

Se facit.

2507

b)

Steg 1: Formeln gäller för n = 1, ty

$$\text{VL}: \frac{1}{(3 \cdot 1 - 2)(3 \cdot 1 + 1)} = \frac{1}{1 \cdot 4} = \frac{1}{4}$$

$$\text{HL}: \frac{1}{3 \cdot 1 + 1} = \frac{1}{4}$$

Steg 2:

Anta att formeln gäller för n = k:

$$S_k = \frac{1}{(3 \cdot 1 - 2)(3 \cdot 1 + 1)} + ... +$$

$$+ \frac{1}{(3k-2)(3k+1)} = \frac{k}{3k+1}$$

Steg 3: Med n = k + 1 får vi

$$S_{k+1}=\frac{k}{3k+1}+\frac{1}{(3(k+1)-2)(3(k+1)+1)}=$$
$$=\frac{k}{3k+1}+\frac{1}{(3k+3-2)(3k+3+1)}=$$
$$=\frac{k}{3k+1}+\frac{1}{(3k+1)(3k+4)}=$$
$$=\frac{k(3k+4)+1}{(3k+1)(3k+4)}=$$
$$=\frac{3k^2+4k+1}{(3k+1)(3k+4)}$$

Vi stannar upp och hittar nollställen till polynomet i täljaren:

$$3k^2+4k+1=0$$
$$k^2+\frac{4}{3}k+\frac{1}{3}=0$$
$$k=-\frac{2}{3}\pm\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2-\frac{1}{3}}=-\frac{2}{3}\pm\sqrt{\frac{4}{9}-\frac{3}{9}}=-\frac{2}{3}\pm\frac{1}{3}$$
$$k=-1 \text{ eller } k=-\frac{1}{3}$$

Polynomet i täljaren kan faktoriseras till $3k^2 + 4k + 1 = (k + 1)(3k + 1)$. Alltså:

$$S_{k+1}=\frac{(k+1)(3k+1)}{(3k+1)(3k+4)}=\frac{k+1}{3k+4}=$$
$$=\frac{k+1}{3k+3+1}=\frac{k+1}{3(k+1)+1}$$

Tillsammans visar steg 1, 2 och 3 att formeln gäller.

2508

a) Genom undersökning och prövning kan inses att summan tycks kunna beräknas genom formeln

$$\sum_{i=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{i}\right)=\ln(n+1)$$

Vi bevisar formeln genom induktion.
Steg 1: Formeln gäller för $n = 1$, ty

VL = ln(1 + 1) = ln(2)

HL = ln(1 + 1) = ln(2)

Steg 2:

Anta att formeln gäller för $n = k$:

$$\sum_{i=1}^{k}\ln\left(1+\frac{1}{i}\right)=\ln(k+1)$$

Steg 3: Med $n = k + 1$ får vi

$$\sum_{i=1}^{k+1}\ln\left(1+\frac{1}{i}\right)=\ln(k+1)+\ln\left(1+\frac{1}{k+1}\right)=$$
$$=\ln\left((k+1)\left(1+\frac{1}{k+1}\right)\right)=\ln\big((k+1)+1\big)$$

Formeln gäller alltså då även för $n = k + 1$.

Tillsammans visar steg 1, 2 och 3 att formeln gäller.

b) Genom undersökning och prövning kan inses att summan tycks kunna beräknas genom formeln

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i(i+1)}=\frac{n}{n+1}$$

Vi bevisar formeln genom induktion.
Steg 1: Formeln gäller för $n = 1$, ty VL = 1/2 och HL = 1/2.

Steg 2:

Anta att formeln gäller för $n = k$:

$$\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{i(i+1)}=\frac{k}{k+1}$$

Steg 3: Med $n = k + 1$ får vi

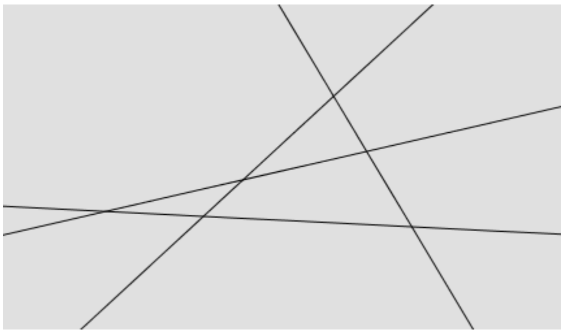
$$\sum_{i=1}^{k+1}\frac{1}{i(i+1)}=\frac{k}{k+1}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=$$
$$=\frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)}=$$
$$=\frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)}=\frac{k+1}{k+2}$$

Formeln gäller alltså då även för $n = k + 1$.

Tillsammans visar steg 1, 2 och 3 att formeln gäller.

2509

Figuren som saknas i boken:



Genom undersökning och prövning kan inses att antalet fält tycks kunna beräknas genom formeln

$$a_n = \frac{n^2 + n + 2}{2}$$

Det kan också inses att när n linjer redan ritats och en ny linje dras, kommer det uppstå n nya skärningspunkter och den nya linjen passerar alltså $n + 1$ områden som den delar i två. Den nya linjen kommer att bilda $n + 1$ nya områden. Alltså gäller att $a_n + 1 = a_n + (n + 1)$. Vi visar att elementen i denna talföljd kan beräknas med formeln ovan genom induktion:

Steg 1: $a_1 = 2$. Formeln gäller för $n = 1$ då en linje delar av ett område i två fält.

Steg 2: Vi antar att formeln gäller för $n = k$:

$$a_k = \frac{k^2 + k + 2}{2}$$

Steg 3: Vi kan visa att formeln då även gäller för $n = k + 1$

$$a_{k+1} = a_k + (k+1) = \frac{k^2 + k + 2}{2} + k + 1 =$$

$$= \frac{k^2 + k + 2}{2} + \frac{2k + 2}{2} = \frac{k^2 + 2k + 1 + k + 1 + 2}{2} =$$

$$= \frac{(k+1)^2 + (k+1) + 2}{2}$$

Tillsammans visar steg 1, 2 och 3 att formeln gäller.

2510-2511

Se facit.

Kapitel 3

3109
Se facit.

3110
$y = -\cos x + C$

$=>$

$4 = -\cos 2\pi + C => C = 5$

3111
$y = 2e^x + 2e^{\frac{x}{2}} + C$

$y(2) - y(1) =$

$= 2e^2 + 2e^{\frac{2}{2}} + C - (2e^1 + 2e^{\frac{1}{2}} + C) =$

$= 2e^2 - 2e^{\frac{1}{2}} = 2(e^2 - e^{\frac{1}{2}})$

3112
a)

$y' = -\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = -x^{-\frac{1}{2}}$

$y = -2x^{\frac{1}{2}} + C$

$0 = -2 \cdot 4^{\frac{1}{2}} + C => C = 4$

b)

$y' = \frac{4}{e^{2x}} = 4 \cdot e^{-2x}$

$y = -2 \cdot e^{-2x} + C$

$0 = -2e^{-2 \cdot 0} + C \;\; => C = 2$

c)

$y' = 4x^3 + 8x + C_1$

$y = x^4 + 4x^2 + C_1 x + C_2$

$=> C_2 = 2$

$10 = 1 + 4 + C_1 + 2 \;\; => C_1 = 3$

d)

$y' = -x^{-1} + C_1$

$y = -\ln|x| + C_1 x + C_2$

$-1 = -1 + C_1 \;\; => C_1 = 0$

$4 = -\ln|1| + C_2 \;\; => C_2 = 4$

3113
$y' = 2$

$y(0) = 2 \cdot 0 + 3 = 3$

3114
$y' = 3x^2 + 3$

$y'' = 6x$

3115
a)

$y' = 2x + 1$

$y = x^2 + x + C$

$2 = 1^2 + 1 + C \;\; => C = 0$

b) Se facit.

3116
$y' = 2x + C_1$

$y'(0) = 2 \cdot 0 + C_1 = 4 \;\; => C_1 = 4$

$y = x^2 + 4x + C_2$

$0 = 0^2 + 4 \cdot 0 + C_2 \;\; => C_2 = 0$

3205
a)

$y' = -2y$

$y = C \cdot e^{-2x}$

$4 = C \cdot e^{-2 \cdot 0} \;\; => C = 4$

$=> y'(0) = -8 \cdot e^{-2 \cdot 0} = -8$

b) $=> y'(-1) = -8 \cdot e^{-2 \cdot -1} = -8e^2$

3206
a)

$$y = C \cdot e^{\frac{1}{4} \cdot x}$$
$$3 = C \cdot e^{\frac{1}{4} \cdot 0} \quad => C = 3$$
$$=> y' = \frac{3}{4} e^{\frac{1}{4} \cdot x}$$
$$y'(0) = \frac{3}{4} e^{\frac{1}{4} \cdot 0} = \frac{3}{4}$$

b) $x = 4$ => $y = 3e$. I denna punkt har tangenten riktningskoefficienten

$$k = y'(4) = \frac{3}{4} e^{\frac{1}{4} \cdot 4} = \frac{3}{4} e$$

Tangentens ekvation kan skrivas

$$y = kx + m = \frac{3e}{4} \cdot x + m$$

Sätt in given punkt:

$$3e = \frac{3e}{4} \cdot 4 + m \quad => m = 0$$

=>

$$y = \frac{3e}{4} \cdot x$$

3208

Rät linje genom origo:

$$y' = \frac{1}{5} y$$
$$y = C \cdot e^{\frac{1}{5} \cdot x}$$
$$2 = C \cdot e^{\frac{1}{5} \cdot 0} \quad => C = 2$$

3209

$$y' = \frac{1}{4} y$$
$$y = C \cdot e^{\frac{1}{4} \cdot x}$$
$$y(0) = 2 = C \cdot e^{\frac{1}{4} \cdot 0} \quad => C = 2$$

3210

Se facit.

3211

Se facit.

3216

a)

Hastighetskonstanten $k = 6{,}93 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{s}^{-1}$

$\frac{dK}{dt}$ negativ eftersom koncentrationen minskar.

$$\frac{dK}{dt} = -k \cdot K = -6{,}93 \cdot 10^{-3} \cdot K$$

b)

$$K(t) = C \cdot e^{-6{,}93 \cdot 10^{-3} \cdot t}$$

Bestäm C:

$$K(0) = 0{,}2000\ \mathrm{M} = C \cdot e^{-6{,}93 \cdot 10^{-3} \cdot 0}\ \mathrm{M}$$
$$=> C = 0{,}2000$$
$$K(400) = 0{,}2000 \cdot e^{-6{,}93 \cdot 10^{-3} \cdot 400}\ \mathrm{M} =$$
$$= 0{,}0125\ \mathrm{M}$$

3217

Fel i facit. Skall stå: …. år 1880.

3218

Givet uttryck ger lösningen

$$I = I_0 \cdot e^{-\mu x}$$

I minskar till hälften efter 1,3 m.

$$\frac{I}{I_0} = \frac{1}{2} = e^{-\mu \cdot 1{,}3}$$

Lös ut proportionalitetskonstanten.

$$\ln \frac{1}{2} = -\mu \cdot 1{,}3$$
$$\mu = \frac{\ln \frac{1}{2}}{-1{,}3} = 0{,}533$$
$$=> I(x) = I_0 \cdot e^{-0{,}533 x}$$

3219

a) Koncentrationen $K(t)$. $\frac{dK}{dt}$ negativ eftersom koncentrationen minskar:

$\frac{dK}{dt} = -k \cdot K(t)$ ger lösningen $K = K_0 \cdot e^{-k \cdot t}$.

Lös ut k med hjälp av givna värden:

$$\frac{K}{K_0} = 0,45 = e^{-k \cdot 65}$$
$$\ln 0,45 = -k \cdot 65$$
$$=> k = 0,0123$$

b)

$$\frac{K}{K_0} = 0,25 = e^{-0,0123 \cdot t}$$
$$=> t = 113 \text{ s}$$

3220

a) $\frac{dv}{dt} = -k \cdot v(t)$ ger lösningen $v(t) = v_0 \cdot e^{-kt}$

Givet:

$$v(0) = 2,8 \text{ dm/s}$$
$$v(10) = 2,0 \text{ dm/s}$$

$$\frac{v(10)}{v(0)} = \frac{2,0}{2,8} = e^{-k \cdot 10}$$

$$k = \frac{\ln \frac{2,0}{2,8}}{-10} = 0,034$$

b)

$$\frac{1,0}{2,8} = e^{-0,034 \cdot t}$$
$$=> t = 31 \text{ s}$$

(Om fler decimaler tas med i k. Se facit.)

3221

a)

$$\frac{dL}{dT} = k \cdot L(T)$$

$\textit{ger lösningen } L(T) = L(T_0) \cdot e^{k \cdot T}$

$$\frac{1,01 \cdot 1240}{1240} = e^{k \cdot 20}$$
$$k = \frac{\ln 1,01}{20} = 4,975 \cdot 10^{-4}$$

b)

$$1,05 = e^{4,975 \cdot 10^{-4} \cdot T}$$
$$T = \frac{\ln 1,05}{4,975 \cdot 10^{-4}} = 98 \text{ °C}$$

c)

$$\frac{1275}{1240} = e^{4,975 \cdot 10^{-4} \cdot T}$$
$$T = \frac{\ln \frac{1275}{1240}}{4,975 \cdot 10^{-4}} = 56 \text{°C}$$

e) Se facit.

3307

a) Se svart kurva i fjärde kvadranten i facit.

Observera att i facit är punkten (–0,5; 0,5) markerad (det saknas ett minustecken framför *x*-koordinaten i facit)medan lösningskurvan genom punkten $(0,5; -0,5)$ efterfrågas i uppgiften.

b) Den inritade kurvan kan kännas igen som $y = \frac{1}{x}$.

Den löser differentialekvationen då

VL = $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{d}{dx}(x^{-1}) = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$

HL = $-\frac{y}{x} = -\frac{1/x}{x} = -\frac{1}{x^2}$

§3308

Se facit.

3309

Bestäm sambandet mellan *x* och *y* genom att dels utnyttja givna värden, dels avläsa i figuren. Utnyttja symmetri.

x	*y*
0	0
-1	1
-2	4
0	0
1	1
2	4

Ansätt $y = k \cdot x^2$. Funktionen stämmer då *k* = 1.

b) Steg 1: Derivera uttrycket för lösningskurvan:

$$y' = 2x$$

Steg 2: Sätt in uttrycket för lösningskurvan i givet uttryck:

$$xy' - 2y = 0$$
$$y' = \frac{2y}{x} = \frac{2 \cdot x^2}{x} = 2x$$

dvs. lösningskurvan är en lösning till den givna differentialekvationen.

c) Förslag på lättare lösning:

Riktningsfältet antyder att lösningskurvorna är andragradskurvor med extrempunkt i origo. Dessa kan beskrivas med uttrycket $y = Cx^2$ och löser differentialekvationen då
VL = $xy' - 2y = x \cdot 2Cx - 2Cx^2 = 2Cx^2 - 2Cx^2 = 0$ = HL

Alternativ lösning: Se kommentarer för lösningsgång i Upptäck och visa s. 119.

$$xy' - 2y = 0$$
$$y' + \left(-\frac{2}{x}\right)y = 0$$
$$f(x) = -\frac{2}{x} \quad \Rightarrow F(x) = -2 \cdot \ln x$$
$$e^{-2\ln x} \cdot \left(y' - \frac{2}{x}y\right) = 0$$
$$e^{-2\ln x} \cdot y' - e^{-2\ln x} \cdot \frac{2}{x}y = 0$$
$$\frac{d}{dx}\left(y \cdot e^{-2\ln x}\right) = 0$$
$$y \cdot e^{-2\ln x} = C$$
$$y \cdot e^{-2\ln x} \cdot e^{2\ln x} = Ce^{2\ln x}$$
$$\text{dvs. } y = Ce^{2\ln x} = Cx^2$$

3310

Se facit.

3404

Givet: Startpunkten är (3; 4), dvs.

$$x_0 = 3 \text{ och } y_0 = 4.$$
$$h = 1.$$

$$x_{n+1} = x_n + 1$$
$$\text{(se exempel 1, sid129):}$$
$$y_{n+1} = y_n + dx \cdot \frac{dy}{dx} = y_n + h \cdot \frac{dy}{dx} =$$
$$= y_n + 1 \cdot (0{,}5 y_n)$$

a) $x = 3 + 1 = 4 \quad \Rightarrow \quad y = 4 + 1 \cdot (0{,}5 \cdot 4) = 6$

b) $x = [3 - h] = 2 \quad \Rightarrow \quad y = 4 - 1 \cdot (0{,}5 \cdot 4) = 2$

3405

Se facit.

3406

$$x_0 = 2 \text{ och } y_0 = 0.$$
$$h = -0{,}1.$$

$$x_{n+1} = x_n + 1$$
$$y_{n+1} = y_n + 1 \cdot (0{,}5 y_n)$$

$x_1 = 2 - 0{,}1 = 1{,}9$ och $y_1 = 0 - 0{,}1 \cdot (\ln 2^2)$

$x_2 = 1{,}9 - 0{,}1 = 1{,}8$ och
$y_2 = -0{,}1 \cdot (\ln 2^2) - 0{,}1 \cdot (\ln 1{,}9^2)$

$x_3 = 1{,}8 - 0{,}1 = 1{,}7$ och
$y_3 = -0{,}1 \cdot (\ln 2^2) - 0{,}1 \cdot (\ln 1{,}9^2) - 0{,}1 \cdot (\ln 1{,}8^2) =$
$= -0{,}1 \cdot (\ln 2^2 + \ln 1{,}9^2 + \ln 1{,}8^2) = -0{,}38$

3505

a) logistisk tillväxt:

$y' = ky(M - y)$ =>
$8{,}5 \cdot 10^{-6} \cdot y(10\,000 - y),\ y(0) = 500$

b) Se exempel 2 och använd t.ex. Wolfram Alpha. Programmet ger en lösning. Sätt in 50 år i denna lösning =>7 870 individer.

c)

solve	$9000 = \dfrac{10\,000\, e^{0.085\,x}}{19 + e^{0.085\,x}}$

=>60,5 år

d)

solve	$y = \dfrac{10\,000\, e^{0.085 \times 10}}{19 + e^{0.085 \times 10}}$

Result:

$y = 1096.38$

Sätt in i ursprunglig ekvation:

Input interpretation:

$8.5 \times 10^{-6} \times 1096.38\,(10\,000 - 1096.38)$

Result:

82.9748826126

=>83 individer/år

3506

Se facit.

3507

a) Se exempel 1 och facit.

b) $y' = 4 \cdot 10^{-6} \cdot y(8000 - y),\ y(0) = 25$

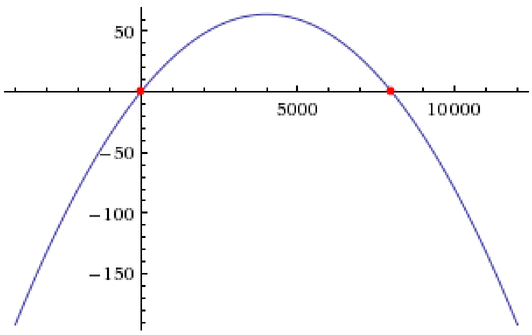
solve	$4 \times 10^{-6}\, y\,(8000 - y) = 0$

Results:

$y = 0$

$y = 8000$

Root plot:



y'=0 då y=0 och då y = 8000. Symmetri (andragradskurva) ger max tillväxthastighet då y = 4000.

=> 64 fiskar/vecka, ty
$4 \cdot 10^{-6} \cdot 4000 \cdot (8000 - 4000)$ st/vecka $= 64$ st/vecka

c)

solve y'=4*10^(-6)*y*(8000-y) and y(0)=100

Differential equation solution:

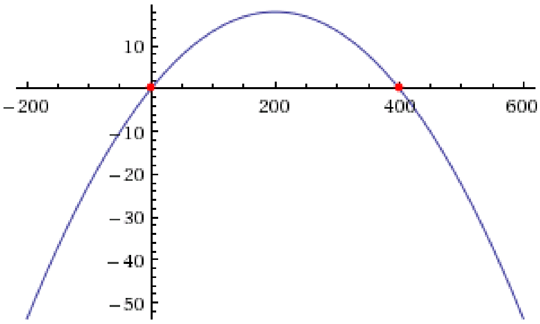
$$y(x) = \frac{8000\, e^{4\,x/125}}{e^{4\,x/125} + 79}$$

Sätt in x = 52 veckor =>ca 500 fiskar.

3508

a) Se exempel 1 och facit.

b) Andragradsfunktionen $N'(t)$ =0 då N=0 och då N = 400. Symmetri ger max då N = 200 fasaner. Se figur nedan.



c)

Fördubbling då N = 2 · 20 fasaner = 40 fasaner.

Differential equation solution:

$$y(x) = \frac{400\, e^{0.18\, x}}{e^{0.18\, x} + 19}$$

Sätt $y(x)$ = 40 och lös ut x

Tips: Uttrycket kanske måste skrivas om så att det passar det digitala verktyg du valt att använda.

=>ca 4 månader (4,15).

3509

a) $y' = 0{,}007 \cdot y \cdot (200 - y),\ y(0) = 30$

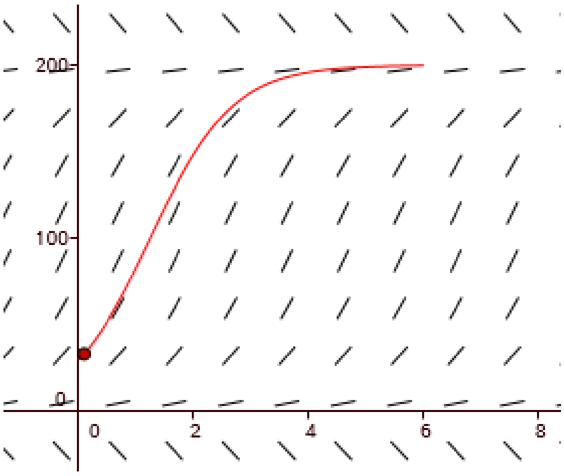
b)

Differential equation solution:

$$y(x) = \frac{200.\, e^{1.4\, x}}{5.66667 + e^{1.4\, x}}$$

Facit anger svaret med annan bas.

c) Använd t.ex. GeoGebra:



d) Se facit.

3510

Givet:

$$y(0) = 65,\ y(1) = 92,\ y(2) = 142$$
$$y' = k \cdot y \cdot (M - y)$$

a) $y' = k \cdot y \cdot (M - y)$ och $y(0) = 65$ ger lösningen

$$y(t) = \frac{65Me^{kMt}}{65e^{kMt} + M - 65}.$$

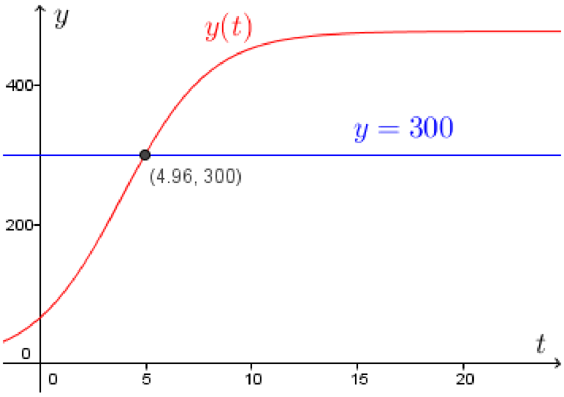
Med $y(1)$ = 92 och $y(2)$ = 142 fås ett ekvationssystem för M och k:

$$\begin{cases} \dfrac{65Me^{kM}}{65e^{kM} + M - 65} = 98 \\ \dfrac{65Me^{2kM}}{65e^{2kM} + M - 65} = 142 \end{cases}$$

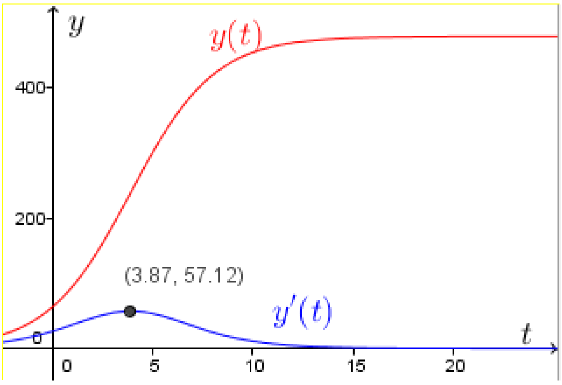
Med ett digitalt verktyg ges lösningen $M \approx 478$ och $k \approx 0{,}001$.

b) Om grafen till funktionen $y(t)$ ritas med ett digitalt verktyg kan fås fram att $y(t) > 300$ för

$t > 4{,}96$.



c) Rita in även $y'(t)$ i grafen och låt det grafiska verktyget bestämma maximipunkten.



Tillväxthastigheten är 57 år^{-1} vid t = 3,87 år ≈ 3 år 10 mån.

Fel i facit.

3603

a)

$$y' = -2Ce^{-2x}$$
$$y'' = 4Ce^{-2x}$$

Sätt in i given ekvation:

$$4Ce^{-2x} + 4\cdot(-2Ce^{-2x}) + 4Ce^{-2x} = 0$$

b)

$$y' = Ce^{-2x} + Cx\cdot(-2\cdot e^{-2x}) = Ce^{-2x} - 2Cxe^{-2x}$$
$$y'' = -2Ce^{-2x} - (2Ce^{-2x} - 4Cxe^{-2x}) =$$
$$= -4Ce^{-2x} + 4Cxe^{-2x}$$

Sätt in i given ekvation:

$$-4Ce^{-2x} + 4Cxe^{-2x} + 4(Ce^{-2x} - 2Cxe^{-2x}) + 4Cxe^{-2x} =$$
$$= -4Ce^{-2x} + 4Ce^{-2x} + 8Cxe^{-2x} - 8Cxe^{-2x} = 0$$

3608

$$r^2 + 2r - 8 = 0$$
$$r = -1 \pm \sqrt{1+8}$$
$$r_1 = 2,\ r_2 = -4$$

Se sammanfattande regler s 138:

$$\Rightarrow y = C_1\cdot e^{r_1x} + C_2\cdot e^{r_2x} =$$
$$= C_1\cdot e^{2x} + C_2\cdot e^{-4x}$$

Givet: linjen $y = 2x$ tangerar lösningskurvan i origo.

$$y(0) = C_1\cdot e^{2\cdot 0} + C_2e^{-4\cdot 0} = C_1 + C_2 = 0$$
$$y'(0) = 2C_1\cdot e^{2\cdot 0} - 4C_2e^{-4\cdot 0} = 2C_1 - 4C_2 = 2$$
$$\Rightarrow$$

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ C_1 - 2C_2 = 1 \end{cases}$$
$$C_2 = -C_1$$
$$C_1 + 2C_1 = 1$$
$$\Rightarrow C_1 = \frac{1}{3} \text{ och } C_2 = -\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{3}\cdot e^{2x} - \frac{1}{3}\cdot e^{-4x}$$

3611

a)

$$y'' = ky \quad \text{Givet}: k = -0{,}16$$
$$\Rightarrow y'' + 0{,}16y = 0$$

Utnyttja tabell s. 138:

$$r^2 + 0{,}16 = 0$$
$$r = \pm 0{,}4i$$
$$\Rightarrow y = C_1 \sin 0{,}4x + C_2 \cos 0{,}4x$$

Givna värden ger:

$y(0) = 0 + C_2 = 0{,}075 \Rightarrow C_2 = 0{,}075$

$y'(0) = \left[0{,}4C_1 \cos 0{,}4x - 0{,}4C_2 \sin 0{,}4x\right] = 0{,}03$
$\Rightarrow 0{,}03 = 0{,}4C_1 \quad \Rightarrow C_1 = 0{,}075$

$\Rightarrow y = 0{,}075 \sin 0{,}4x + 0{,}075 \cos 0{,}4x$

b) Lös *y*' = 0:

$0{,}4 \cdot 0{,}075 \cdot \cos 0{,}4x - 0{,}4 \cdot 0{,}075 \cdot \sin 0{,}4x = 0$

$\Rightarrow x = \frac{5 \cdot \pi}{8} \cdot (4n - 7)$

$$y_{\max} = 0{,}075 \sin(0{,}4 \cdot \frac{5\pi}{8}) + 0{,}075 \cos(0{,}4 \cdot \frac{5\pi}{8}) =$$
$$= 0{,}075 \sin(\frac{\pi}{4}) + 0{,}075 \cos(\frac{\pi}{4}) = 0{,}11 \text{ m} \quad (0{,}106066)$$

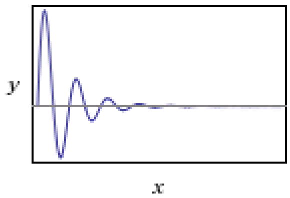
3612

Sätt in givna värden och utnyttja digitalt verktyg:

Differential equation solution:

$$y(x) = 0.481051\, e^{-140.449x} \sin(700.713\, x)$$

Dämpad svängningskrets där *R* är spolens inre resistans:



3705

Se exempel 2.

$$\begin{cases} F = ma = mv' \\ F = mg - kv^2 \end{cases}$$
$\Rightarrow$
$mv' = mg - kv^2$
$mv' + kv^2 - mg = 0$
$v' + \frac{k}{m} v^2 - g = 0$
Givet $m = 0{,}05$ kg och $k = 0{,}1$ kg/m
$\Rightarrow v' + 2v^2 - 9{,}82 = 0$

b) Använd digitalt verktyg, *v*(0)= 0:

Differential equation solution:

$$v(x) = \frac{2.21585\, e^{8.86341x} - 2.21585}{e^{8.86341x} + 1}$$

där *x* är tiden i sekunder

I facit ska det stå +1 i nämnaren, dvs

$$v(t) = 2{,}216 - \frac{4{,}43}{e^{8{,}86t} + 1}$$

c)

$a = v' = 9{,}82 - 2v^2$
Observera att det är $a(v) = v'(v)$ som ska beräknas:

$v'(0) = 9{,}82 - 2 \cdot (0)^2 \text{ m/s}^2 = 9{,}82 \text{ m/s}^2$

$v'(2) = 9{,}82 - 2 \cdot (2)^2 \text{ m/s}^2 = 1{,}82 \text{ m/s}^2$

3706

a)

$mv' = -kv^2$
$v' = -\frac{k}{m} v^2$
Givet $m = 0{,}0005$ kg och $k = 0{,}01$ kg/m
$\Rightarrow v' = -20v^2$

Utnyttja digitalt verktyg.

Givet $v(0) = 180$ m/s =>

Differential equation solution:

$$v(x) = \frac{180}{3600\,x + 1}$$

b) $v(0{,}001) = \dfrac{180}{3600 \cdot 0{,}001 + 1}\ \text{m/s} = 39\,\text{m/s}$

c) Se facit.

3707

Se facit

3708

Se exempel 3.

a)

Steg 1:

$\dfrac{dT}{dt}$ är proportionell mot temperaturskillnaden till omgivningen:

$$=> \frac{dT}{dt} = -k(T-21)$$

där $T(0) = 82$ °C

Använd digitalt verktyg =>

$$y(t) = C \cdot e^{-k \cdot t} + 21$$

b)

$$y(0) = C \cdot e^{-k \cdot 0} + 21 = C + 21 = 82$$

$$=> C = 61$$

$$y(1) = 61 \cdot e^{-k \cdot 1} + 21 = 71$$

$$61 \cdot e^{-k} = 50$$

$$\ln e^{-k} = \ln \frac{50}{61} \quad => k = 0{,}1988$$

Lös ut t ur ekvationen

$45 = 61e^{-0{,}1988 \cdot t} + 21.$ Se facit.

3709

Se exempel 2.

Steg 1:

$$F = mg - kv^2$$

$$F = am = v' \cdot m$$

$$v' \cdot m + kv^2 - mg = 0$$

$$v' + \frac{k}{m}v^2 - g = 0$$

$$=> v' + \frac{18}{78}v^2 - 9{,}82 = 0$$

När hopparen nått maxhastigheten är v'=0.

Använd digitalt verktyg:

Differential equation solution:

$$y(x) = \frac{6.52329\,e^{3.01075\,x} - 6.52329}{e^{3.01075\,x} + 1}$$

3710

Förorenat vatten med koncentrationen 0,006 gram/liter läcker in med hastigheten v = 50 liter/min. 50 liter uppblandat vatten förs bort per min.

Ansätt: $y(t)$ gram förorening efter t minuter.

=>$y(0)$=0 ty $V(0)$ = 25 000 liter rent vatten.

Förändringshastigheten $y'(t)\left[\dfrac{\text{g}}{\text{min}}\right]$ är proportionell både mot den förorening (det vatten) som tillförs och den förorening (det vatten) som förs bort . Ibland kan det underlätta att ta med enheter:

$$y'(t) = 50 \cdot 0{,}006\,\frac{\text{liter}}{\text{min}} \cdot \frac{\text{g}}{\text{liter}} - \frac{50 \cdot y}{25\,000}\,\frac{\frac{\text{liter}}{\text{min}} \cdot \text{g}}{\text{liter}} =$$

$$= 0{,}3\,\frac{g}{\text{min}} - \frac{1}{500} \cdot y\,\frac{g}{\text{min}} = (0{,}3 - \frac{1}{500} \cdot y)\,\frac{g}{\text{min}}$$

Använd digitalt verktyg:

Differential equation solution:

$$y(x) = 150 - 150\,e^{-0.002\,x}$$

3711

a)

$a(0) = 24$ µg

$$\frac{da}{dt} = -0{,}6a \quad (\text{jämför } y' = ky)$$

$$a = C \cdot e^{-0{,}6 \cdot t}$$

$$24 = Ce^{-0{,}6 \cdot 0} \Rightarrow C = 24$$

$$dvs.\ a = 24 \cdot e^{-0{,}6 \cdot t}$$

b)

Med resultatet från a insatt blir differentialekvationen

$$\frac{db}{dt} = 0{,}6 \cdot 24 \cdot e^{-0{,}6 \cdot t} - 0{,}09 \cdot b, \quad b(0) = 0\,.$$

Lösningen kan fås fram med ett digitalt hjälpmedel:

$$b(t) = 28{,}24e^{-0{,}09t} - 28{,}24e^{-0{,}6t}$$

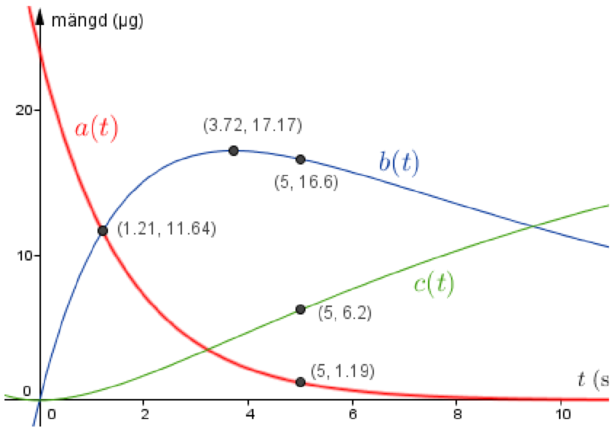
c) Med resultatet från c insatt blir differentialekvationen

$$\frac{dc}{dt} = 0{,}09 \cdot (28{,}24e^{-0{,}09t} - 28{,}24e^{-0{,}6t}), \quad c(t) = 0$$

Digitalt hjälpmedel ger lösningen

$$c(t) = 24 + 4{,}24e^{-0{,}6t} - 28{,}24e^{-0{,}09t}$$

d)



e) Använd ett digitalt verktyg för att bestämma skärningspunkten mellan kurvorna till $a(t)$ och $b(t)$ till (1,21; 11,64). Det finns alltså lika mycket av ämnena efter 1,21 s.

f) Använd ett digitalt verktyg för att bestämma maximipunkten till $b(t)$ till (3,72; 17,17).

g) Se facit.

Kapitel 4

4103

Glöm inte de inre derivatorna:

a) $f'(x) = e^{x^2} \cdot 2x$

b) $f'(x) = 2\sin v \cdot \cos v$

4104

a) $\dfrac{dy}{dx} = 2(\sin x + x) \cdot (\cos x + 1)$

b) $\dfrac{dy}{dx} = 4(2x + e^{2x})^3 \cdot (2 + 2e^{2x})$

c)

$$\frac{dy}{dx} = e^{(x^2+1)^2} \cdot 2(x^2+1) \cdot 2x =$$
$$= e^{(x^2+1)^2} \cdot (x^2+1) \cdot 4x =$$
$$= e^{(x^2+1)^2} \cdot (4x^3 + 4x)$$

d)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x+2x^3} \cdot \left(1+6x^2\right)$$

4105

Se facit.

4106

a) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dz} \cdot \dfrac{dz}{dx} = x^2 \cdot 5 = 5x^2$

b) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dz} \cdot \dfrac{dz}{dx} \Rightarrow \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{\frac{dy}{dx}}{\frac{dy}{dz}} = \dfrac{8}{2} = 4$

4107

a)

$$y' = 3x^2 \cdot (x^2-1)^3 + x^3 \cdot 3(x^2-1)^2 \cdot 2x =$$
$$= (x^2-1)^2 \cdot (3x^2(x^2-1) + 6x^4) =$$
$$= (x^2-1)^2 \cdot (3x^4 - 3x^2 + 6x^4) =$$
$$= (x^2-1)^2 \cdot (9x^4 - 3x^2) = (x^2-1)^2 \cdot 3x^2 \cdot (3x^2-1) =$$
$$= 3x^2 \cdot (x^2-1)^2 \cdot (3x^2-1)$$

b)

$$y' = 2x(x^2-1)^3 + (1+x^2) \cdot 3(x^2-1)^2 \cdot 2x =$$
$$= 2x(x^2-1)^3 + 6x(1+x^2) \cdot (x^2-1)^2 =$$
$$= 2x(x^2-1)^2 \left((x^2-1) + 3(1+x^2)\right) =$$
$$= 2x(x^2-1)^2 \left((x^2-1+3+3x^2)\right) =$$
$$= 2x(x^2-1)^2 \left(4x^2+2\right)$$

c)

$$y' = e^{x^2} \cdot 2x \cdot (x^3-1)^2 + e^{x^2} \cdot 2 \cdot (x^3-1) \cdot 3x^2 =$$
$$= 2xe^{x^2}(x^3-1)\left(x^3-1+3x\right)$$

d)

$$y' = \cos 2x \cdot 2 \cdot (\cos 4x + 2) + \sin 2x \cdot (-\sin 4x \cdot 4) =$$
$$= 2 \cdot \cos 2x \cdot (\cos 4x + 2) - 4\sin 2x \cdot \sin 4x$$

4113

Se exempel 3.

Volymen av en kon med höjden *h* är

$V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 \cdot h$ där både *r* och *h* förändras med tiden *t*.

Likformighet ger $\dfrac{r}{h} = \dfrac{4{,}0}{6{,}0} = \dfrac{2}{3}$ $\quad dvs.\ r = \dfrac{2}{3} \cdot h$

$$V = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{2}{3}h\right)^2 \cdot h = \frac{1}{3}\pi\frac{4}{9}h^3 = \frac{4}{27}\pi h^3$$
$$\Rightarrow \frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh} \cdot \frac{dh}{dt} = \frac{4}{27}\pi \cdot 3h^2 \cdot \frac{dh}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{dV}{dt} \cdot \frac{27}{12\pi h^2}$$

Givet:

$$\frac{dV}{dt} = 2 \text{ l/min} = 0{,}002 \text{ m}^3/\text{min}$$

=>

$$\frac{dh}{dt} = 0{,}002 \cdot \frac{27}{12\pi h^2} \text{ m/min} = \frac{0{,}0045}{\pi h^2} \text{ m/min}$$

$$h = 2 \text{ dm} \Rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{0{,}0045}{\pi \cdot 0{,}2^2} \text{ m/min} = 3{,}6 \text{ cm/min}$$

4114

Se exempel 2.

$A = \pi r^2$ där r är en funktion av tiden t.

$$\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{dr} \cdot \frac{dr}{dt} = 2\pi r \cdot \frac{dr}{dt}$$

Givet: $\frac{dr}{dt} = 1{,}2$ dm/s

$\Rightarrow r = 4{,}8$ dm efter $4{,}0$ s.

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi \cdot 4{,}8 \cdot 1{,}2 \text{ dm}^2/\text{s} = 36 \text{ dm}^2/\text{s}$$

4115

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot x$ där både r och x förändras med tiden.

Givet $x = \frac{1}{2} \cdot 2r \Rightarrow x = r$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3}\pi x^3$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dV}{dt} = 0{,}4 \text{ m}^3$$

$$\frac{dV}{dx} = \pi x^2$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{\frac{dV}{dt}}{\frac{dV}{dx}} = \frac{0{,}4}{\pi x^2} = \frac{0{,}4}{\pi \cdot 2^2} \text{ m/s} = 0{,}032 \text{ m/s}$$

4116

a)

$$V = \frac{4\pi r^3}{3}$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dr} \cdot \frac{dr}{dt}$$

Givet: $\frac{dV}{dt} = 150 \text{ cm}^3 = 0{,}000150 \text{ m}^3$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\frac{dV}{dt}}{\frac{dV}{dr}} = \frac{0{,}000150}{4\pi r^2} = \frac{0{,}000150}{4\pi \cdot 0{,}25^2} \text{ m/min} =$$

$$= 1{,}9 \cdot 10^{-4} \text{ m/min}$$

b) $A = 4\pi \cdot r^2$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{dr} \cdot \frac{dr}{dt} = 8\pi r \cdot 1{,}9 \cdot 10^{-4} =$$

$$= 8\pi \cdot 0{,}25 \cdot 1{,}9 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2/\text{min} =$$

$$= 1{,}2 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2/\text{min} = 12 \text{ cm}^2/\text{min}$$

4117

Rita figur. Halva toppvinkeln = 45°.

$$\Rightarrow \frac{r}{h} = \tan 45° \Rightarrow r = h$$

$$\frac{dV}{dt} = 2{,}5 \text{ dm}^3/\text{min}$$

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h$$

där både r och h förändras med t.

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh} \cdot \frac{dh}{dt}$$
$$2{,}5 = \pi h^2 \cdot \frac{dh}{dt}$$
$$=> \frac{dh}{dt} = \frac{2{,}5}{\pi \cdot 3^2} \text{dm/min} = 8{,}8 \text{ mm/min}$$

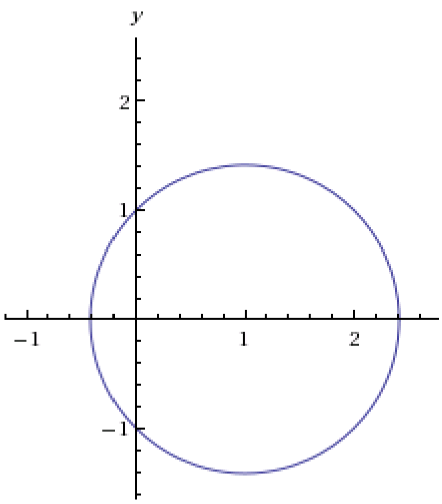
4118
Se facit.

4125
$$2x + 2y \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{2y} = \left[(-1;\ 1)\right] = -\frac{2 \cdot (-1)}{2 \cdot (-1)} = -1$$
$$y = -1 \cdot x + m$$
$$-1 = -1 \cdot -1 + m \quad => m = -2$$

4126
Se facit.

4127
Se facit.

4128
Skissa figur. En cirkel med medelpunkten (1; 0) och radien $\sqrt{2}$. Jämför $x^2 + y^2 = r^2$.



$$2(x-1) + 2y \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2(x-1)}{2y} = -\frac{(x-1)}{y} = 1$$
$$=> y = 1 - x$$

$$=> (x-1)^2 + (1-x)^2 = 2$$
$$x^2 - 2x + 1 + 1 - 2x + x^2 = 2$$
$$x^2 - 2x = 0$$
$$x = 0 \ \ eller \ \ x = 2$$
Studera cirkeln:
$$=> (0,\ 1) \text{ och } (2,\ -1)$$

4129
$$2x + 1 \cdot y + x \cdot \frac{dy}{dx} + 6y^2 \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$
$$\frac{dy}{dx}(x + 6y^2) = -2x - y$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x - y}{(x + 6y^2)} = \left[(-2;\ 1)\right] = \frac{-2(-2) - 1}{(-2 + 6 \cdot 1)} =$$
$$= \frac{-2 \cdot (-2) - 1}{(-2 + 6 \cdot 1)} = \frac{3}{4}$$

4130
Se facit.

4131
Se exempel 2 s. 165.

$$v = \frac{dx}{dt}$$
$$y^2 = 300^2 + x^2$$

Söker $\frac{dy}{dt}$.

$$2y \cdot \frac{dy}{dt} = 0 + 2x \cdot \frac{dx}{dt} \quad =>$$
$$\frac{dy}{dt} = \frac{x}{y} \cdot \frac{dx}{dt}$$

a)

$x = 300 \;=>$

$y = \sqrt{300^2 + 300^2} = 424$

$=> \frac{dy}{dt} = \frac{300}{424} \cdot 50 \text{ m/min} = 35 \text{ m/min}$

b)

$x = 400 \;=>$

$y = \sqrt{300^2 + 400^2} = 500$

$=> \frac{dy}{dt} = \frac{400}{500} \cdot 50 \text{ m/min} = 40 \text{ m/min}$

4132

Givet: $\frac{dx}{dt} = 1{,}5 \text{ m/s}$

$y = \pm\sqrt{x}$

Endast positiva lösningen intressant:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} = \left[x = 4\right] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = 0{,}25 \cdot 1{,}5 \text{ m/s} = 0{,}38 \text{ m/s}$$

4133

Givet: $\frac{dy}{dt} = 200 \text{ m/s}$ på 1 000 meters höjd.

Söker $\frac{dx}{dt}$.

$x^2 = y^2 + 1500^2$

Derivera med avseende på t:

$$2x \cdot \frac{dx}{dt} = 2y \cdot \frac{dy}{dt} \;=>$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{y}{x} \cdot \frac{dy}{dt}$$

Då y = 1000 m blir

$x = \sqrt{1000^2 + 1500^2} \text{ m} = 1803 \text{ m}$

$=> \frac{dy}{dt} = \frac{1000}{1803} \cdot 200 \text{ m/s} = 110 \text{ m/s} \;\; (111)$

4134

$\frac{dx}{dt} = 0{,}04 \text{ m/s}$ Söker $\frac{dy}{dt}$.

Positiv riktning uppåt.

$$5^2 = x^2 + y^2 \;=> 2y \cdot \frac{dy}{dt} = -2x \cdot \frac{dx}{dt}$$

$$=> 2y \cdot \frac{dy}{dt} = -2x \cdot \frac{dx}{dt}$$

$$=> \frac{dy}{dt} = -\frac{x}{y} \cdot \frac{dx}{dt} = \left[x = 3 \;=> y = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4\right] =$$

$$= -\frac{3}{4} \cdot 0{,}04 \text{ m/s} = -0{,}03 \text{ m/s}$$

4135

Skissa figur. Givet: $y = 5000$ m. $\frac{dx}{dt} = 540 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Efter en minut är $x = \frac{540}{60} \frac{\text{km}}{\text{min}} \cdot 1 \text{ min} = 9 \text{ km}$

Kalla avståndet mellan flygfyren och planet för z. Söker $\frac{dz}{dt}$.

Derivera $z^2 = x^2 + y^2$ med avseende på t:

$$2z \cdot \frac{dz}{dt} = 2x \cdot \frac{dx}{dt} + 2y \cdot \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dy}{dt} = 0 \;=>$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{x}{z} \cdot \frac{dx}{dt} = \left[z = \sqrt{5^2 + 9^2} \text{ km} = 10{,}3 \text{ km}\right] =$$

$$= \frac{9}{10{,}3} \cdot 540 \text{ km/h} = \frac{9}{10{,}3} \cdot 540 \text{ km/h} = 470 \text{ km/h}$$

4204

a)

$$... = \lim_{t\to\infty}\int_2^t \frac{2}{x^5}dx = \lim_{t\to\infty}\left[-\frac{1}{2}\cdot x^{-4}\right]_2^t =$$

$$= \lim_{t\to\infty}\left(-\frac{1}{2}\cdot t^{-4}+\frac{1}{2}\cdot 2^{-4}\right) = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$$

b)

$$... = \lim_{t\to\infty}\int_0^t \frac{4}{(2x+1)^3}dx = \lim_{t\to\infty}\left[-(2x+1)^{-2}\right]_0^t =$$

$$= \lim_{t\to\infty}\left(-(2t+1)^{-2}+(1)^{-2}\right) = 1$$

c)

$$... = \lim_{t\to\infty}\int_0^t 3e^{-2x}\,dx = \lim_{t\to\infty}\left[-\frac{3}{2}\cdot e^{-2x}\right]_0^t =$$

$$= \lim_{t\to\infty}\left(-\frac{3}{2}\cdot e^{-2t}+\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}$$

d)

$$... = \lim_{t\to\infty}\int_4^t \frac{2}{x\sqrt{x}}dx = \lim_{t\to\infty}\left[-4\cdot x^{-\frac{1}{2}}\right]_4^t =$$

$$= \lim_{t\to\infty}\left(-4\cdot t^{-\frac{1}{2}}+4\cdot 4^{-\frac{1}{2}}\right) = 2$$

e)

$$... = \lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{2}{\sqrt{x}}dx = \lim_{t\to\infty}\left[4\cdot\sqrt{x}\right]_1^t =$$

$$= \lim_{t\to\infty}\left(4\cdot\sqrt{t}+4\cdot 1\right) = \infty \quad \text{(gränsvärde saknas)}$$

f)

$$... = \lim_{t\to-\infty}\int_t^1 e^{2x}dx = \lim_{t\to-\infty}\left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_t^1 =$$

$$= \lim_{t\to-\infty}\left(\frac{1}{2}e^2+\frac{1}{2}e^{2\cdot t}\right) = \frac{e^2}{2}$$

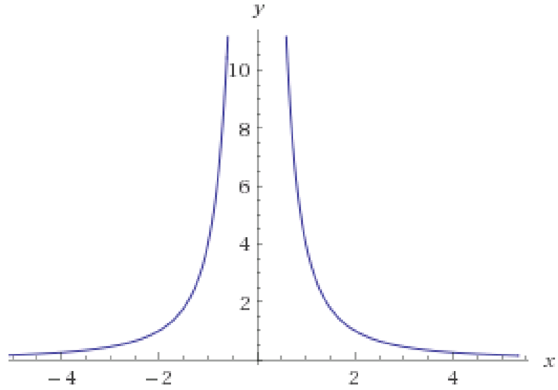
4205

Se facit.

4206

$$... = \left[2x^{\frac{1}{2}}\right]_0^1 = 2\cdot\sqrt{1}-0 = 2$$

4207



$$4 = \int_a^\infty \frac{4}{x^2}dx = \lim_{t\to\infty}\int_a^t \frac{4}{x^2}dx =$$

$$= \lim_{t\to\infty}\left[-4x^{-1}\right]_a^t = \lim_{t\to\infty}\left(-4\cdot\frac{1}{t}+4\cdot\frac{1}{a}\right) =$$

$$= \frac{4}{a} \quad => a = 1.$$

4208

$$... = \lim_{t\to\infty}\int_1^t x^{-k}\,dx = \lim_{t\to\infty}\left[-\frac{1}{k+1}x^{-k+1}\right]_1^t =$$

$$= \lim_{t\to\infty}\left(-\frac{1}{k+1}t^{-k+1}+\frac{1}{k+1}1^{-k+1}\right) =$$

$$= \lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{k+1}(1-t^{-k+1})\right) = \lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{k+1}(1-\frac{1}{t^{k-1}})\right)$$

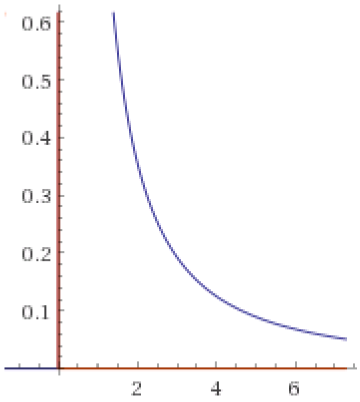
För $k \le 1$ är integralen divergent ty

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t^{k-1}} = \lim_{t\to\infty} t^{-k+1} = \infty.$$

För $k > 1$ är integralen konvergent ty

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t^{k-1}} = \lim_{t\to\infty} t^{-k+1} = 0$$

4213



$$r = \frac{1}{x\sqrt{x}} \quad \Rightarrow$$

Arean av ett godtyckligt tvärsnitt är

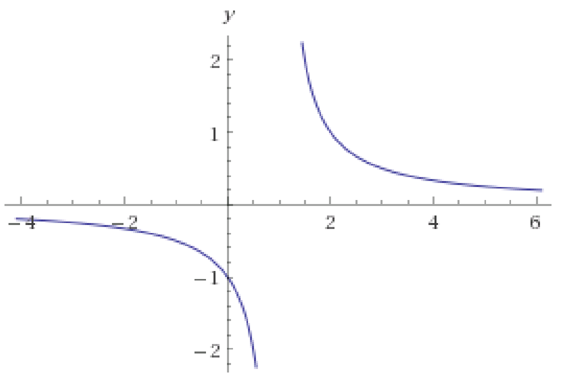
$$\pi r^2 = \pi \cdot \left(\frac{1}{x\sqrt{x}}\right)^2 =$$

$$= \pi \cdot \frac{1}{x^3}$$

$$V = \int_2^\infty \pi x^{-3} dx = \lim_{t\to\infty}\left[-\frac{\pi}{2}x^{-2}\right]_2^t =$$

$$= \lim_{t\to\infty}\left(-\frac{\pi}{2}t^{-2} + \frac{\pi}{2}2^{-2}\right) = \frac{\pi}{8} \text{ v.e}$$

4214



$r = \dfrac{1}{x-1}$. Arean av ett godtyckligt tvärsnitt:

$$\pi r^2 = \pi \cdot \frac{1}{(x-1)^2}$$

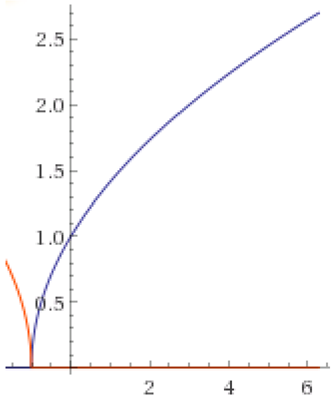
$$V = \int_2^\infty \pi (x-1)^{-2}\, dx = \lim_{t\to\infty}\left[-\pi (x-1)^{-1}\right]_2^t =$$

$$= \lim_{t\to\infty}\left(-\pi \cdot \frac{1}{t-1} + \pi \cdot \frac{1}{2-1}\right) = \pi \text{ v.e}$$

4215

Se facit.

4216



$$r = \sqrt{x+1}$$

Arean av ett godtyckligt tvärsnitt är

$$\pi r^2 = \pi \cdot (x+1)$$

$$V = \int_{-1}^{3} \pi (x+1)\, dx = \pi\left[\frac{x^2}{2} + x\right]_{-1}^{3} =$$

$$= \pi\left(\frac{3^2}{2} + 3 - \left(\frac{(-1)^2}{2} - 1\right)\right) \text{v.e} =$$

$$= \pi\left(\frac{9}{2} + 3 - \frac{1}{2} + 1\right) \text{ v.e} = 8\pi \text{ v.e}$$

4217

$$V = \int_{-1}^{a} \pi (x+1)\, dx = \pi\left[\frac{x^2}{2} + x\right]_{-1}^{a} =$$

$$= \pi\left(\frac{a^2}{2} + a - \left(\frac{(-1)^2}{2} - 1\right)\right) \text{v.e} =$$

$$= \pi\left(\frac{a^2}{2} + a - \frac{1}{2} + 1\right) \text{ v.e} = \pi\left(\frac{a^2}{2} + a + \frac{1}{2}\right) \text{ v.e}$$

Lös ekvationen

$$\pi(\frac{a^2}{2}+a+\frac{1}{2})=16\pi$$

=>

$$\frac{a^2}{2}+a-\frac{31}{2}=0$$

$$a^2+2a-31=0$$

$$a=-1\pm\sqrt{1+31}$$

$=> a=\sqrt{32}-1=4\sqrt{2}-1$ ty endast positiva roten aktuell.

4222

Se exempel 2.

a)

$$f(t)=\frac{5200}{(1+t)^2}\text{ bakterier/timme}$$

$$5200\cdot\int_0^2(1+t)^{-2}dt=5200\left[-(1+t)^{-1}\right]_0^2=$$

$$=5200\cdot(-(1+2)^{-1}+(1+0)^{-1})\text{ bakterier }=$$

$$=3470\text{ bakterier}$$

b)

$$5200\cdot\lim_{t\to\infty}\int_0^t(1+t)^{-2}dt=5200\cdot\lim_{t\to\infty}\left[-(1+t)^{-1}\right]_0^t=$$

$$=5200\cdot(0+1)\text{ bakterier }=5200\text{ bakterier}$$

4223

$$0{,}001\cdot\int_0^\infty e^{-0{,}05t}dt=0{,}001\cdot\lim_{t\to\infty}\int_0^t e^{-0{,}05t}dt=$$

$$=0{,}001\cdot\lim_{t\to\infty}\left[-\frac{e^{-0{,}05t}}{0{,}05}\right]_0^t=0{,}02\cdot\lim_{t\to\infty}\left[-e^{-0{,}05t}\right]_0^t=$$

$$=0{,}02\cdot(0+1)\text{ g}=0{,}02\,\mu\text{g}=20$$

Facit har 0,02 mikrogram. Enheten i uppgiftsformuleringen bör ändras till µg/dygn.

4224

$$4{,}41\cdot10^{-5}\cdot\int_0^\infty 0{,}956^t\,dt=4{,}41\cdot10^{-5}\cdot\lim_{t\to\infty}\int_0^t 0{,}956^t\,dt=$$

$$=\left[\text{se formelsamling}\right]=4{,}41\cdot10^{-5}\cdot\lim_{t\to\infty}\left[\frac{0{,}956^t}{\ln 0{,}956}\right]_0^t=$$

$$=4{,}41\cdot10^{-5}\cdot(0-\frac{1}{\ln 0{,}956})\text{ C}=0{,}98\text{ mC}$$

Fel i facit.

4225

Se facit.

4306

a)

$$\ldots=\frac{x+1+1-1}{x+2}=\frac{x+2-1}{x+2}=$$

$$=1-\frac{1}{x+2}$$

b)

$$\ldots=\frac{x-2+1-1}{x+1}=\frac{x+1-3}{x+1}=$$

$$=1-\frac{3}{x+1}$$

c)

$$\ldots=\frac{x+1-3+3}{x-3}=\frac{x-3+4}{x-3}=$$

$$=1+\frac{4}{x-3}$$

4307

a) $\frac{x+1}{(x-2)(x-1)}=\frac{a}{(x-2)}+\frac{b}{(x-1)}$

$$\frac{x+1}{(x-2)(x-1)}=\frac{a(x-1)}{(x-2)(x-1)}+\frac{b(x-2)}{(x-2)(x-1)}=$$

$$=\frac{ax-a}{(x-2)(x-1)}+\frac{bx-2b}{(x-2)(x-1)}$$

=>

$$\frac{(a+b)x-a-2b}{(x-2)(x-1)}=\frac{x+1}{(x-2)(x-1)}$$

$$\begin{cases} a+b=1 \\ -a-2b=1 \end{cases}$$

$=> b=-2 \quad => a=3$

Dvs. $\frac{3}{(x-2)}-\frac{2}{(x-1)}$

b) $\frac{4}{x(x-4)}=\frac{a}{x}+\frac{b}{(x-4)}$

$$\frac{4}{x(x-4)}=\frac{a(x-4)}{x(x-4)}+\frac{bx}{x(x-4)}=$$

$$=\frac{ax-4a+bx}{x(x-4)}=\frac{(a+b)x-4a}{x(x-4)}$$

$$\begin{cases} a+b=0 \\ a=-1 \end{cases} => b=1$$

dvs. $-\frac{1}{x}+\frac{1}{x-4}$

c) $\frac{2x+5}{x(x-5)}=\frac{a}{x}+\frac{b}{(x-5)}$

$$\frac{a}{x}+\frac{b}{(x-5)}=\frac{a(x-5)}{x(x-5)}+\frac{bx}{x(x-5)}=$$

$$=\frac{(a+b)x-5a}{x(x-5)}$$

$$\begin{cases} a+b=2 \\ -5a=5 => a=-1 \quad => b=3 \end{cases}$$

dvs. $-\frac{1}{x}+\frac{3}{(x-5)}$

4308

$$\frac{1-x}{(x+2)^2}=\frac{a}{x+2}+\frac{b}{(x+2)^2}=$$

$$=\frac{a(x+2)}{(x+2)^2}+\frac{b}{(x+2)^2}=$$

$$=\frac{ax+2a+b}{(x+2)^2}$$

$$\begin{cases} a=-1 \\ 2a+b=1 \quad => b=3 \end{cases}$$

Dvs. $-\frac{1}{x+2}+\frac{3}{(x+2)^2}$

4309

a)

$$\frac{x}{(x-1)^2}=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{(x-1)^2}=$$

$$=\frac{a(x-1)}{(x-1)^2}+\frac{b}{(x-1)^2}=$$

$$=\frac{ax-a+b}{(x-1)^2}$$

$$\begin{cases} a=1 \\ -a+b=- \quad => b=1 \end{cases}$$

Dvs. $\frac{1}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}$

b) På samma sätt som ovan.

4313

a)

$$\frac{x+4}{(x-2)(x+1)}=\frac{A}{(x-2)}+\frac{B}{(x+1)}=$$

$$=\frac{A(x+1)}{(x-2)(x+1)}+\frac{B(x-2)}{(x-2)(x+1)}=$$

$$=\frac{Ax+A+Bx-2B}{(x-2)(x+1)}=\frac{(A+B)x+A-2B}{(x-2)(x+1)}$$

$$\begin{cases} A+B=1 \\ A-2B=4 \end{cases}$$

$3B=-3 \quad => \quad B=-1 \quad => A=2$

b)

$$\int_0^1\left(\frac{2}{(x-2)}-\frac{1}{(x+1)}\right)dx=$$

$$=\int_0^1 2(x-2)^{-1}-(x+1)^{-1}\ dx=$$

$$=\Big[2\ln|x-2|-\ln|x+1|\Big]_0^1=$$

$$=\Big[2\ln|1-2|-\ln|1+1|-2\ln|0-2|+\ln|0+1|\Big]_0^1=$$

$$=0-\ln 2-2\ln 2+0=-3\ln 2$$

4314

a) $... = 2\int (x+2)^{-1}dx = 2\ln|x+2| + C$

b)

$$\frac{2}{x(x+2)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+2} =$$
$$= \frac{a(x+2)}{x(x+2)} + \frac{bx}{x(x+2)} =$$
$$= \frac{a(x+2)+bx}{x(x+2)} = \frac{(a+b)x+2a}{x(x+2)}$$

$$\begin{cases} a+b=0 \\ 2a=2 \quad => a=1 \quad => b=-1 \end{cases}$$

$$... = \int\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{(x+2)}\right)dx =$$
$$= \ln|x| - \ln|x+2| + C$$

c) Partialbråksuppdelning (addera +1 och –1 i täljaren) ger:

$$\int\left(1 - \frac{1}{x+1}\right)dx = x - \ln|x+1| + C$$

d) Partialbråksuppdelning (addera +4 och -4 i täljaren) ger:

$$2\int 1 + \frac{2}{x-2}dx = 2x + 4\ln|x-2| + C$$

4315

Partialbråksuppdelning ger

$$\int_5^{e+4}\left(1 + \frac{4}{x-4}\right)dx = \left[x + 4\ln|x-4|\right]_5^{e+4} =$$
$$= e + 4 + 4\ln|e| - 5 - 4\ln|1| = e + 3$$

4316

a) Partialbråksuppdelning (ansätt

$... = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+2}$) ger

$$\int\left((x-1)^{-1} + (x+2)^{-1}\right)dx =$$
$$= \ln|x-1| + \ln|x+2| + C$$

Teckenfel i facit i a-uppgiften.

b) Partialbråksuppdelning (ansätt

$... = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{(x+2)^2}$) ger

$$\frac{2x}{(x+2)^2} = \frac{ax+2a+b}{(x+2)^2}$$

$$\begin{cases} a=2 \\ 2a+b=0 \quad => b=-4 \end{cases}$$

$$\int\left(\frac{2}{x+2} - \frac{4}{(x+2)^2}\right)dx =$$
$$= 2\ln|x+2| + 4\cdot(x+2)^{-1} + C$$

c) Faktorisera nämnaren:

$$x^2 + x - 6 = 0$$
$$x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{0,25+6}$$

Partialbråksuppdelning:

$$\frac{2x+1}{(x-2)(x+3)} = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x+3}$$
$$=> a = 1 \text{ och } b = 1$$

$$\int\left(\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+3}\right)dx = \ln|x-2| + \ln|x+3| + C$$

d) Partialbråksuppdelning:

$$\frac{4x}{(1-2x)^2} = \frac{a}{(1-2x)} + \frac{b}{(1-2x)^2} = \frac{a-2ax+b}{(1-2x)^2}$$

$$\begin{cases} -2a=4 \quad => a=-2 \\ a+b=0 => b=2 \end{cases}$$

$$\int\left(\frac{-2}{1-2x} + \frac{2}{(1-2x)^2}\right)dx = 2\int\left(\frac{1}{2x-1} + \frac{1}{(1-2x)^2}\right)dx$$
$$= 2\left[\frac{1}{2}\ln|2x-1| + \frac{1}{2}(1-2x)^{-1}\right] = \ln|2x-1| - \frac{1}{2x-1} + C$$

4317

$$\int_2^5 \left(\frac{1}{x-1}+\frac{4}{(x-1)^2}\right)dx =$$
$$=\left[\ln|x-1|-4\cdot(x-1)^{-1}\right]_2^5 =$$
$$=\left[\ln 4-4\cdot\frac{1}{4}-\ln 1+4\cdot 1\right]=\ln 4+3$$

4318

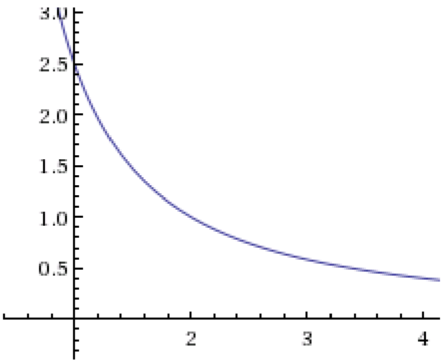
Partialbråksuppdela. Ansätt

$$\frac{x+4}{(x+1)(x+2)}=\frac{a}{(x+1)}+\frac{b}{(x+2)}.$$

=>

$$\int_0^1 \left(\frac{3}{x+1}-\frac{2}{x+2}\right)dx =$$
$$\left[2\ln|x+1|-2\ln|x+2|\right]_0^1 =$$
$$=2\ln 2-2\ln 3-2\ln 1+2\ln 2=$$
$$=4\ln 2-2\ln 3=\ln\frac{2^4}{3^2}=\ln\frac{32}{9}$$

4319



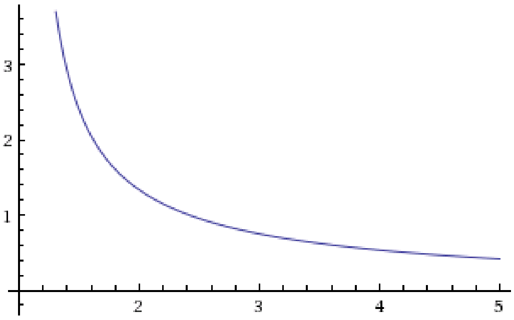
Partialbråksuppdela =>

$$\frac{x+4}{x(x+1)}=\frac{4}{x}-\frac{3}{x+1}$$

$$\int_1^e \left(\frac{4}{x}-\frac{3}{x+1}\right)dx =\left[4\ln|x|-3\ln|x+1|\right]_1^e =$$
$$=4-3\ln(e+1)-4\cdot 0+3\ln 2 \text{ a.e} =$$
$$=4+3\ln\frac{2}{e+1} \text{ a.e}$$

4320

Plot:



Partialbråksuppdelning ger

$$\frac{2x}{x^2-1}=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}.$$

$$\int_2^4 \left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}\right)dx =\left[\ln|x+1|-\ln|x-1|\right]_2^4 =$$
$$=\ln 5-\ln 3-\ln 1+\ln 3 \text{ a.e}=\ln 5 \text{ a.e}$$

4325

Skall stå: Tänk på att ln *x* = 1 · ln *x* = ln *x* · 1 i uppgiften.

Se exempel 1.

$$\int \ln(x)\cdot 1\, dx=\ln(x)\cdot x-\int\frac{1}{x}\cdot x\, dx =$$
$$=x\ln(x)-x+C$$

I facit saknas konstanten *C*.

4326

a)

$$\ldots = \ln|x|\cdot\frac{x^2}{2}-\int\frac{1}{x}\cdot\frac{x^2}{2}dx =$$
$$=\ln|x|\cdot\frac{x^2}{2}-\frac{x^2}{4}+C$$

b)

$$\ldots=\ln|2x|\cdot x-\int 2\cdot\frac{1}{2x}\cdot x\, dx =$$
$$=x\ln|2x|-x+C$$

c)

$$\ldots = \ln x^2 \cdot x - \int 2x \cdot \frac{1}{x^2} \cdot x\,dx =$$
$$= x\ln x^2 - 2x + C$$

4327

Utnyttja uppgift 4326a:

$$\ldots = \left[\ln|x| \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{4}\right]_1^2 =$$
$$= \frac{4}{2} \cdot \ln 2 - 1 - \frac{1}{2}\ln 1 + \frac{1}{4} = 2\ln 2 - \frac{3}{4}$$

4328

$$\ldots = \int \ln x \cdot x^2 dx = \ln x \cdot \frac{x^3}{3} - \int \frac{1}{x} \cdot \frac{x^3}{3} dx =$$
$$= \frac{x^3}{3} \cdot \ln x - \int \frac{x^2}{3} dx = \frac{x^3}{3} \cdot \ln x - \frac{x^3}{9} + C$$

$$\left[\frac{x^3}{3} \cdot \ln x - \frac{x^3}{9}\right]_1^e = \frac{e^3}{3} \cdot \ln e - \frac{e^3}{9} - \frac{1}{3} \cdot \ln 1 + \frac{1}{9} =$$
$$= \frac{e^3}{3} - \frac{e^3}{9} + \frac{1}{9} = \frac{3e^3}{9} - \frac{e^3}{9} + \frac{1}{9} = \frac{2e^3+1}{9}$$

b)

$$\ldots = \int \ln x^2 \cdot x^2 dx =$$
$$= \ln x^2 \cdot \frac{x^3}{3} - \int 2x \cdot \frac{1}{x^2} \cdot \frac{x^3}{3} dx =$$
$$= \frac{x^3}{3} \cdot \ln x^2 - \int \frac{2x^2}{3} dx =$$
$$= \frac{x^3}{3} \cdot \ln x^2 - \frac{2x^3}{9} + C$$

=>

$$\left[\frac{x^3}{3} \cdot \ln x^2 - \frac{2x^3}{9}\right]_1^e =$$
$$= \frac{e^3}{3} \cdot \ln e^2 - \frac{2e^3}{9} - \frac{1^3}{3} \cdot \ln 1^2 + \frac{2 \cdot 1^3}{9} =$$
$$= \frac{2 \cdot 3e^3}{3 \cdot 3} - \frac{2e^3}{9} + \frac{2}{9} = 2 \cdot \frac{2e^3+1}{9}$$

c)

$$\ldots = \int \ln \frac{1}{x} \cdot x^2 dx = \ln \frac{1}{x} \cdot \frac{x^3}{3} - \int x \cdot (\frac{-1}{x^2}) \cdot \frac{x^3}{3} dx =$$
$$= \ln \frac{1}{x} \cdot \frac{x^3}{3} + \int \frac{x^2}{3} dx = \ln \frac{1}{x} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{x^3}{3 \cdot 3} + C$$

$$\left[\ln \frac{1}{x} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{x^3}{9}\right]_1^e = \frac{e^3}{3} \ln \frac{1}{e} + \frac{e^3}{9} - \frac{1^3}{3} \ln 1 - \frac{1^3}{9} =$$
$$= \frac{e^3}{3}(\ln 1 - \ln e) + \frac{e^3}{9} - \frac{1}{9} = -\frac{e^3}{3} + \frac{e^3}{9} - \frac{1^5}{9} =$$
$$= \frac{-2e^3 - 1}{9} = -\frac{2e^3+1}{9}$$

4329

a)

$$-x^2 \cdot \cos x - \int 2x \cdot (-\cos x)\,dx =$$
$$= -x^2 \cdot \cos x + \int 2x \cdot \cos x\,dx =$$
$$= -x^2 \cdot \cos x + 2x \cdot \sin x - \int 2\sin x\ dx =$$
$$= -x^2 \cdot \cos x + 2x \cdot \sin x - 2(-\cos x) =$$
$$= -x^2 \cdot \cos x + 2x \cdot \sin x + 2\cos x + C$$

b) och c) samma metod som i a-uppgiften.

4330

Vi integrerar partiellt två gånger om (enligt satsen på s. 181 med $f(x) = \sin x$ och $g(x) = e^x$)

$$\int e^x \sin x\,dx = e^x \sin x - \int e^x \cos x\,dx + C_1 =$$
$$= e^x \sin x - \left(e^x \cos x - \int e^x(-\sin x)\,dx + C_2\right) + C_1 =$$
$$= e^x(\sin x - \cos x) - \int e^x \sin x\,dx + C$$

där $C = C_1 - C_2$.

Vi får alltså att

$$\int e^x \sin x\,dx = e^x(\sin x - \cos x) - \int e^x \sin x\,dx + C$$
$$\Rightarrow 2\int e^x \sin x\,dx = e^x(\sin x - \cos x) + C$$
$$\Rightarrow \int e^x \sin x\,dx = \frac{1}{2} e^x(\sin x - \cos x) + C$$

4405

$$\left[f'(x) = 1 \cdot x^{\frac{1}{2}} + x \cdot \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} \right]$$

$$S = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx = \int_0^5 \sqrt{1 + \frac{9}{4} x}\ dx =$$

$$= \left[\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{9} (1 + \frac{9}{4} x)^{\frac{3}{2}} \right]_0^5 = (\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{9} (1 + \frac{9}{4} \cdot 5)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{9})\ \text{l.e} =$$

$$= (\frac{8}{27} \cdot \frac{49}{4} \cdot (\frac{49}{4})^{\frac{1}{2}} - \frac{8}{27})\ \text{l.e} =$$

$$= (\frac{8}{27} \cdot \frac{49}{4} \cdot \frac{7}{2} - \frac{8 \cdot 4 \cdot 2}{27 \cdot 4 \cdot 2}) \text{l.e} =$$

$$= (\frac{8}{27} \cdot \frac{49}{4} \cdot \frac{7}{2} - \frac{8 \cdot 4 \cdot 2}{27 \cdot 4 \cdot 2})\ \text{l.e} =$$

$$= \frac{2680}{216}\ \text{l.e} \quad (= 335/27)$$

4406

$$f'(x) = \frac{3x^2}{6} - 2 \cdot (2x)^{-2} = \frac{x^2}{2} - \frac{2}{(2x)^2}$$

$$(f'(x))^2 = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \cdot \frac{2}{(2x)^2} - \frac{x^2}{2} \cdot \frac{2}{(2x)^2} + \frac{4}{(2x)^4} =$$

$$= \frac{x^4}{4} - x^2 \cdot \frac{2}{(2x)^2} + \frac{4}{(2x)^4} = \frac{x^4}{4} - \frac{1}{2} + \frac{4}{(2x)^4}$$

Utnyttja digitalt hjälpmedel => 17/12 l.e

$$\int_1^2 \sqrt{\frac{1}{2} + \left(\frac{x^4}{4} + \frac{4}{(2\,x)^4} \right)}\ dx = \frac{17}{12} \approx 1.4167$$