Lösningar och kommentarer till uppgifter

Detta dokument innehåller svar, lösningar och/eller kommentarer till uppgifter ur läroboken *Introduktion till högre studier i matematik* (andra upplagan, ISBN 978-9-14-711336-1). I de fall då något korrekturfel föreligger i de svar som ges i den tryckta versionen är dessa förhoppningsvis rättade här, utan att detta i så fall särskilt kommenteras. Om svaret som ges i den tryckta boken skiljer sig från det svar som ges i föreliggande dokument är det alltså sannolikt i den tryckta boken felet ligger.

Ett varningens ord: Det är frestande att ta del av ett lösningsförslag till en övningsuppgift man fastnat på. I vissa fall kan detta vara lämpligt, men det kan också ge en falsk känsla av säkerhet. Även om man kan läsa och förstå ett lösningsförslag innebär detta inte nödvändigtvis att man skulle kunna återskapa lösningen på egen hand. Använd därför dessa lösningsförslag på ett ansvarsfullt sätt.

Denna samling med lösningsförslag uppdaterades senast 3 november 2018. Alla kommentarer mottas tacksamt!

Författarna
`robert.johansson@umu.se`
`lars-daniel.ohman@umu.se`

Kapitel 1

Grunder

1.1 Tal

1. a) $5 = \dfrac{5}{1}$

   b) $\sqrt{4} = 2 = \dfrac{2}{1}$

   c) $0{,}1 = \dfrac{1}{10}$

   d) Vi förlänger bråket med 10 och får följande

   $$\frac{0{,}6}{7} = \frac{0{,}6 \cdot 10}{7 \cdot 10} = \frac{6}{70} = \frac{3}{35}$$

   e) Konjugatregeln ger

   $$(1 + \sqrt{2}) \cdot (1 - \sqrt{2}) = 1^2 - (\sqrt{2})^2 = 1 - 2 = -1 = \frac{-1}{1}$$

   f) Låt $x = 0{,}111111111111\ldots$ Då gäller att

   $$10x = 1{,}111111111111\ldots = 1 + x$$

   vilket ger $x = \dfrac{1}{9}$.

   g) $-0{,}31 = \dfrac{-31}{100}$

   h) Låt $x = 0{,}\overline{123}$. Då gäller att

   $$1000x = 123{,}\overline{123} = 123 + x$$

   vilket ger att $x = \dfrac{123}{999} = \dfrac{41}{333}$.

2. a) Vi räknar ut differensen mellan y och x genom att först göra dem liknämniga.

$$y - x = \frac{37}{17} - \frac{13}{7} = \frac{37 \cdot 7 - 13 \cdot 17}{17 \cdot 7} = \frac{38}{17 \cdot 7} > 0$$

Slutsatsen blir alltså att y är störst.

b) Eftersom både $x > 0$ och $y > 0$ så gäller att

$$x > y \Longleftrightarrow x^2 > y^2.$$

Detta är mycket användbart vid vissa storleksjämförelser.
Vi tittar därför istället på skillnaden mellan kvadraterna

$$\begin{aligned} y^2 - x^2 &= \left(\frac{577}{408}\right)^2 - (\sqrt{2})^2 = \frac{577^2}{408^2} - 2 = \\ &= \frac{577^2 - 2 \cdot 408^2}{408^2} = \frac{1}{408^2} > 0 \end{aligned}$$

Vi drar slutsatsen att $y^2 > x^2$ vilket alltså, i detta fall, ger att $y > x$.

c) Differensen $y - x$ blir

$$\frac{3}{5} - \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = \frac{11 - 5\sqrt{5}}{10}$$

vi kan avgöra om detta är positivt genom att undersöka täljaren. Är $11 - 5\sqrt{5}$ positivt eller negativt? Eftersom både 11 och $5\sqrt{5}$ är positiva så kan vi avgöra det genom att titta på kvadraterna. Vi får $11^2 = 121 < 125 = (5\sqrt{5})^2$. Vi kan alltså dra slutsatsen att $y < x$.

d) Båda talen är positiva så vi kan jämföra kvadraterna:

$$(2\sqrt{3})^2 - (\sqrt{13})^2 = 12 - 13 < 0$$

Detta ger att $y > x$.

3. Vi ska hitta a och b som uppfyller att $\sqrt{3 + \sqrt{8}} = a + \sqrt{b}$. Efter kvadrering av båda led får vi $3 + \sqrt{8} = a^2 + 2a\sqrt{b} + b$ vilket skulle kunna ge en lösning om $a^2 + b = 3$ och $2a\sqrt{b} = \sqrt{8}$. Kvadrering av den andra likheten ger följande två ekvationer:

$$\begin{aligned} a^2 + b &= 3 \\ 4a^2 b &= 8 \end{aligned}$$

Från detta kan vi sedan härleda att $\frac{2}{b} + b = 3$. Denna ekvation kan i sin tur skrivas om till ekvationen $b^2 - 3b + 2 = 0$, som har den positiva lösningen $b = 2$ (använd exempelvis pq-formeln). Vi får alltså $a = 1$ och

$b = 2$ som lösningar. Vi kan verifiera att detta verkligen stämmer genom att kvadrera:

$$(1+\sqrt{2})^2 = 1 + 2\sqrt{2} + 2 = 3 + 2\sqrt{2} = 3 + \sqrt{8}$$

Eftersom $1+\sqrt{2} > 0$ så drar vi slutsatsen att $1+\sqrt{2}$ är lika med $\sqrt{3+\sqrt{8}}$. Som en allmän regel är det alltid bra att kontrollera sina lösningar när man löst en ekvation, genom att sätta in lösningarna i ursprungsekvationen.

4. Två rationella tal a och b är givna. Per definition kan de då skrivas som $a = k/\ell$ och $b = m/n$ för några lämpliga heltal k, ℓ, m, n. Frågan är nu om $a+b$ är ett rationellt tal; det vill säga om man kan skriva $a+b$ som p/q för några lämpliga heltal p och q? Vi beräknar $a+b$ med hjälp av välkända räkneregler för heltal:

$$a + b = \frac{k}{\ell} + \frac{m}{n} = \frac{kn}{\ell n} + \frac{\ell m}{\ell n} = \frac{kn + \ell m}{\ell n}$$

   Eftersom k, ℓ, m, n är heltal, så är även $kn+\ell m$ och ℓn heltal. Om vi sätter $p = kn + \ell m$ och $q = \ell n$, så ser vi att $a+b$ kan skrivas som $a+b = p/q$, där p och q är heltal. Därför är $a+b$ rationellt, per definition. Eftersom a och b var godtyckliga rationella tal, så gäller detta för *varje* summa av två rationella tal.

5. Låt $a = \frac{n}{m}$ och $b = \frac{p}{q}$ vara två rationella tal, det vill säga att $n, p \in \mathbb{Z}$ och $m, q \in \mathbb{N}$. Produkten blir $ab = \frac{np}{mq}$ där $np \in \mathbb{Z}$ och $mq \in \mathbb{N}$ (produkten av två heltal blir alltid ett heltal och produkten av två naturliga tal blir alltid ett naturligt tal). Vi har alltså bevisat att produkten ab är kvoten av ett heltal och ett naturligt tal och därmed att det är ett rationellt tal.

6. Antag, för en motsägelse, att $2\sqrt{2} = \frac{n}{m}$ där $n \in \mathbb{Z}$ och $m \in \mathbb{N}$. Detta leder till slutsatsen att $\sqrt{2} = \frac{n}{2m}$ vilket betyder att $\sqrt{2}$ skulle vara ett rationellt tal. Vi har alltså härlett en motsägelse och kan därför konstatera att vårt antagande om att $2\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ måste vara felaktigt. Talet $2\sqrt{2}$ är alltså irrationellt.

   Notera att motsägelsebevis som bevismetod behandlas mer formellt och detaljerat i ett senare avsnitt i boken.

7. Vi antar att $rp \in \mathbb{Q}$ och härleder en motsägelse. Om detta gäller så kan vi skriva $rp = \frac{n}{m}$ där n är ett heltal och m ett naturligt tal. Talet r är rationellt så det går att skriva som $r = \frac{s}{t}$ där $s \neq 0$ är ett heltal och t ett naturligt tal. Om vi dividerar med r i det första uttrycket och sätter in denna kvot istället så får vi $p = \frac{tn}{sm}$. Om $s < 0$ så är inte talet i nämnaren ett naturligt tal men vi kan i det fallet byta tecken på täljaren och nämnaren utan att ändra värdet på p. Vi kan alltså dra slutsatsen att p är rationellt. Detta är en motsägelse, så antagandet att rp är rationellt måste vara felaktigt. Vi har alltså bevisat att rp alltid är irrationellt om $r \neq 0$ är rationellt och p är irrationellt.

8. Vi kan exempelvis ta $p = q = \sqrt{2}$ som är irrationellt. Vi får då att $pq = 2 \in \mathbb{Q}$. Det finns många andra tänkbara exempel.

9. Vi antar att man kan skriva $2 + \sqrt{2} = \frac{a}{b}$ för ett heltal a och ett naturligt tal b. Vi kan skriva om detta som $\sqrt{2} = \frac{a-2b}{b}$, men eftersom $a - 2b$ måste vara ett heltal får vi en motsägelse. Slutsatsen blir att $2 + \sqrt{2}$ måste vara irrationellt.

10. Om r och $r+p$ är rationella så kan vi skriva dem som $r = \frac{n}{m}$ och $r+p = \frac{s}{t}$. Vi får att $p = \frac{s}{t} - \frac{n}{m} = \frac{sm-nt}{tm}$ vilket ger att p är rationellt (med samma typ av resonemang som tidigare). Eftersom detta är en motsägelse så drar vi slutsatsen att $r + p$ måste vara irrationellt.

11. Vi antar att $c = \log_2(3) = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$. Logaritmlagarna ger att $2^c = 3 = 2^{\frac{a}{b}}$. Vi konstaterar först att $\frac{a}{b} = \log_2(3) > \log_2(1) = 0$ så både a och b är naturliga tal (b är ju det per definition). Vi kan sedan använda potenslagarna och skriva om likheten som $3^b = 2^a$. Detta leder till en motsägelse eftersom vänsterled är ett udda tal, oavsett vad heltalsexponenten b är, och högerled är ett jämnt tal, oavsett vad heltalsexponenten a är. Talet c är alltså irrationellt.

1.2 Mängdlära

1. a) $\{3, 5\}$ b) $\{1, 3, 5, 7, 8\}$ c) $\{3, 6\}$ d) $\{6\}$ e) $\{8\}$ f) $\{8\}$

2. Notera att mängden B kan skrivas som $B = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ och mängden A består av alla kvadrater av de naturliga talen, det vill säga $A = \{1^2, 2^2, 3^2, ...\}$.

   a) Eftersom $A \cap B$ består av alla kvadrater i B så får vi att $A \cap B = \{1, 4\}$.
   b) $C \cap B$ består av alla naturliga tal i B, det vill säga $C \cap B = \{1, 2, 3, 4\}$.
   c) $B \setminus A$ är mängden som vi får genom att ta bort alla kvadrater från B, det vill säga 1 och 4. Vi får mängden $\{-4, -3, -2, -1, 0, 2, 3\}$.
   d) Alla element i A finns i $D = \mathbb{Z}$ så vi får $A \setminus D = \emptyset$.
   e) När vi tar bort alla naturliga tal så försvinner allt som finns i mängden A och kvar blir de icke-positiva talen i mängden B. Vi får därför mängden $\{-4, -3, -2, -1, 0\}$
   f) Alla tal i $C \setminus A$ finns i $D = \mathbb{Z}$ så vi får $(C \setminus A) \setminus D = \emptyset$.

3. En mängd kan skrivas på många olika sätt. Här är några förslag:

   (a) $\{x \in \mathbb{R} : x > x^2\} = \{x \in \mathbb{R} : x \in (0, 1)\}$
   (b) $\{x : x = 2n + 1 \text{ för något } n \in \mathbb{Z}\}$
   (c) $\{x \in \mathbb{Q} : x^2 \in \mathbb{Z}\} = \{x \in \mathbb{Z} : x^2 \in \mathbb{Z}\}$

(d) $\{x \in \mathbb{R} : ax^2 + bx + c = 0 \text{ för några } a, b, c \in \mathbb{R}\}$

4. Delmängder till A: $\emptyset$, $\{a\}$, $\{e\}$, $\{a, e\}$

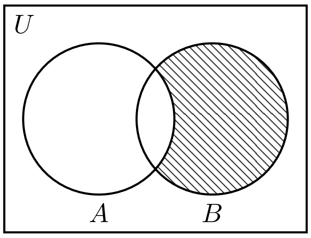
   Delmängder till B: $\emptyset$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{d\}$, $\{b, c\}$, $\{b, d\}$, $\{c, d\}$, $\{b, c, d\}$. A har fyra delmängder och B har 8 delmängder.

   En mängd med n element har 2^n delmängder. Vi låter d_n beteckna antalet delmängder i en mängd $\{x_1, ...x_n\}$ med n element. Vi delar upp delmängderna i två varianter, där D_1 är de som inte innehåller elementet x_n och D_2 är de som innehåller x_n. Man kan se att $|D_1| = |D_2| = d_{n-1}$ (varje delmängd i D_1 kan paras ihop med en delmängd i D_2 genom att ta bort eller lägga till x_n). Vi får alltså att $d_n = 2 \cdot d_{n-1}$ och om vi använder att $d_0 = 1$ (en mängd med noll element har tomma mängden som delmängd) så kan vi se att $d_n = 2^n \cdot d_0 = 2^n$.

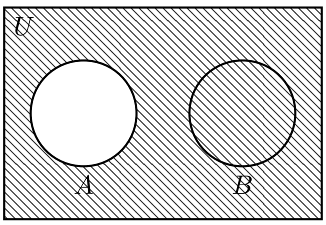
   Ett annat sätt att resonera är att man då man bildar en delmängd för vart och ett av de n elementen ska välja om det ska vara med i delmängden eller inte, alltså två valmöjligheter för vart och ett av elementen. Totalt får man då $2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2 = 2^n$ olika valmöjligheter, och därmed också 2^n olika delmängder.

5. Förslagsvis $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$.

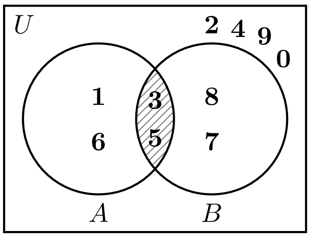
6.



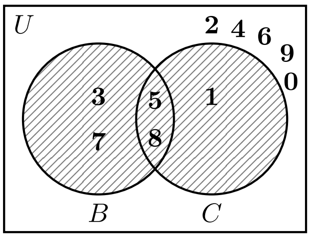
7.



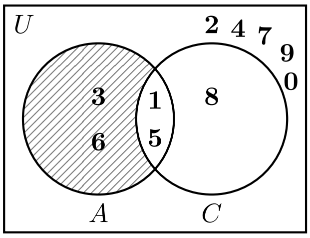
8. (a)


U
2 4 9
0
1
6
3
5
8
7
A
B

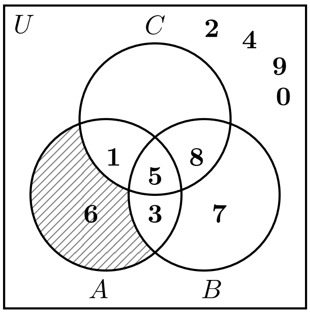
(b)


U
2 4 6
9
0
3
7
5
8
1
B
C

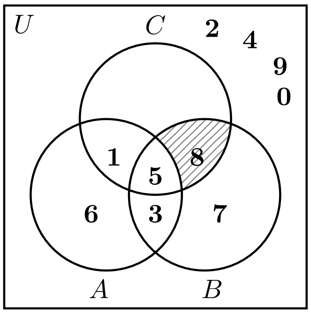
(c)


U
2 4 7
9
0
3
6
1
5
8
A
C

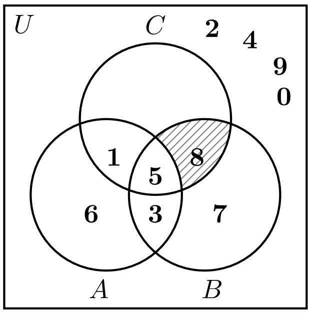
(d)


U
C
2
4
9
0
1
8
5
6
3
7
A
B

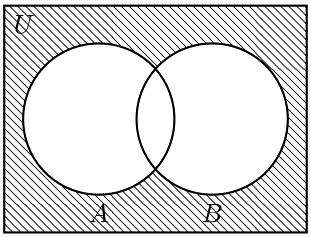
(e)



(f)



9. Venn-diagrammet för $(A \cup B)^c$ ser ut som följer:



Venn-diagrammet för $A^c \cap B^c$ är likadant. Alltså är de två mängderna lika, och vi har ett visuellt bevis för de Morgans första lag. Den andra delen av uppgiften löses på liknande sätt.

10. Ett element som ligger i $A \cap B$ måste också ligga i A. Eftersom alla element i $A \cap B$ tillhör A så gäller att $A \cap B \subseteq A$.

11. Eftersom båda mängderna är tomma så kan man dra slutsatsen att påståendena att varje element i A tillhör B och tvärtom båda är sanna. Detta betyder att mängderna är lika per definition.

12. Det finns delmängder av $\mathbb{Z}$ som inte har något minsta element, exempelvis hela $\mathbb{Z}$ själv. Varje delmängd av $\mathbb{N}$ har ett minsta element, men inte nödvändigtvis ett största element.

13. Mängden har inget minsta element. För varje element $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}^+$ finns mindre element, exempelvis $\frac{a}{2b}$. Ett förslag på en avtagande följd är $\frac{1}{n}$ för $n \in \mathbb{N}$. Om a är en kandidat till det minsta strikt positiva rationella talet, så finner vi omedelbart ett strikt mindre strikt positivt rationellt tal, exempelvis $a/2$. Alltså finns det inget minsta sådant tal.

1.3 Logik

1.

A	B	$A \to B$	$\neg A$	$(\neg A) \vee B$
S	S	S	F	S
S	F	F	F	F
F	S	S	S	S
F	F	S	S	S

Man kan se att kolumn 3 och 5 har samma värden, vilket ger att $A \to B \iff (\neg A) \vee B$.

2. Sanningsvärdestabellen för $A \implies B$ finns redan i texten, och sanningsvärdestabellen för $\neg B \implies \neg A$ ser ut som följer:

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$\neg B \implies \neg A$
S	S	F	F	S
S	F	F	S	F
F	S	S	F	S
F	F	S	S	S

Att de två uttrycken är logiskt ekvivalenta följer genom jämförelse av de första två spalterna respektive den sista spalten.

3. a) Giltig om B är sann eller om A är falsk.

   b) Utsagan kan läsas som *Det finns ett x så att $x^2 < x$*. Detta är exempelvis sant om $x \in \mathbb{R}$ eftersom vi kan ta ett x mellan 0 och 1 i det fallet. Om däremot $x \in \mathbb{Z}$ så finns inget x som uppfyller olikheten.

   c) Giltig om $x > 5$, eftersom $x^2 > 4x + 4$ om $x > 2 + \sqrt{8} < 5$. Om $x > 5$ är alltså den andra olikheten också uppfylld.

   d) Falsk, eftersom ekvationen är ekvivalent med $-1 = 1$.

   Man kan dock tänka sig något exotiskt talområde $\mathbb{T}$ där $-1 = 1$, och där skulle utsagan vara sann för alla $x \in \mathbb{T}$.

   e) Giltig exempelvis om $x \in \mathbb{Z}$, men inte om $x \in \mathbb{Q}$.

4. Tabellen är identisk med tabellen för $\neg A$. Uttrycken $\neg A$ och $A \downarrow A$ är alltså logiskt ekvivalenta. Uppgiftens andra del ges av tabellen nedan.

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$(\neg A) \downarrow (\neg B)$
S	S	F	F	S
S	F	F	S	F
F	S	S	F	F
F	F	S	S	F

Man kan se att kolumnen för $(\neg A) \downarrow (\neg B)$ är den samma som för $A \wedge B$. Slutsatsen blir att $(\neg A) \downarrow (\neg B) \iff A \wedge B$.

5. Du måste fråga den underåriga person 4 om denna druckit alkohol, samt person 2, som ju har druckit alkohol, om han är 18 år eller äldre. Notera att du *inte* behöver fråga person 3, som ju är över 18, om denna druckit alkohol.

6. Vi går igenom korten från vänster till höger.

   (a) Det första kortet som är markerat med ett y kan inte bryta mot regeln eftersom det inte kan ha ett x på någon sida.

   (b) Det andra kortet måste ha ett a på andra sidan för att inte bryta mot regeln. Vi måste alltså vända på det andra kortet.

   (c) Det tredje kortet som har ett a kan inte heller bryta mot regeln. Om det är ett x på andra sidan så uppfylls regeln och om det är ett y så finns inget x alls på kortet och regeln kan därför inte brytas.

   (d) På det sista kortet måste vi kontrollera att det inte är ett x på andra sidan.

   De kort du måste vända på är kortet markerat med x, och det som är markerat med b.

   Jämför gärna denna uppgift med föregående uppgift.

7. Förslag på svar:

   a) Ej giltig. Liknar modus ponens.

   b) Giltig. Existensintroduktion.

   c) Giltig. Omskrivning av modus tollens.

   d) Ej giltig. Liknar både modus ponens och modus tollens.

8. Hur detta ska skrivas beror på hur man tolkar 'bara'. Om man ser 'bara' som att det uttrycker en nödvändig förutsättning kan detta skrivas som

$$(\neg B \vee A) \implies \neg C$$

Förledet $(\neg B \vee A)$ beskriver då att något av de två villkoren $B =$ ”det är söndag” eller $\neg A =$ ”det regnar inte”, *inte* är uppfyllda. Om något av de två villkoren inte är uppfyllda måste detta leda till att $\neg C =$ ”vi åker inte på utflykt”.

Om man istället tolkar ’bara’ som att det är en nödvändig *och tillräcklig* förutsättning, så kan detta skrivas som

$$(B \wedge \neg A) \iff C$$

Förledet $(B \wedge \neg A)$ uttrycker nu att båda villkoren är uppfyllda, och precis då detta gäller så åker vi på utflykt.

1.4 Definitioner, satser och bevis

1. Enligt standarddefinitionen: n är delbart med m omm det finns ett annat heltal k sådant att $n = m \cdot k$.

2. Vi använder att $(\neg B) \implies (\neg A)$ är logiskt ekvivalent med $A \implies B$ för att bevisa att om n^2 är jämnt delbart med 3, så är även n det. Vi kan alltså istället bevisa att $3 \nmid n \implies 3 \nmid n^2$.

   Vi antar därför att $3 \nmid n$. Det betyder att vi får en rest $r = 1$ eller $r = 2$ då vi delar n med talet 3. Vi kan skriva det som $n = 3q + r$ för något $q \in \mathbb{Z}$. Det i sin tur ger att $n^2 = (3q + r)^2 = 9q^2 + 6q + r^2$. Vi delar in resten av beviset i två fall beroende på värdet för r.

   Fall 1: Om $r = 1$ så blir $n^2 = 3(3q^2+2q)+r = 3m+1$ där $m = 3q^2+2q \in \mathbb{Z}$. Det betyder att vi får resten 1 när vi delar n^2 med talet 3, och därmed gäller $3 \nmid n^2$.

   Fall 2: Om $r = 2$ så får vi $n^2 = 3(3q^2 + 2q) + 4 = 3m + 1$ där $m = 3q^2 + 2q + 1 \in \mathbb{Z}$. Även i detta fall får vi alltså resten 1 när vi delar n^2 med 3, och återigen gäller $3 \nmid n^2$.

   Sammanfattningsvis: Om $3 \nmid n$ så blir resten 1 när vi dividerar n^2 med talet 3. Vi kan alltså dra slutsatsen att $3 \nmid n^2$ om $3 \nmid n$, vilket i sin tur ger att $3 \mid n^2 \implies 3 \mid n$.

3. Följ metoden i beviset för satsen om att $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, och använd resultatet från föregående uppgift.

4. Följ metoden i föregående uppgift. Notera att slutsatsen att n är delbart med 71 om n^2 är delbart med 71 bygger på att 71 inte är ett kvadrattal (det är till och med ett primtal).

   Exempelvis gäller att 4 delar $18^2 = 324 = 2^2 \cdot 3^4$, men 4 delar inte 18, eftersom $18 = 2 \cdot 3^2$, och alltså bara innehåller *en* faktor 2.

5. Vi visar att $(A \subseteq B) \implies (A \cup B = B)$ och $(A \cup B = B) \implies (A \subseteq B)$. Ur detta följer att $(A \cup B = B) \iff (A \subseteq B)$.

   (a) Vi visar först att $(A \subseteq B) \implies (A \cup B = B)$.
   Antag därför att $A \subseteq B$, det vill säga att $x \in A \implies x \in B$. Vi ska under denna förutsättning bevisa att både $A \cup B \supseteq B$ och $A \cup B \subseteq B$ gäller och ur det kan vi sedan dra slutsatsen att $A \cup B = B$. Vi delar därför upp resonemanget i två steg.

      (i) Om $x \in B$ så gäller att $x \in A \cup B$, d.v.s. $A \cup B \supseteq B$.

      (ii) Om $x \in A \cup B$ så gäller att $x \in A$ eller $x \in B$, men eftersom $A \subseteq B$ är en förutsättning så får vi alltid att $x \in B$ i detta fall. Ur det följer att $A \cup B \subseteq B$.

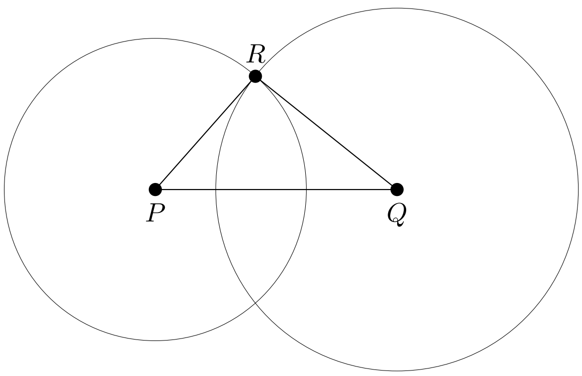
   Punkt (i) och (ii) ger att $(A \subseteq B) \implies A \cup B = B$.

   (b) Vi visar nu att $(A \cup B = B) \implies (A \subseteq B)$.
   Antag därför att $A \cup B = B$. Vi ska under denna förutsättning bevisa att $A \subseteq B$. Om $x \in A$ så följer att $x \in A \cup B = B$, och därför gäller även $x \in B$.

   Vi har nu visat både att $(A \subseteq B) \implies (A \cup B = B)$ och $(A \cup B = B) \implies (A \subseteq B)$, och drar slutsatsen att $(A \cup B = B) \iff (A \subseteq B)$.

6. Följ förslagsvis uppställningen i analysen av beviset för sats 1.1.3.

7. I en triangel måste summan av längderna för två sidor alltid vara större än längden av den tredje sidan. Det betyder att $a + b > c$. Omvänt gäller att om $a + b > c$ där $a \leq b \leq c$ så kan vi ta en sträcka av längd c med ändpunkter i P och Q, samt rita cirklar med radierna a och b och med centrum i dessa punkter. Eftersom $a + b > c$ och $a < b < c$ så måste dessa cirklar ha två skärningspunkter, låt R vara en sådan punkt. Då bildar PQR en triangel med sidorna a, b och c (se figur nedan).



   Satsen som efterfrågas bör därför lyda som följer:

Sats 1.4.1. *Tre stickor med längder $a < b < c$ kan bilda en triangel om och endast om $a + b > c$.*

8. Det finns $\frac{n(n-1)}{2}$ delmängder med exakt två element. Man kan argumentera för detta på följande sätt:

   För att bilda en delmängd med exakt två element väljer man först ut ett av de n elementen, och därefter ett av de kvarvarande $n - 1$ elementen. Här finns alltså totalt $n(n - 1)$ olika möjligheter.

   Man måste dock också ta hänsyn till att en mängd bara bestäms av vilka element som ingår, inte deras ordning. Om man först väljer elementet x och sedan elementet y får man samma mängd, $\{x, y\}$, som om man först väljer y och sedan x. Om man räknar till $n(n - 1)$ mängder har man därför räknat varje mängd två gånger, en gång som $\{x, y\}$ och en gång som $\{y, x\}$. Det rätta antalet är därför $n(n - 1)/2$.

Kapitel 2

Ekvationer och olikheter

2.1 Ekvationer

1. a) Ekvationen $x^2 = 4x$ kan skrivas som $x(x-4) = 0$. Eftersom en produkt av reella tal endast kan vara noll om minst en faktor är noll så får vi att $x = 0$ eller $(x-4) = 0$, det vill säga att $x = 0$ eller $x = 4$.

   b) Med samma resonemang som i uppgift a) får vi att $x^2 + 2x = 0$ eller $x^2 + x = 0$. I det första fallet får vi $x = 0$ eller $x = -2$ och i det andra att $x = 0$ eller $x = -1$. Sammanfattningsvis får vi alltså $x = -2$, $x = -1$ och $x = 0$ som lösningar.

   c) Vi kan skriva ekvationen som $(x^2)^2 = 16$. Om vi sätter$t = x^2$ så får vi $t^2 = 16$ vilket ger $t = \pm 4$, det vill säga $x^2 = \pm 4$. Kvadraten av ett reellt tal måste vara positiv så den enda möjligheten är att $x^2 = 4$ vilket ger $x = \pm 2$.

   d) Kvotuttrycket är definierat för de x för vilka nämnaren inte är noll, det vill säga för $x^2 + 4x - 16 \neq 0$, vilket ger $x \neq -2 \pm \sqrt{20}$. Det enda sättet att få hela uttrycket att bli noll är om täljaren är noll, det vill säga om $x = 2$. Eftersom kvotuttrycket är definierat i $x = 2$ så är också $x = 2$ en lösningen till ekvationen. Om kvotuttrycket inte hade varit definierat för $x = 2$ så skulle ekvationen istället sakna lösning.

2. (a) Vi löser först med kvadratkomplettering och sedan med den så kallade pq-formeln.

1. Med kvadratkomplettering:

$$\begin{aligned}
x^2 + x - 1 &= 0 \\
\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1 &= 0 \\
\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} &= 0 \\
\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 &= \frac{5}{4}
\end{aligned}$$

Detta ger att ekvationen kan skrivas om som

$$x + \frac{1}{2} = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}$$

och vi får alltså att

$$x = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

2. Med pq-formeln:

$$x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - (-1)}$$

Efter förenkling får vi samma svar som med kvadratkomplettering.

(b) Vi skriver först om ekvationen som en kvadratisk ekvation:

$$\begin{aligned}
2 + \sqrt{x+10} &= x && \iff \\
\sqrt{x+10} &= x - 2 && \implies \\
(\sqrt{x+10})^2 &= (x-2)^2 && \iff \\
x + 10 &= x^2 - 4x + 4 && \iff \\
x^2 - 5x - 6 &= 0
\end{aligned}$$

Med kvadratkomplettering eller pq-formeln får vi att $x = -1$ eller $x = 6$. Vi har alltså $x = -1$ och $x = 6$ som möjliga lösningar men om vi sätter in $x = -1$ så blir vänsterledet $2 + \sqrt{9} = 5$ och högerledet $x = -1$. Det betyder alltså att $x = -1$ är en falsk rot. Om vi sätter in $x = 6$ så blir båda led 6 så vi har en lösning $x = 6$.

Den falska roten kunde uppstå eftersom vi inte har ekvivalens mellan rad 2 och rad 3 i omskrivningen till en kvadratisk ekvation.

(c) Vi skriver om ekvationen till $x^2-5x-5=0$ och använder *pq*-formeln.

$$\begin{aligned}
x &= \frac{5}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - (-5)} \\
x &= \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} + 5} \\
x &= \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} + \frac{20}{4}} \\
x &= \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{45}{4}} \\
x &= \frac{5}{2} \pm \frac{\sqrt{45}}{2}
\end{aligned}$$

(d) Vänsterledet är definierat när nämnaren inte är noll, det vill säga när $x \neq 2$. Vänsterledet kan bara bli noll om täljaren är noll. Vi löser därför den ekvation som ges av att sätta täljaren lika med noll, alltså

$$x^2 - x - 2 = 0.$$

Med *pq*-formeln får vi att $x = 2$ eller $x = -1$, men uttrycket var inte definierat för $x = 2$ så vi får endast $x = -1$ som lösning.

3. I ekvationen $6x^2 - 4x = 0$ kan vi enkelt faktorisera vänsterledet eftersom båda termerna har en gemensam faktor x. Vi får då ekvationen på formen $x(6x-4) = 0$. För att produkten ska vara noll måste någon av faktorerna vara noll, så vi får att lösningarna är $x = 0$ och $x = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

   Ekvationen $3x^2 - 5 = 0$ kan skrivas om som $3x^2 = 5$, vilket ger $x = \pm\sqrt{5/3}$.

   Om man ändå vill använda en lösningsformel för att lösa ekvationerna ska man tänka på att de saknade termerna motsvarar nollor, så att exempelvis $6x^2 - 4x = 0$ kan skrivas som $6x^2 - 4x + 0 = 0$, och har lösningarna

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 6 \cdot 0}}{2 \cdot 6} = \frac{1}{3} \pm \frac{1}{3}$$

   där vi alltså för c i formeln satt in $c = 0$.

4. 1. Kvadratkomplettering fungerar alltid för att lösa kvadratiska ekvationer:

$$\begin{aligned}
x^2 - 2x - 1 &= 0 \\
(x-1)^2 - 1 - 1 &= 0 \\
(x-1)^2 &= 2 \\
x &= 1 \pm \sqrt{2}
\end{aligned}$$

2. I detta fall kan man även använda ett knep, nämligen faktorisering med hjälp av konjugatregeln:

$$\begin{aligned} x^2 - 2x - 1 &= 0 \\ (x-1)^2 - 1 - 1 &= 0 \\ (x-1)^2 - 2 &= 0 \\ ((x-1) - \sqrt{2})((x-1) + \sqrt{2}) &= 0 \end{aligned}$$

Minst en faktor måste vara noll så vi får $x = 1 + \sqrt{2}$ eller $x = 1 - \sqrt{2}$.

3. Man kan också tänka sig andra metoder, exempelvis att med hjälp av ett numeriskt tillvägagångssätt gissa lösningarna, och verifiera att de faktiskt är lösningar.

5. Lämnas till läsaren.

6. I det fjärde steget dividerar man med $a - b = 0$, vilket är otillåtet.

   För att det sista steget ska vara giltigt måste $b \neq 0$ gälla.

7. För att pq-formeln ska kunna tillämpas måste ekvationen skrivas om så att x^2-termen har koefficient 1. Det kan vi göra genom att dela båda led med a, som följer:

$$ax^2 + bx + c = 0 \Longleftrightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

   Vi ser att vi måste ta $p = \frac{b}{a}$ och $q = \frac{c}{a}$. Vi sätter in detta i pq-formeln, och får

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}} = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{4ac}{4a^2}} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

   där vi i andra ledet satt bråken under rottecknet på gemensam nämnare. Vi ser att detta direkt motsvarar formeln ur Sats 2.1.2. De båda formlerna ger därför alltid samma lösningar.

2.2 Polynomdivision och Faktorsatsen

1. Polynomdivision ger:

$$\begin{array}{rl} x^3 - 2x & \\ \hline x^5 - x^3 + x & \big|\ x^2 + 1 \\ -\,x^3(x^2+1) & \\ \hline -2x^3 + x & \\ -\,(-2x)(x^2+1) & \\ \hline 3x & \end{array}$$

Vi får alltså kvoten x^3-2x och resten $3x$. Vi kan kontrollera att uträkningen stämmer genom att kontrollera att $x^5-x^3+x=(x^2+1)(x^3-2x)+3x$.

2. Polynomdivision ger:

$$\begin{array}{rl}
2x+3 & \\
\hline
2x^2+5x+3 & \multicolumn{1}{|l}{x+1} \\
\cline{2-2}
-\,2x(x+1) & \\
\cline{1-1}
3x+3 & \\
-\,3(x+1) & \\
\cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

Vi får att $2x^2+5x+3=(x+1)(2x+3)$, vilket ger att $q(x)=2x+3$.

3. Minst en faktor måste vara noll så vi har antingen att $7x-5=0$ eller att $x^2+2x-1=0$. I det första fallet får vi $x=\frac{5}{7}$, och i det andra fallet att $x=-1+\sqrt{2}$ eller $x=-1-\sqrt{2}$. Sammanfattningsvis har vi att $x=\frac{5}{7}$, eller $x=-1+\sqrt{2}$ eller $x=-1-\sqrt{2}$.

   Vi kan relativt enkelt kontrollera att alla dessa faktiskt är lösningar, genom att sätta in i ursprungsekvationen.

4. Man kan se att $p(1)=0$ så Faktorsatsen ger att $(x-1)$ måste dela $p(x)$. Om vi utför polynomdivision så ser vi att $p(x)=(x-1)(x^2+2x+1)$. Man kan med hjälp av kvadreringsreglerna se att den sista faktorn är utvecklingen av $(x+1)^2$ så vi får $p(x)=(x-1)(x+1)^2$, vilket ger rötterna $x_1=1$ och $x_2=x_3=-1$.

5. Faktorsatsen ger att $p(x)=(x-a)(x-b)(x-c)q(x)$ där $q(x)$ är ett polynom som inte har något nollställe. Graden hos $p(x)$ måste alltså vara minst 3.

   Man kan också bevisa (med hjälp av den så kallade Algebrans fundamentalsats) att $q(x)$ måste vara en konstant c. Detta ger att

$$p(x)=c(x-a)(x-b)(x-c)$$

   och att polynomets grad måste vara exakt 3.

6. Om r är en rot så gäller att

$$p(r)=a_0+a_1r+a_2r^2+\cdots+a_nr^n=0$$

   vilket kan skrivas som

$$a_0+r(a_1+a_2r+\cdots+a_nr^{n-1})=0$$

eller

$$r(a_1 + a_2 r + \cdots + a_n r^{n-1}) = -a_0$$

Om nu r och alla a_i är heltal så måste parentesen i vänsterledet vara ett heltal som vi kan kalla q. Vi har då att $r(-q) = a_0$, det vill säga att r delar a_0.

Om $r = 0$ är en rot så gäller $0 = p(r) = a_0$, det vill säga att polynomets konstanta term är noll.

7. Polynomdivision med avseende på x ger:

$$\begin{array}{r|l}
\multicolumn{1}{r}{x^2 + xy + y^2} & \\ \hline
x^3 - y^3 & x - y \\ \cline{2-2}
-\,x^2(x-y) & \\ \cline{1-1}
x^2y - y^3 & \\
-\,xy(x-y) & \\ \cline{1-1}
xy^2 - y^3 & \\
-\,y^2(x-y) & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

Detta kan sammanfattas som $x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2)$. Faktiskt gäller även att $x^n - y^n$ alltid har $x - y$ som en faktor om n är ett naturligt tal.

Om vi byter ut y mot $-y$ i ekvationen så får vi $x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$. I det senare fallet blir kvoten mellan $x^3 + y^3$ och $x + y$ alltså $x^2 - xy + y^2$.

2.3 Olikheter

1. Olikheterna kan lösas med flera olika tekniker. Lösningsförslagen här illustrerar en del av denna variationsrikedom. Att skissa graferna lämnas till läsarens grafritande räknare eller motsvarande.

   (a) Vi skriver om olikheten som $0 \le x(x-1)$ och gör en teckentabell för uttrycket i högerled.

		0		1		x
x	$-$		$+$		$+$	
$x-1$	$-$		$-$		$+$	
$x(x-1)$	$+$		$-$		$+$	

Vi ser att $0 \leq x(x-1)$ för $x \in (-\infty, 0]$ eller $x \in [1, \infty)$.

(b) Vi gör en teckentabell över faktorerna i vänsterledet. Faktorerna byter tecken i punkterna -2, 2 och 3 så vi tar med dessa värden i tabellen.

		-2		2		3		x
$x+2$	$-$		$+$		$+$		$+$	
$x-3$	$-$		$-$		$-$		$+$	
$2x-4$	$-$		$-$		$+$		$+$	
$(x+2)(x-3)(2x-4)$	$-$		$+$		$-$		$+$	

Vi ser att $(x+2)(x-3)(2x-4) < 0$ då $x \in (-\infty, -2)$ eller $x \in (2, 3)$.

(c) Vi multiplicerar olikheten med x och $1+x$ och får tre fall.

Fall 1: Om $x < -1$ så är både x och $1+x$ negativa så olikheten byter riktning två gånger och blir oförändrad. Vi får alltså $x^2 \leq (1+x)^2$ vilket kan förenklas till $-\frac{1}{2} \leq x$. I detta fall får vi inga lösningar eftersom $x < -1$ och $-\frac{1}{2} \leq x$ inte båda kan vara uppfyllda samtidigt.

Fall 2: Om $-1 < x < 0$ då är det bara x som är negativ så olikheten byter riktning en gång och blir efter förenkling $-\frac{1}{2} \geq x$. Vi får

$$-1 < x \leq -\frac{1}{2}$$

i detta fall.

Fall 3: Om $x > 0$ så är både x och $1+x$ positiva så olikheten byter inte riktning och blir efter förenkling $-\frac{1}{2} \leq x$. I detta fall får vi lösningen $x > 0$.

Sammanfattningsvis får vi att $x \in (-1, -\frac{1}{2}]$ eller $x \in (0, \infty)$.

Ett alternativt sätt att lösa uppgiften är att samla allt i olikhetens högerled och skriva om enligt följande.

$$0 \leq \frac{x}{1+x} - \frac{1+x}{x} = \frac{1+2x}{x(1+x)}.$$

Vi kan sedan göra en teckentabell över de ingående faktorerna x, $1+x$ och $1+2x$.

(d) Vi multiplicerar olikheten med x och får två fall.

Fall 1: Om $x > 0$ så får vi olikheten $1 \leq x^2$ vilken har lösningarna $x \leq -1$ och $x \geq 1$. Möjligheten att $x \leq -1$ utesluts av att $x > 0$ så vi får att $x \geq 1$ i detta fall.

Fall 2: Om $x < 0$ så får vi olikheten $1 \geq x^2$ vilken har lösningarna $-1 \leq x \leq 1$. Vi får lösningen $-1 \leq x < 0$ i detta fall.

Sammanfattningsvis får vi att $x \in [-1, 0)$ eller $x \in [1, \infty)$.

(e) Vi samlar alla termer i vänsterled och får olikheten

$$x^2 - 3x - 2 \leq 0.$$

Om vi löser ekvationen $x^2 - 3x - 2 = 0$ så kan vi faktorisera vänsterledet med hjälp av Faktorsatsen. Kvadratkomplettering eller *pq*-formeln ger rötterna $x = \frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{17}}{2}$, vilket i sin tur leder till faktoriseringen

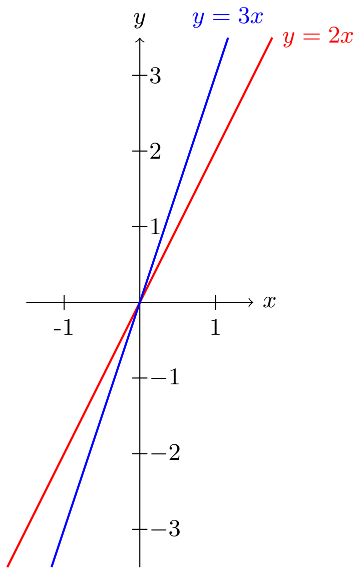
$$\left(x - \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{17}}{2}\right)\left(x - \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{17}}{2}\right) \leq 0.$$

Om vi nu gör en teckentabell så kan vi se att olikheten gäller för $x \in \left[\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{17}}{2}, \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{17}}{2}\right]$.

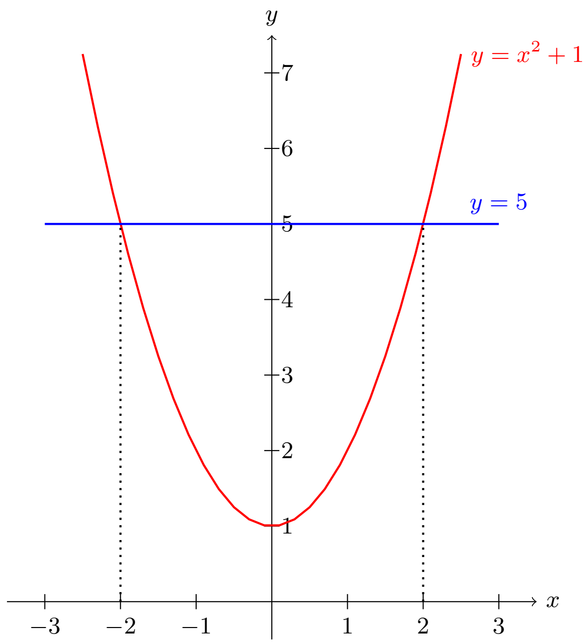
Alternativt kan vi konstatera att andragradsuttrycket $x^2 - 3x - 2$ som finns i vänsterledet är mindre än noll för x som ligger mellan dess rötter.

(f) Vi sätter $t = x^2 + 1$ och får olikheten $\sqrt{t} < 2$. Eftersom vänsterledet är positivt så kan vi skriva om detta som $t < 4$. Om vi nu sätter in x igen så får vi olikheten $x^2 + 1 < 4$, vilket kan förenklas till $(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) < 3$. Denna olikhet är uppfylld för $-\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$.

2. (a) Olikheten gäller för $x \in (-\infty, 0)$. Vi kan se att grafen till $y = 3x$ ligger under $y = 2x$ när $x < 0$.

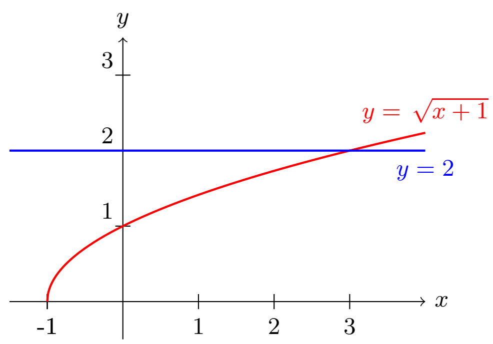


(b) Olikheten kan skrivas som $x^2 \geq 4$ vilket i sin tur är samma som $x \in (-\infty, -2]$ eller $x \in [2, \infty)$. Vi kan se att grafen till $y = x^2 + 1$ ligger över $y = 5$ när x ligger i dessa intervall.



(c) Eftersom $0 \leq \sqrt{x+1}$ så gäller att $\sqrt{x+1} < 2 \iff (\sqrt{x+1})^2 < 2^2$. Vi får alltså olikheten $x < 3$. Olikheten är bara definierad för $x > -1$

så vi får lösningen $x \in (-1, 3)$. Vi kan se i figuren nedan att grafen till $y = \sqrt{x+1}$ ligger under $y = 2$ för dessa x.

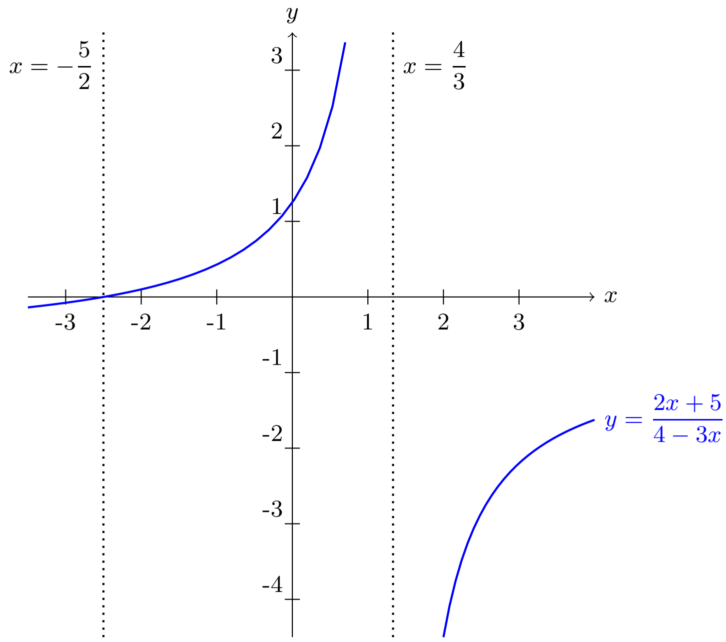


(d) För att olikheten ska gälla så ska antingen täljaren vara noll, det vill säga $x = -\frac{5}{2}$, eller så ska täljaren och nämnaren ha olika tecken. Vi får två fall:

Fall 1: Täljaren är positiv och nämnaren negativ ger $x > -\frac{5}{2}$ och $x > \frac{4}{3}$. Detta fall ger alltså att $x > \frac{4}{3}$.

Fall 2: Nämnaren är positiv och täljaren negativ ger $x < -\frac{5}{2}$ och $x < \frac{4}{3}$. Detta fall ger alltså att $x < -\frac{5}{2}$.

Sammanfattningsvis får vi att $x \in (-\infty, -\frac{5}{2}]$ eller $x \in (\frac{4}{3}, \infty)$. Grafen till $y = \frac{2x+5}{4-3x}$ visas i figuren nedan. Den består av två delar, en till vänster om den prickade linjen $x = \frac{4}{3}$ och en till höger om den. Den som ligger till höger är hela tiden mindre än noll men den som ligger till vänster är mindre än eller lika med noll för $x \leq -\frac{5}{2}$, precis som vi visade ovan.

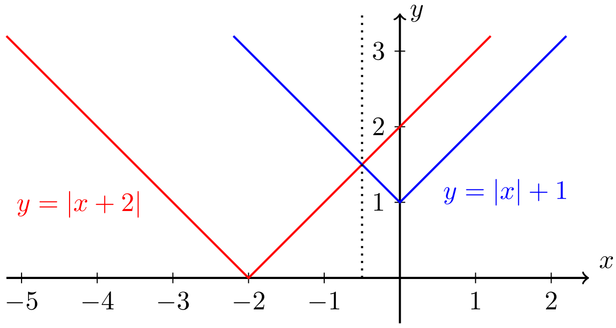


3. Man kan resonera som så att $2 + x^2 - 4x^3 \geq 1 + x^2 - 4x^3 \geq 1 - 4x^3$. I den första olikheten använder vi att $2 \geq 1$ och i den andra att $x^2 \geq 0$.

4. I näst sista steget delar vi med $\sqrt{x} - 1$ som är negativt eftersom $0 \leq x < 1$, och vi skulle då egentligen vända på olikheten så att det blir $1 > 0$ i sista steget. Alla övriga steg är korrekta.

2.4 Absolutbelopp

1. Se nedanstående figur.



Lösningen till olikheten kan nu avläsas som $-\frac{1}{2} < x < \infty$.

2. a) Om $x \geq 0$ så är $|x| = x$ och då blir ekvationen $x = 3$. Om $x < 0$ så är $|x| = -x$ och ekvationen blir $-x = 3$. Vi får alltså lösningarna $x = \pm 3$.

   b) $|x| \geq 0$ så det kan inte finnas några lösningar.

   c) Man kan tolka vänsterledet som avståndet mellan talet x och talet 3 på tallinjen. Ekvationen kan alltså utläsas som att avståndet mellan x och talet 3 ska vara 3 enheter. Det finns två tal som ligger på avstånd 3 från talet 3: $x = 0$ och $x = 6$.

   Ett alternativt sätt att lösa ekvationen på är att undersöka fallen då $x - 3 \geq 0$ och $x - 3 < 0$.

   d) Vi delar upp lösningen i två fall.

   Fall 1: om $x + 1 \geq 0$ så blir ekvationen $\sqrt{x + 1 + 1} = 1$. Vi kvadrerar och får ekvationen $x + 2 = 1$ som har lösningen $x = -1$. Genom prövning kan vi se att detta är en lösning till ekvationen.

   Fall 2: om $x + 1 < 0$ så blir ekvationen istället $\sqrt{-x - 1 + 1} = 1$. Efter kvadrering får vi att $x = -1$ men det är inte en tillåten lösning i detta fall, eftersom vi antagit att $x + 1 < 0$).

   Sammanfattningsvis får vi en lösning $x = -1$.

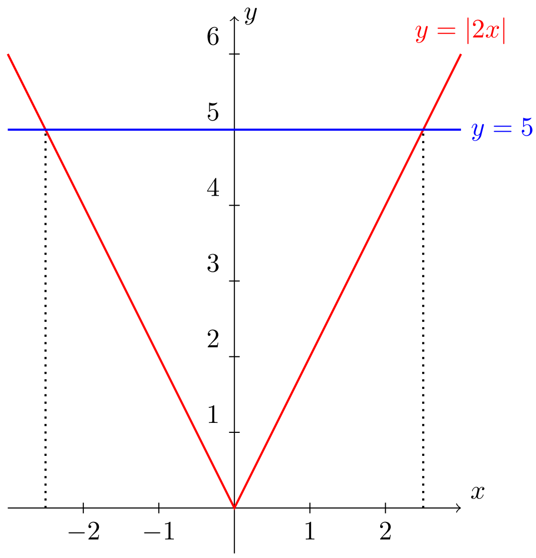
   e) Vi skriver om ekvationen som

$$||x| - (-1)| = 1$$

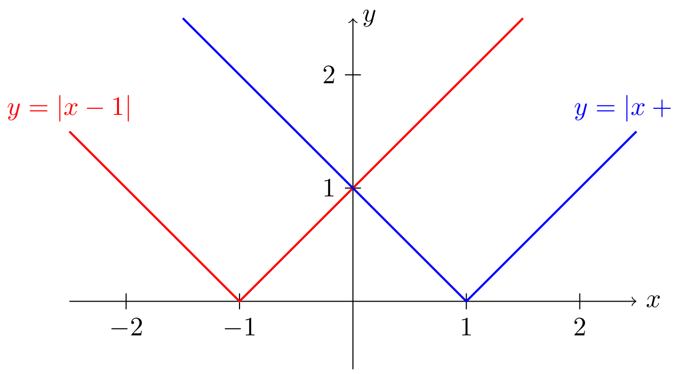
   och kan då tolka den som att avståndet mellan $|x|$ och -1 ska vara 1. Vi får alltså två fall $|x| = 0$ och $|x| = -2$. Den senare ekvationen har ingen lösning men den första har lösningen $x = 0$.

   f) Vi sätter $t = |x|$ och får andragradsekvationen $t^2 - 3t + 2 = 0$. Med pq-formeln eller kvadratkomplettering får vi lösningarna $t = 1$ och $t = 2$ vilket ger ekvationerna $|x| = 1$ och $|x| = 2$. Den första har lösningarna $x = \pm 1$ och den andra $x = \pm 2$.

3. a) Olikheten är ekvivalent med $-5 \leq 2x \leq 5$ och om vi dividerar med 2 så får vi lösningarna $-\frac{5}{2} < x < \frac{5}{2}$. I grafen nedan kan man se att grafen till $y = |2x|$ ligger under $y = 5$ för dessa x.



b) Olikheten kan skrivas som $|x-1| < |x-(-1)|$ och kan då tolkas som att avståndet mellan x och 1 ska vara mindre än avståndet mellan x och -1. Talet noll ligger mitt mellan 1 och -1 så olikheten gäller för $x < 0$. I figuren nedan kan man se att $y = |x-1|$ ligger under $y = |x+1|$ för $x < 0$.



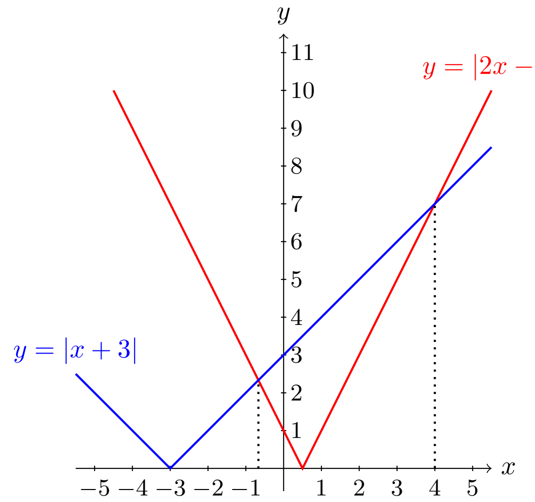
c) Uttrycket $2x-1$ i vänsterledet byter tecken då $x = \frac{1}{2}$ och uttrycket i högerledet byter tecken då $x = -3$. Vi får alltså tre fall.

Fall 1: Om $x \leq -3$ så är båda uttrycken negativa och olikheten blir $-2x+1 < -x-3$. Det ger $4 < x$ men det är inte en möjlig lösning i detta fall.

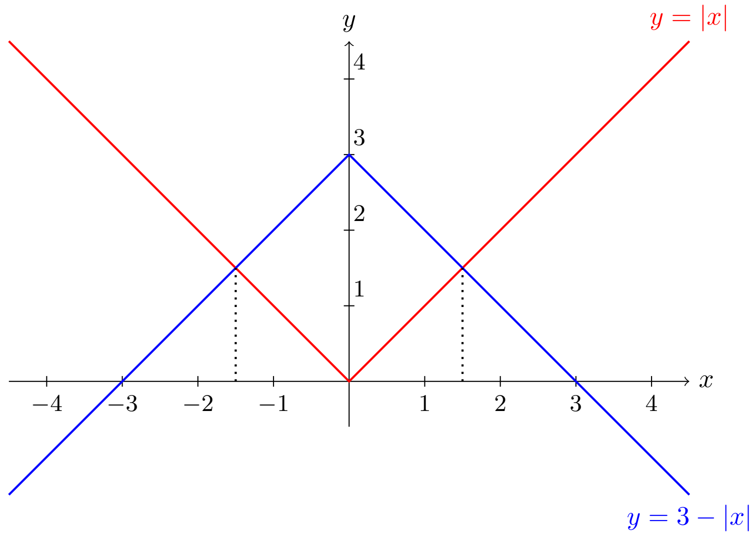
Fall 2: Om $-3 < x \leq \frac{1}{2}$ så får vi olikheten $-2x+1 < x+3$ som har lösningen $x < -\frac{2}{3}$. Vi får $-\frac{2}{3} < x < \frac{1}{2}$ som lösning i detta fall.

Fall 3: Om $\frac{1}{2} < x$ så får vi olikheten $2x - 1 < x + 3$ vilket ger $x < 4$. Vi får alltså lösningen $\frac{1}{2} < x < 4$ i detta fall.

Sammanfattningsvis får vi $-\frac{2}{3} < x < 4$. I figuren nedan kan vi se att grafen till $y = |2x - 1|$ för dessa x ligger under grafen till $y = |x + 3|$.



d) Vi kan skriva om olikheten som $\frac{3}{2} \geq |x|$, vilket är ekvivalent med $-\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}$. Vi kan också se detta på graferna nedan.



Notera att det svar som anges i den tryckta versionen av boken är felaktigt, nämligen att $x < -\frac{3}{2}$ eller $x > \frac{3}{2}$.

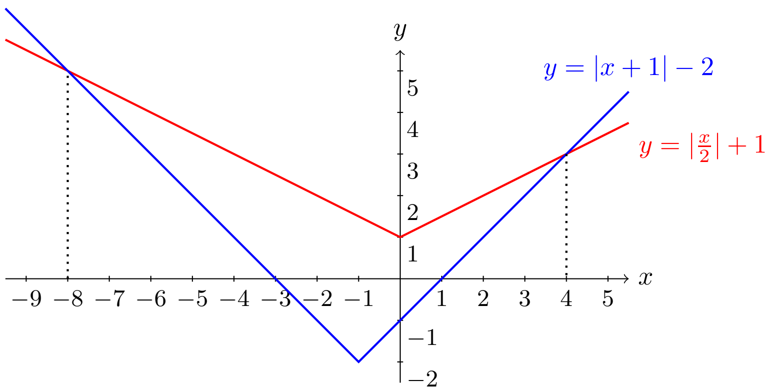
e) Vi delar upp lösningen i tre fall beroende på om $x \geq 0$ eller inte och om $x + 1 \geq 0$ eller inte.

Fall 1: Om $x < -1$ så får vi olikheten $-\frac{x}{2} + 1 \leq -x - 1 - 2$. Vi får lösningen $x \leq -8$ vilket innebär att vi får lösningen $x \leq -8$ i detta fall.

Fall 2: Om $-1 \leq x < 0$ så får vi olikheten $\frac{x}{2} + 1 \leq -x - 1 - 2$ vilken ger $x \leq -\frac{8}{3}$. Vi får alltså inga lösningar i detta fall.

Fall 3: Om $x \geq 0$ så blir olikheten $\frac{x}{2} + 1 \leq x + 1 - 2$, vilket ger $x \geq 4$. Vi får lösningen $x \geq 4$ i detta fall.

Sammanfattningsvis får vi lösningarna $x < -8$ och $4 < x$, vilket man också kan se på graferna nedan.



f) Uttrycket som står inom absolutbelopp i vänsterled kan skrivas som $1 + x - x^2$. Vi kan se att detta uttryck har rötterna $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ vilket betyder att det är positivt för $x \in (\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2})$. Uttrycket i högerled byter tecken i $x = 1$ så vi får fyra fall.

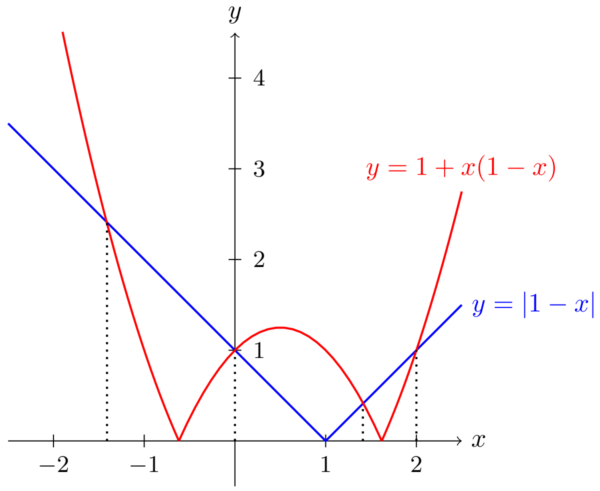
Fall 1: Om $x < -\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ så får vi olikheten $-1 - x(1-x) < 1 - x$, vilket ger $x^2 < 2$, som gäller för $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$. Vi får lösningarna $-\sqrt{2} < x < -\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ i detta fall.

Fall 2: Om $-\frac{1-\sqrt{5}}{2} < x \leq 1$ så får vi olikheten $1 + x(1-x) < 1 - x$, vilket ger $< x(x-2)$ som i sin tur är ekvivalent med att $x < 0$ eller $2 < x$. Vi får lösningarna $-\frac{1-\sqrt{5}}{2} < x \leq 0$ i detta fall.

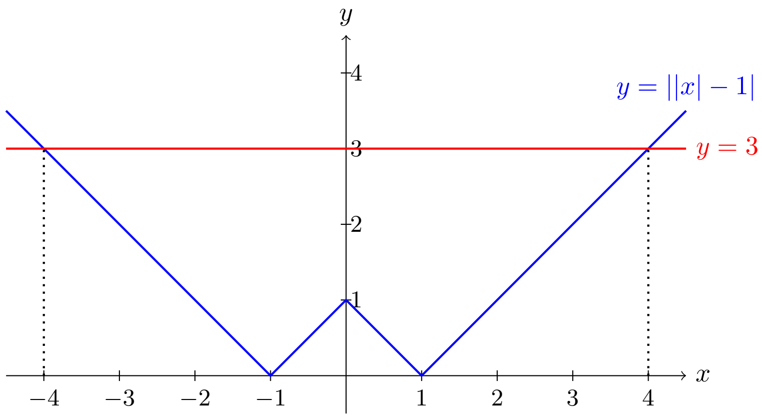
Fall 3: Om $1 < x \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ så får vi olikheten $1 + x(1-x) < -1 + x$ vilket motsvarar $2 < x^2$. Vi kan skriva om detta som att $x < -\sqrt{2}$

eller $\sqrt{2} < x$. Vi ser då att vi får lösningarna $\sqrt{2} < x \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ i detta fall.

Fall 4: Om $\frac{1+\sqrt{5}}{2} < x$ så har vi olikheten $-1 - x(1-x) < -1 + x$ vilket ger $x(x-2) < 0$. Det senare är sant för $0 < x < 2$. Vi får lösningarna $\frac{1+\sqrt{5}}{2} < x < 2$ i detta fall.
Sammantaget får vi $-\sqrt{2} < x < 0$ och $\sqrt{2} < x < 2$ som lösning.

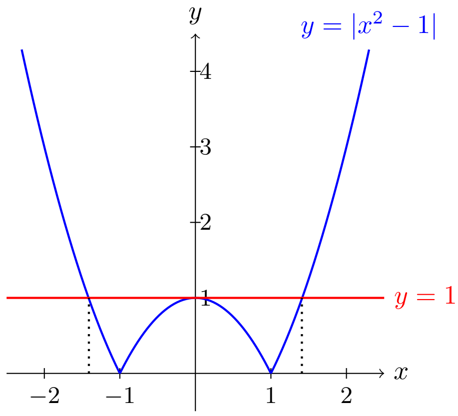


g) Olikheten kan tolkas som att avståendet mellan $|x|$ och talet 1 ska vara mindre än 3. Vi kan skriva det som $-2 < |x| < 4$, vilket är ekvivalent med $0 \leq |x| < 4$. Med samma avståndstolkning får vi lösningen $-4 < x < 4$.



h) Vi har att $x^2 + 1 > 0$ för alla x så beloppstecknet kan tas bort och vi får då olikheten $x^2 < 0$ vilken saknar lösningar för reella tal x.

i) Med avståndstolkningen får vi att $0 < x^2 < 2$ vilket ger $0 < x < \sqrt{2}$ eller $-\sqrt{2} < x < 0$.



j) Om vi kvadratkompletterar andragradsuttrycket i vänsterledet så kan vi se att det är positivt för alla x.

$$x^2 + 5x + 9 = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 + 11/4 > 0.$$

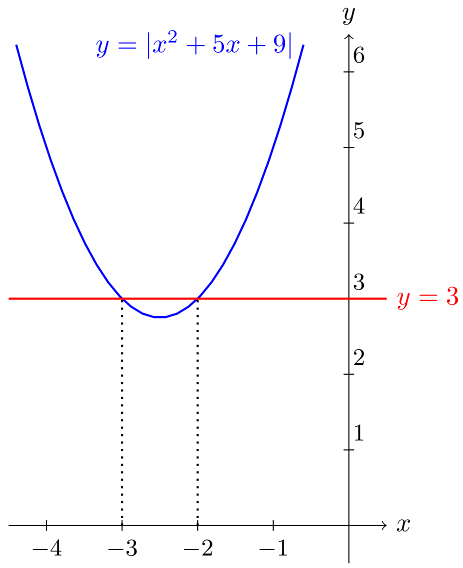
Vi kan alltså ta bort beloppstecknen och får då olikheten

$$x^2 + 5x + 9 < 3.$$

Vi flyttar sedan allt till vänsterled och faktoriserar med hjälp av faktorsatsen

$$(x + 2)(x + 3) = x^2 + 5x + 6 < 0.$$

Andragradsuttrycket är mindre än noll för de x som ligger mellan uttryckets rötter. Vi får alltså $-3 < x < -2$ som lösning.



4. a) Vi bevisar att $|x| = |-x|$ för alla reella x genom att betrakta två fall.

   Fall 1: Om $x \geq 0$ så får vi

   $$\text{Högerled} = |-x| = -(-x) = x = |x| = \text{Vänsterled}.$$

   Fall 2: Om $x < 0$ så är $-x > 0$ och vi får

   $$\text{Högerled} = |-x| = -x = |x| = \text{Vänsterled}.$$

   Vi har alltså bevisat olikheten för alla $x \in \mathbb{R}$.

   b) Eftersom $|x| + 1 > 0$ för alla x så kan vi ta bort de yttre belopps-tecknen i vänsterledet. Olikheten gäller alltså för alla $x \in \mathbb{R}$.

   c) En av räknereglerna för absolutbeloppet är att $|xy| = |x||y|$ vilket i sin tur betyder att $|x^2| = |x|^2$ (sätt $x = y$). Det betyder att olikheten gäller för alla reella x.

   d) Man kan se att olikheten inte är sann för $x = 0$:

   $$|0| - 1 = -1 \neq 1 = ||0| - 1|.$$

   Genom att dela upp i två fall $x < 0$ och $x \geq 0$ så kan man visa att olikheten gäller för $x \in (-\infty, -1]$ och $x \in [1, \infty)$.

   e) Eftersom $|x| + x \geq 0$ så kan man skriva följande likhet

   $$\sqrt{(|x| + x)^2} = ||x| + x| = |x| + x.$$

   I sista likheten använde vi att $|x| + x \geq 0$ och i första likheten att $\sqrt{y^2} = |y|$ för alla y. Vi har alltså visat att olikheten är sann för alla reella x.

f) Olikheten är inte sann för $x < 0$ eftersom vänsterledet blir -1 då. Den stämmer däremot för $x > 0$ eftersom vänsterledet då blir $\frac{x}{x} = 1$. För $x = 0$ är vänsterledet inte ens definierat.

5. (a) Räkneregeln $|x| = |-x|$.
Detta är precis uppgift 2.4.4.a.

(b) Räkneregeln $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$.
Fall 1. Om $x > 0$, $y < 0$ följer att $|x \cdot y| = -x \cdot y = |x| \cdot (-y) = |x| \cdot |y|$. Övriga tre fall kontrolleras på liknande sätt.

(c) Räkneregeln $x \leq |x|$ kan visas på samma sätt genom uppdelning i två fall $x \geq 0$ och $x < 0$.

(d) Triangelolikheten. Med hjälp av föregående regel kan man konstatera att

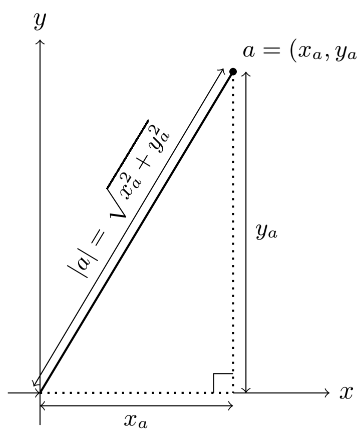
$$-(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y|.$$

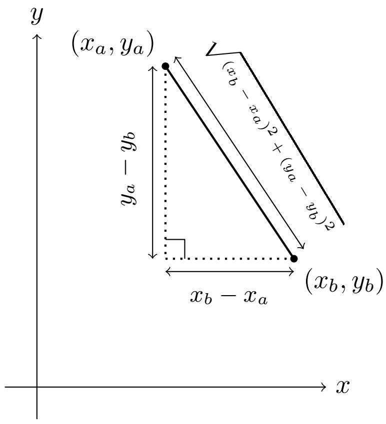
Vi kan sedan använda att $|z| \leq c \iff -c \leq z \leq c$ för att få triangelolikheten (tag $z = x + y$ och $c = |x| + |y|$).

Man kan även visa triangelolikheten genom fallindelning i fyra fall, $x < 0$, $y < 0$ respektive $x > 0$, $y < 0$ och $x > 0$, $y > 0$. Fallet $x < 0$, $y > 0$ fås från fallet $x > 0$, $y < 0$ genom att byta namn på x och y.

6. Om $y_a = 0$ så får vi $|a| = \sqrt{x_a^2 + 0^2} = \sqrt{x_a^2} = |x_a|$ och på samma sätt att $|b| = |x_b|$ samt $|b - a| = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (0 - 0)^2} = |x_b - x_a|$. Vi ser alltså att definitionen stämmer överens med definitionen av absolutbelopp på tallinjen.

I figurerna nedan kan man se att definitionen av $|a|$ och $|b-a|$ ger avståndet till origo från a, respektive avståndet mellan $a = (x_a, y_a)$ och $b = (x_b, y_b)$. Notera särskilt att $(y_a - y_b)^2 = (y_b - y_a)^2$.




y
(x_a, y_a)
$\sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_a - y_b)^2}$
$y_a - y_b$
(x_b, y_b)
$x_b - x_a$
x

Kapitel 3

Summor och summatecken

3.1 Grundläggande notation och räkneregler

1. a) Man kan se att termerna är potenser av tre: $3^2, 3^3, 3^4$ och 3^5. Ett sätt att skriva summan på är därför $\sum_{i=2}^{5} 3^i$.

   b) Avståndet mellan på varandra följande termer är fyra så man kan exempelvis skriva termerna som $-3, -3+4\cdot 1, -3+4\cdot 2$, och så vidare. Med summanotation skulle det ge $\sum_{j=0}^{5} -3+4\cdot j$ men man kan också exempelvis skriva summan som $\sum_{i=-1}^{4} 4i+1$.

   c) Kvoten mellan två på varandra följande termer är 2 så vi kan skriva dem som $6, 6\cdot 2^1, 6\cdot 2^2$, och så vidare. Alternativt så startar vi på $3\cdot 2$ istället och får $3\cdot 2^1, 3\cdot 2^2, 3\cdot 2^3, ...$, vilket ger $\sum_{k=1}^{5} 3\cdot 2^k$.

   d) Termerna är alla på formen $\frac{r}{r+1}$ där $r = 2, 3, 4, 5, 6$. Summan kan alltså skrivas som $\sum_{r=2}^{6} \frac{r}{r+1}$.

2. a)
$$\sum_{i=1}^{5}(2i-1) = 1+3+5+7+9 = 25$$

   b)
$$\sum_{i=6}^{100} 3 = \underbrace{3+3+\dots}_{\text{95 termer}} = 95\cdot 3 = 285$$

   c)
$$\sum_{i=0}^{6} i^2 = 0+1+4+9+16+25+36 = 91$$

   d)
$$\sum_{i=0}^{6} 2^i = 1+2+4+8+16+32+64 = 127$$

3. Den första termen kan skrivas som $3 + 7 \cdot 0$, andra som $3 + 7 \cdot 1$, och så vidare. Den sista termen blir då $3+7\cdot 94$. Vi har numrerat termerna med talen $0, 1, ..., 94$ så summan har alltså 95 termer.

4. Förslagsvis
$$\sum_{i=1}^{\infty} i.$$
Summan är oändlig både i den bemärkelsen att den har oändligt antal termer, men också att dess värde inte är ändligt.

5. a) Om vi tar $j = i - 2$ så får vi
$$\sum_{j=1}^{10} 12(j+2)+3 = \sum_{j=1}^{10} 12j + 27 = \sum_{i=1}^{10} 12i + 27.$$
   b) Vi tar $i = k + 6$ och får
$$\sum_{i=1}^{16} ((i+6)+3)^2 = \sum_{i=1}^{16} (i-3)^2 = \sum_{i=k}^{16} (k-3)^2.$$
   c) Vi tar $j = i - 3$ och får
$$\sum_{i=4}^{8} (\sin(i\pi x)) = \sum_{j=1}^{5} (\sin((j+3)\pi x)) = \sum_{i=1}^{5} (\sin((i+3)\pi x)).$$
   d) Vi tar $j = i + 14$ och får
$$\sum_{j=1}^{13} \sqrt{(j-14)+15} = \sum_{j=1}^{13} \sqrt{j+1} = \sum_{i=1}^{13} \sqrt{i+1}.$$

6. Första och sista termen kan tas upp i summan genom att utöka index med $i = 0$ och $i = 33$:
$$1 + \sum_{i=1}^{32} (3i+1) + 100 = \sum_{i=0}^{33} (3i+1)$$

7. Summorna har lika många termer, men inte samma termer. Exempelvis så är första termen i A lika med $3 \cdot (-1) + 5 = 2$. Summan B börjar med $3 \cdot (3+1) - 8 = 4$ och växer med tre enheter för varje ny term. Summan B kan därför inte innehålla termen 2.

8. (a)
$$\prod_{i=1}^{10} i = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot 10 = 3628800$$

(b) Man kan förkorta mellan alla på varandra följande faktorer i produkten. Kvar blir den första täljaren och den sista nämnaren.

$$\prod_{i=3}^{78}\left(\frac{i}{i+1}\right)=\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{6}{7}\cdot\ldots\cdot\frac{77}{78}\cdot\frac{78}{79}=\frac{4}{79}$$

3.2 Några viktiga summor

1. Summan är aritmetisk och kan därför beräknas som $s=\frac{n(a_1+a_n)}{2}$ där $n=100$, $a_1=1$ och $a_{100}=100$. Värdet blir 5050.

2. a) Geometrisk, $r=2$.
   b) Aritmetisk, $d=-7$.
   c) Varken aritmetisk eller geometrisk.
   d) Geometrisk, $r=\sqrt{2}$.
   e) Varken aritmetisk eller geometrisk.
   f) Aritmetisk med $d=0$ och geometrisk med $r=1$.

3. a)

$$\sum_{i=1}^{10}(i+3^i)=\sum_{i=1}^{10}i+\sum_{i=1}^{10}3^i=\frac{10(10+1)}{2}+3\frac{1-3^{10}}{1-3}=55+88572=88627$$

b)

$$\sum_{i=3}^{12}(3-i)=0+-1+-2+\ldots+-9=-45$$

Alternativt:

$$\sum_{i=3}^{12}(3-i)=\sum_{i=3}^{12}3-\sum_{i=3}^{12}i=10\cdot 3-\frac{10\cdot(12+3)}{2}=30-75=-45$$

c) På grund av faktorn $(-1)^s$ kommer termerna att omväxlande vara positiva och negativa. Vi har inte behandlat någon anpassad metod för att beräkna sådana summor, utan vi får räkna ut summan term för term.

$$\sum_{s=1}^{19}s\cdot(-1)^s=-1+2-3+4-5+\ldots+(-19)=-10$$

d) Summan är en teleskopsumma.

$$\sum_{i=5}^{22}\left(\frac{i}{i+1}-\frac{i+1}{i+2}\right)=\frac{5}{6}-\frac{23}{24}=-\frac{3}{24}=-\frac{1}{8}$$

e) Summan har $1234 - 9 = 1225$ termer som alternerar mellan $+1$ och -1. Vi har alltså 613 termer som är $+1$ och 612 som är -1.

$$\sum_{s=10}^{1234} (-1)^s = 613 + 612 \cdot (-1) = 1$$

f) Vi byter variabel till $j = i + 101$ och får

$$\sum_{j=1}^{198} j - 101 + 1 = \sum_{j=1}^{198} j - 100 = \frac{198 \cdot (198+1)}{2} - 100 \cdot 198 = \\ = 19701 - 19800 = -99.$$

Alternativt så kan man se att alla termer utom den som har index $i = -100$ kommer ta ut varandra, så att summan blir $-100+1 = -99$.

4. Om $r = 1$ så är summan en summa av identiska termer och vi får $s = n \cdot a_1$.

5. Vi får följande ekvationssystem:

$$\begin{aligned} 1 &= s(1) = a + b + c + d \\ 5 &= s(2) = 8a + 4b + 2c + d \\ 14 &= s(3) = 27a + 9b + 3c + d \\ 30 &= s(4) = 64a + 16b + 4c + d \end{aligned}$$

Detta kan lösas exempelvis genom att eliminera variablerna en efter en, med start i att $d = 1 - (a + b + c)$ från den första ekvationen. Ekvationssystemet har lösningen $a = \frac{1}{3}$, $b = \frac{1}{2}$, $c = \frac{1}{6}$ och $d = 0$. Vi får alltså att

$$\begin{aligned} s(n) = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} &= \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \end{aligned}$$

Vi testar

$$\begin{aligned} 55 = s(5) &= \frac{5 \cdot (5+1)(2 \cdot 5 + 1)}{6} \\ 91 = s(6) &= \frac{6 \cdot (6+1)(2 \cdot 6 + 1)}{6} \\ 140 = s(7) &= \frac{7 \cdot (7+1)(2 \cdot 7 + 1)}{6}, \end{aligned}$$

vilket stämmer bra.

6. Vi bevisar först likheten.

$$\begin{aligned}\frac{1}{2+i} - \frac{1}{3+i} &= \frac{3+i}{(2+i)(3+i)} - \frac{2+i}{(3+i)(2+i)} = \\ &= \frac{3+i-(2+i)}{(2+i)(3+i)} = \frac{1}{(2+i)(3+i)}\end{aligned}$$

   Vi använder sedan detta för att skriva om summan som en teleskopsumma.

$$\sum_{i=1}^{33} \frac{1}{(2+i)(3+i)} = \sum_{i=1}^{33} \frac{1}{(2+i)} - \frac{1}{(3+i)} = \frac{1}{3} - \frac{1}{36} = \frac{11}{36}.$$

7. Summan ska tolkas som att består av oändligt många termer, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, och så vidare. Om man avbryter summeringen efter n termer kan man skriva

$$s = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^n}.$$

   Kvantiteten $\frac{1}{2^n}$ kommer bli godtyckligt liten om vi bara låter n bli tillräckligt stort. Summan är med andra ord större än varje tal $r < 1$ om vi väljer ett tillräckligt stort n (alltså tar med tillräckligt många termer i summan), men samtidigt är den mindre än 1 för varje n. Antag att vi verkligen kunde summera oändligt många termer och att vi då fick ett tal som svar. Då finns det bara ett värde som kan vara möjligt och det är $s = 1$. Oändliga summor som dessa brukar kallas *serier*.

Kapitel 4

Induktionsbevis och Binomialsatsen

4.1 Induktionsbevis

1. Vi låter P_n vara påståendet att

$$\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2$$

och bevisar först att induktionsbasen är sann, det vill säga att påståendet är sant för $n = 1$. Vi betecknar högerled med HL_1 och vänsterled med VL_1, och får då följande

$$\mathrm{VL}_1 = \sum_{i=1}^{1}(2i-1) = 2\cdot 1 - 1 = 1 = 1\cdot 1 = \mathrm{HL}_1.$$

Vi har alltså bevisat att induktionsbasen är sann.

Nu antar vi att formeln är sann för $n = k$, det vill säga att $P(k)$ är sann (induktionsantagandet), alltså att $\mathrm{VL}_k = \mathrm{HL}_k$, och bevisar med hjälp av det att $P(k+1)$ är sann (induktionssteget), alltså att $\mathrm{VL}_{k+1} = \mathrm{HL}_{k+1}$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{VL}_{k+1} &= \sum_{i=1}^{k+1}(2i-1) = \left(\sum_{i=1}^{k}(2i-1)\right) + 2\cdot(k+1) - 1 \\
&= \mathrm{VL}_k + 2\cdot(k+1) - 1 = \mathrm{HL}_k + 2\cdot(k+1) - 1 \\
&= k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2 = \mathrm{HL}_{k+1}.
\end{aligned}$$

Induktionsprincipen ger nu att påståendet är sant för alla $n \geq 1$. I den tredje likheten har vi använt induktionsantagandet, det vill säga att

$$\sum_{i=1}^{k}(2i-1) = k^2$$

eller med andra ord att $\mathrm{VL}_k = \mathrm{HL}_k$.

2. Hur tar man fram en sådan formel? Man kan till exempel börja med att experimentera med några små fall:

$$\begin{aligned}
n = 1: &\qquad \sum_{i=1}^{1} 2i = 2 \\
n = 2: &\qquad \sum_{i=1}^{2} 2i = 2 + 4 = 6 \\
n = 3: &\qquad \sum_{i=1}^{3} 2i = 2 + 4 + 6 = 12 \\
n = 4: &\qquad \sum_{i=1}^{4} 2i = 2 + 4 + 6 + 8 = 20 \\
n = 5: &\qquad \sum_{i=1}^{5} 2i = 2 + 4 + 6 + 8 + 10 = 30 \\
n = 6: &\qquad \sum_{i=1}^{6} 2i = 2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 = 42 \\
n = 7: &\qquad \sum_{i=1}^{7} 2i = 2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 = 56
\end{aligned}$$

Sedan kan man titta på följden av summor, $2, 6, 12, 20, 30, 42, 56$ och försöka se ett mönster. Man kanske kan sin multiplikationstabell och ser att $2 = 1 \cdot 2$, $6 = 2 \cdot 3$, $12 = 3 \cdot 4$, $20 = 4 \cdot 5$, $30 = 5 \cdot 6$, $42 = 6 \cdot 7$ och $56 = 7 \cdot 8$. Då ligger det nära till hands att gissa att summaformeln kanske ska vara $n(n+1)$.

Om vi nu alltså gissar att summan av de n första jämna positiva heltalen kan skrivas som

$$\sum_{i=1}^{n} 2i = n(n+1)$$

så kan vi sedan försöka bevisa detta med hjälp av induktion.

Vi bevisar först induktionsbasen, det vill säga att

$$\mathrm{VL}_1 = \sum_{i=1}^{1} 2i = 2 \cdot 1 = 2 = 1 \cdot (1+1) = \mathrm{HL}_1,$$

vilket stämmer bra.

Vi antar sedan att formeln är sann för $n = k$ och bevisar med hjälp av det att den är sann för $n = k + 1$. Induktionsantagandet är med andra ord

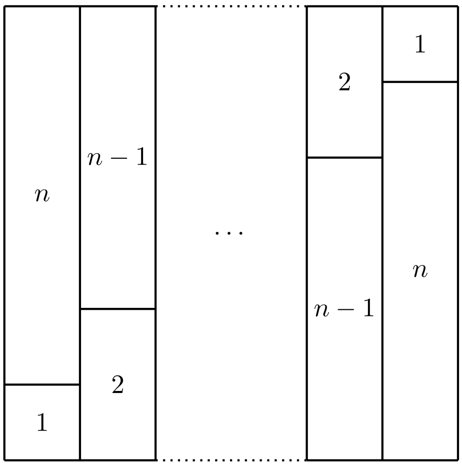
$$\sum_{i=1}^{k} 2i = k(k+1).$$

Vi skriver om vänsterledet på samma sätt som i förra uppgiften:

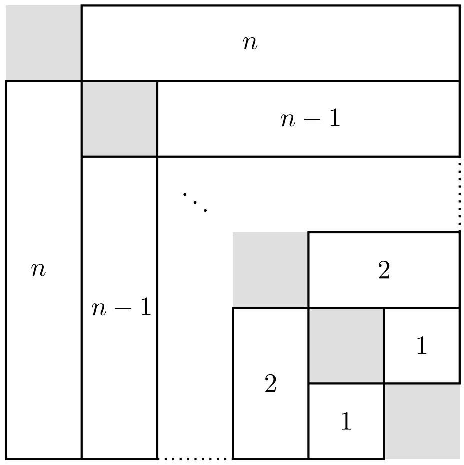
$$\begin{aligned}\mathrm{VL}_{k+1} &= \sum_{i=1}^{k+1} 2i = \left(\sum_{i=1}^{k} 2i\right) + 2 \cdot (k+1) = k(k+1) + 2(k+1) = \\ &= (k+1)(k+2) = (k+1)((k+1)+1) = \mathrm{HL}_{k+1}.\end{aligned}$$

Enligt induktionsprincipen gäller därför att summaformeln är korrekt för alla $n \geq 1$.

Hur kan man se detta geometriskt? Varje jämnt tal $2k$ kan delas upp i två lika stora delar, vardera k stor. Om vi gör en sådan uppdelning för vardera jämnt tal från 2 till $2n$ kan dessa delar passas ihop till en rektangel med sidlängder n och $n+1$, som i figuren nedan. Figurens area motsvarar då summans värde, alltså $n(n+1)$. Detta kan jämföra med figuren som motiverar summaformeln för aritmetiska summor.



Vi kan också parafrasera figuren för summan av de n första udda talen:



Vi har här en kvadrat med sida $n+1$, som alltså har total area $(n+1)^2$, men $n+1$ rutor (de skuggade) ska räknas bort, så den sökta arean är $(n+1)^2 - (n+1) = n(n+1)$, som tidigare.

Ett alternativt sätt att finna (och samtidigt bevisa) summaformeln är att använda räkneregler för summor och observera att

$$\sum_{i=1}^{n} 2i = 2\sum_{i=1}^{n} i,$$

och därefter använda den bekanta summaformeln för aritmetiska summor.

3. Vi börjar med att bevisa induktionsbasen, det vill säga att olikheten gäller för det minsta naturliga talet $n = 1$. Vi ser att $\mathrm{VL}_1 = 1^3 \geq 1^2 = \mathrm{HL}_1$, så induktionsbasen är alltså sann.

   I nästa steg antar vi att olikheten är sann för $n = k$, det vill säga att $k^3 \geq k^2$, och bevisar att den under denna förutsättning också är sann för $n = k+1$. Vi får följande:

   $$\mathrm{VL}_{k+1} = (k+1)^3 = (k+1)(k+1)^2 = k(k+1)^2 + (k+1)^2 \geq (k+1)^2 = \mathrm{HL}_{k+1}$$

   I sista steget använde vi att $k(k+1)^2 \geq 0$ (eftersom $k \geq 1$). Enligt induktionsprincipen gäller olikheten för alla $n \in \mathbb{N}$.

   När vi räknade på detta sätt behövde vi *egentligen inte* använda induktionsantagandet för att bevisa olikheten för $n = k+1$. Induktionsprincipen säger dock bara att vi får använda induktionsantagandet *om det behövs*, inte att det *måste* användas.

   Om vi sätter in allt ovanstående i bevisschemat för induktionsbevis skulle det kunna se ut som följer:

   Induktionsbevis. *Vi vill visa att utsagan $P(n)$ är sann för alla $n \in \mathbb{N}$. Vi använder oss av ett induktionsbevis.*

Vi visar därför först induktionsbasen, att $P(1)$ är sann, nämligen att ...
....

Här följer kontrollen av att $P(1)$ är sann: ....
$1^3 > 1^2$ *stämmer.* ....

Vårt induktionsantagande, $P(k)$, är följande: ....
$k^3 > k^2$ ....

Vi vill nu visa induktionssteget, att $P(k+1)$ gäller, nämligen att ....
$(k+1)^3 > (k+1)^2$ ....

Här följer beviset av att $P(k) \implies P(k+1)$: ....
$VL_{k+1} = (k+1)^3 = (k+1)(k+1)^2 = k(k+1)^2 + (k+1)^2 \geq (k+1)^2 = HL_{k+1}$
I sista steget använde vi att $k(k+1)^2 \geq 0$ (eftersom $k \geq 1$). ....
....

Vi drar med hjälp av induktionsprincipen slutsatsen att utsagan $P(n)$ är sann för alla $n \in \mathbb{N}$.

4. Induktionsbasen ska bevisas för det minsta giltiga värdet på n, vilket i detta fallet betyder att vi ska göra det för $n = 3$. Vi sätter in detta värde i högerledet respektive vänsterledet och får då följande: $\text{HL}_3 = n^2 + 5 = 3^2 + 5 = 14$ och $\text{VL}_3 = n^3 = 3^3 = 27$. Vi ser alltså att olikheten gäller för $n = 3$.

   Nu antar vi att olikheten gäller för $n = k \geq 3$, det vill säga att $k^3 \geq k^2 + 5$ för $k \geq 3$, och visar att olikheten gäller även för $n = k + 1$.

$$\begin{aligned} \text{VL}_{k+1} &= (k+1)^3 = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 \\ &\geq (k^2 + 5) + 3k^2 + 3k + 1 \\ &\geq k^2 + 5 = \text{HL}_{k+1} \end{aligned}$$

   I sista steget har vi använt att $3k^2 + 3k + 1$ är positivt, eftersom k är positivt och alla termerna därför är positiva.

   Enligt induktionsprincipen gäller olikheten för alla naturliga tal $n \geq 3$.

5. Vi ska bevisa påståendet att en aritmetisk summa kan skrivas som

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}.$$

   Här gäller alltså att $a_i = bi + c$ för två tal $b, c \in \mathbb{R}$, Induktionsbasen, som är påståendet då $n = 1$, kan bevisas genom att vi utvecklar vänsterled och högerled var för sig och ser att det blir samma sak:

$$\text{VL}_{n=1} = \sum_{i=1}^{1} a_i = a_1 \qquad \text{HL}_{n=1} = \frac{1 \cdot (a_1 + a_n)}{2} = \frac{1 \cdot (a_1 + a_1)}{2} = a_1$$

Med andra ord: Om $n = 1$ så har vi bara en term i summan och då gäller att $a_n = a_1$. Induktionsbasen är alltså sann.

Nu antar vi att påståendet är sant för $n = k$, det vill säga att

$$\sum_{i=1}^{k} a_i = \frac{k(a_1 + a_k)}{2}$$

och bevisar att det leder till att påståendet också är sant för $n = k + 1$. Vi ska alltså bevisa att

$$\sum_{i=1}^{k+1} a_i = \frac{(k+1)(a_1 + a_{k+1})}{2}.$$

I beviset använder vi att de första k termerna också utgör en aritmetisk summa.

$$\begin{aligned}
\mathrm{VL}_{n=k+1} &= \sum_{i=1}^{k+1} a_i = a_{k+1} + \sum_{i=1}^{k} a_i = \\
&= a_{k+1} + \frac{k(a_1 + a_k)}{2} = \\
&= \frac{k(a_1 + a_k) + 2a_{k+1}}{2} = \\
&= \frac{(k+1)(a_1 + a_{k+1}) + ka_k - (k-1)a_{k+1} - a_1}{2} = \\
&= \frac{(k+1)(a_1 + a_{k+1})}{2} + \frac{ka_k - (k-1)a_{k+1} - a_1}{2} = \\
&= \frac{(k+1)(a_1 + a_{k+1})}{2} + 0 = \mathrm{HL}_{n=k+1}
\end{aligned}$$

I sista steget använde vi att

$$ka_k - (k-1)a_{k+1} - a_1 = k(bk + c) - (k-1)(b(k+1) + c) - (b + c) = 0.$$

Induktionsprincipen ger nu att formeln är sann för alla $n \geq 1$.

6. Vi ska bevisa att

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 \frac{1 - r^n}{1 - r}$$

där $a_i = b \cdot r^i$ för två tal $b, r \in \mathbb{R}$. Induktionsbasen bevisar vi på följande vis:

$$\mathrm{VL}_{n=1} = \sum_{i=1}^{1} a_i = a_1$$

$$\mathrm{HL}_{n=1} = a_1 \frac{1 - r^1}{1 - r} = a_1.$$

Induktionsbasen gäller alltså för $n = 1$.

Vi antar nu att påståendet är sant för $n = k$, det vill säga att $\sum_{i=1}^{k} = a_k \dfrac{1-r^k}{1-r}$ och bevisar att påståendet för $n = k+1$ följer ur det. Vi ska med andra ord bevisa att

$$\sum_{i=1}^{k+1} a_i = br\frac{1-r^{k+1}}{1-r}.$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{VL}_{n=k+1} &= \sum_{i=1}^{k+1} a_i = a_{k+1} + \sum_{i=1}^{k} a_i \\
&= a_{k+1} + br\frac{1-r^k}{1-r} \\
&= br^{k+1} + \frac{br - br^{k+1}}{1-r} \\
&= \frac{br - br^{k+1} + (1-r)br^{k+1}}{1-r} \\
&= \frac{br - br^{k+1} + br^{k+1} - br^{k+2}}{1-r} \\
&= \frac{br - br^{k+2}}{1-r} \\
&= br\frac{1-r^{k+1}}{1-r} = \mathrm{HL}_{n=k+1}
\end{aligned}$$

Vi har här använt induktionsantagandet i den tredje likheten. Induktionsprincipen ger nu att formeln är sann för alla $n \geq 1$.

7. Vi prövar med $n = 1, 2, 3, 4$, och så vidare och ser att $6^2 \geq 5 \cdot 6 + 3$. En gissning är därför att $n^2 \geq 5n + 3$ för alla $n \geq 6$. Vi bevisar detta med induktion och utgår från att vi vet att olikheten stämmer för $n = 6$ som induktionsbas.

   Vi antar att olikheten är sann för $n = k \geq 6$, det vill säga att $k^2 \geq 5k + 3$ och försöker bevisa att detta ger att olikheten är sann för $n = k + 1$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{VL}_{k+1} &= (k+1)^2 = k^2 + 2k + 1 \geq (5k+3) + 2k + 1 = 7k + 4 \\
&= 5(k+1) + 3 + 2k - 4 \geq 5(k+1) + 3 = \mathrm{HL}_{k+1}
\end{aligned}$$

   I första olikheten användes induktionsantagandet och den sista olikheten gäller för all k för vilka $2k - 4 \geq 0$. Det senare är sant eftersom $k \geq 6$ (men det skulle räcka med $k \geq 2$). Induktionsprincipen ger nu att formeln är sann för alla $n \geq 6$.

8. Låt $P(n)$ vara påståendet att en mängd med n element har $\frac{n(n-1)}{2}$ delmängder med 2 element (vi kallar dem 2-delmängder i fortsättningen).

Som induktionsbas tar vi $P(0)$, det vill säga att den tomma mängden har

$$\frac{0 \cdot (0-1)}{2} = 0$$

2-delmängder, vilket stämmer bra.

Antag nu att $P(k)$ är sann, det vill säga att varje mängd med k element har $\frac{k(k-1)}{2}$ 2-delmängder. Givet detta ska vi bevisa $P(k+1)$, det vill säga att varje mängd M med $k+1$ element har $\frac{(k+1)((k+1)-1)}{2} = \frac{(k+1)k}{2}$ 2-delmängder.

Mängden M har åtminstone ett element eftersom $k+1 \geq 0+1 = 1$. Låt x vara ett av elementen i M och blida en ny mängd M' genom att ta bort x från M. Mängden M' har precis k element så enligt induktionsantagandet kan vi konstatera att M' har $\frac{k(k-1)}{2}$ 2-delmängder. Dessa 2-delmängder är också 2-delmängder till M och utöver dem finns också k stycken 2-delmängder på formen $\{x, y\}$ där $y \in M'$. Det finns alltså precis k sätt att välja dessa mängder på. Vi får totalt

$$\frac{k(k-1)}{2} + k = \frac{k(k-1)+2k}{2} = \frac{k(k+1)}{2}$$

2-delmängder i M, vilket bevisar att $P(k+1)$ är sann. Enligt induktionsprincipen så gäller alltså $P(n)$ för alla $n \geq 0$.

9. Vi ska bevisa att för alla $n \geq 12$ finns två heltal $a, b \geq 0$ så att $n = 3a+7b$.

Induktionsbasen består av påståendet att talet 12 kan skrivas som en summa av 3:or och 7:or. Vi ser att det är sant genom att skriva

$$12 = 3+3+3+3,$$

det vill säga $a = 4$ och $b = 0$.

I induktionssteget ska vi anta att talet $n = k \geq 12$ kan skrivas som en summa av 3:or och 7:or och bevisa att vi ur det kan dra slutsatsen att även $n = k+1$ kan skrivas på detta sätt. Vi delar upp resonemanget i två fall.

Fall 1: Om $k = 3a+7b$ och $b \geq 2$ så kan vi skriva

$$k+1 = 3(a+5) + 7(b-2) = 3a' + 7b'$$

där $a', b' \geq 0$ är två heltal. I detta fall kan vi alltså skriva talet $k+1$ på det önskade viset.

Fall 2: Om $k = 3a+7b$ och $b < 2$ så gäller att $3a = k - 7b \geq 12 - 7 = 5$ vilket betyder att $a \geq 2$. Vi kan då skriva

$$k+1 = 3(a-2) + 7(b+1) = 3a' + 7b'$$

där $a', b' \geq 0$ återigen är två heltal. Även i detta fallet kan vi alltså skriva $k+1$ på den givna formen.

Sammantaget kan vi se att vi alltid kan skriva $n = k+1$ som summan av 3:or och 7:or givet att vi kan göra det för $n = k \geq 12$. Induktionsprincipen ger därmed att påståendet är sant för alla $n \geq 12$.

10. Induktionsbasen består av fallet då $n = 1$ och om vi sätter in det värdet i formeln för a_n så får vi $\frac{5^1-1}{4} = 1$, vilket stämmer bra med talföljdens definition. Vi antar nu att formeln är sann för $n = k$, det vill säga att $a_k = \frac{5^k-1}{4}$. I induktionssteget bevisar vi att vi kan sluta oss till att formeln även gäller för $n = k+1$. Vi använder först definitionen av talföljden då $n = k+1$ och får följande:

$$a_{k+1} = 5a_k + 1$$

Med hjälp av induktionsantagandet (som vi använder i den andra likheten) kan vi nu skriva detta som

$$\begin{aligned} a_{k+1} = 5a_k + 1 = 5 \cdot \frac{5^k - 1}{4} + 1 = \\ = \frac{5^{k+1} - 5}{4} + 1 = \frac{5^{k+1} - 5 + 4}{4} = \\ = \frac{5^{k+1} - 1}{4}. \end{aligned}$$

Vi har med detta resonemang bevisat att formeln gäller för $n = k+1$ och induktionsprincipen ger därmed att den är sann för alla $n \in \mathbb{N}$.

11. Vi ska bevisa att det inte finns något minsta motexempel till påståendet $n < 2^n$ då $n \in \mathbb{N}$. Precis som för det vanliga induktionsbeviset så börjar vi med att bevisa påståendet för det minsta värdet på n, det vill säga för $n = 1$. Påståendet blir i det fallet att $1 < 2^1$ vilket stämmer bra, så $n = 1$ är inte ett motexempel.

Vi antar nu att vi har ett minsta motexempel för $n = k \geq 2$, det vill säga att $k \geq 2^k$ och resonerar sedan på följande vis. Vi har redan bevisat att k kan inte vara 1 så $2^{k-1} \geq 2^{2-1} \geq 1$, vilket ger:

$$k - 1 \geq 2^k - 1 \geq 2^k - 2^{k-1} = 2^{k-1}$$

Vi har alltså bevisat att om $n = k$ är ett motexempel till $n \geq 2^n$, så är även $n = k-1$ är ett motexempel till påståendet. Detta leder till en motsägelse eftersom $n = k$ skulle vara det minsta motexemplet. Slutsatsen blir att det inte kan finnas något minsta motexempel för $n \in \mathbb{N}$ och det i sin tur leder till att det inte kan finnas några motexempel alls. Den sista biten av resonemanget hänger på att de naturliga talen har egenskapen att varje icke-tom delmängd innehåller ett minsta tal).

12. Felet ligger i att vi i induktionssteget antar att påståendet är sant för $k \geq 2$, men i induktionsbasen har vi bara bevisat att påståendet är sant för $k = 1$. Ett korrekt bevis skulle kräva att induktionsbasen också omfattade $k = 2$, men det skulle inte gå att bevisa eftersom påståendet är falskt.

13. För $n = 1$ depå kan vi konstatera att all bensin finns vid en depå. Vi kan alltså starta där, fylla tanken och sedan köra ett varv. Vi antar nu att påståendet är sant för $n = k$ depåer och bevisar det för $n = k + 1$ depåer.

    Om vi har $k + 1$ depåer $D_1, ..., D_{k+1}$ så måste det finnas någon depå D_a där det finns tillräckligt mycket bensin för att man ska kunna ta sig till nästa depå (annars kan det inte totalt finnas bensin till ett varv). Låt D_b vara depån som kommer direkt efter D_a. Vi tänker oss nu att vi flyttar all bensin i D_b till depån D_a så att vi ser det som att vi har k depåer.

    Vi konstaterar nu att induktionsantagandet ger att det måste finnas en depå D_c där man kan starta och köra ett varv (c kan vara lika med a).

    Om vi nu flyttar tillbaka bensinen till depå D_b och startar i D_c så är allt oförändrat fram till depå D_a. När vi är i D_a så kan vi tanka upp all bensin som finns där och klara oss till depå D_b (enligt vårt resonemang ovan). När vi är framme i D_b så har vi totalt fyllt på med precis lika mycket bensin som vi hade innan vi flyttade tillbaka bensinen till D_b och det betyder att vi kommer klara oss tillbaka till startpunkten i D_c.

    Vi har bevisat att påståendet gäller för $n = k + 1$ depåer, givet att det gäller för $n = k$ depåer. Induktionsprincipen ger att påståendet är sant för alla $n \geq 1$.

4.2 Binomialsatsen

1. Båda kan räknas ut för hand enligt följande.

$$\begin{aligned}\binom{12}{7} = \binom{12}{7} &= \frac{12!}{7!(12-7)!} = \frac{12!}{7! \cdot 5!} \\ &= \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \\ &= \frac{11 \cdot 9 \cdot 8}{1} = 792.\end{aligned}$$

    I sista steget förkortar vi 10 och 12 i täljaren mot $5 \cdot 2$ respektive $3 \cdot 4$ i nämnaren.

2. I föregående uppgift såg vi att $\binom{12}{7} = \binom{12}{7}$, och nu ska vi visa att detta var ett exempel på ett mer generellt samband.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{n-k}$$

3. Enligt Binomialsatsen har vi att

$$\left(\frac{1}{2}+x^2\right)^{14} = \sum_{k=0}^{14}\binom{14}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot (x^2)^{14-k} = \sum_{k=0}^{14}\left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot x^{28-2k}$$

Den term som vi är intresserade av ges av att välja k så att $28-2k=8$, det vill säga för $k=10$. Vi sätter in detta värde och får följande:

$$\begin{aligned}\binom{14}{10}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\cdot(x^2)^{14-10} = \binom{14}{4}\cdot\frac{1}{2^{10}}\cdot x^8 &= \frac{14\cdot 13\cdot 12\cdot 11}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}\cdot\frac{1}{2^{10}}\cdot x^8 = \\ &= \frac{7\cdot 13\cdot 11}{2^{10}}\cdot x^8\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}(2x-3y)^9 &= (2x+(-3y))^9 \\ &= \binom{9}{0}2^9x^9 - \binom{9}{1}2^83x^8y + \binom{9}{2}2^73^2x^7y^2 \\ &\quad - \binom{9}{3}2^63^3x^6y^3 + \binom{9}{4}2^53^4x^5y^4 - \binom{9}{5}2^43^5x^4y^5 \\ &\quad + \binom{9}{6}2^33^6x^3y^6 - \binom{9}{7}2^23^7x^2y^7 + \binom{9}{8}23^8xy^8 - \binom{9}{9}3^9y^9\end{aligned}$$

5. Vi använder den vanliga kvadreringsregeln två gånger, där vi i det första steget behandlar $b+c$ som en enda term.

$$\begin{aligned}(a+b+c)^2 &= (a+(b+c))^2 = \\ &= a^2+2a(b+c)+(b+c)^2 = \\ &= a^2+2ab+2ac+b^2+2bc+c^2 = \\ &= a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc\end{aligned}$$

6. Ja, vi har exempelvis att $(2\cdot 5)! = 10! = 3628800$ men $2\cdot 5! = 240$.

7. Enligt definitionen så gäller $\binom{n}{0}=\binom{n}{n}=1$ för alla $n\geq 0$. Vi tar detta som vår induktionsbas och antar att $\binom{n}{k}$ är ett heltal för alla par av n och k som uppfyller att $0\leq k<s$ och $n\geq k$ eller $k=s$ och $s\leq n\leq r$. Vi får då att

$$\binom{r+1}{s} = \binom{r}{s} + \binom{r}{s-1}.$$

Enligt induktionsantagandet så är båda termerna i högerled heltal och alltså måste även talet i vänsterled vara ett heltal. Vi har alltså bevisat att nästa r-värde då $k=s$ ger ett heltal och induktionsprincipen ger därmed att $\binom{n}{s}$ är ett heltal för alla $n\geq s$. Om vi nu tar nästa s-värde så kan vi resonera på samma sätt och bevisa att $\binom{n}{s+1}$ är ett heltal för alla $n \geq s+1$. Induktionsprincipen ger då att $\binom{n}{k}$ är ett heltal för alla $n \geq k \geq 0$.

8.

$$\begin{aligned}
(a+b)^2 &= (a+b)(a+b) = && \text{Definition av potens} \\
&= (a+b)a + (a+b)b = && \text{Distributiv lag} \\
&= a^2 + ba + ab + b^2 = && \text{Distributiv lag} \\
&= a^2 + ab + ab + b^2 = && \text{Kommutativ lag} \\
&= a^2 + 2ab + b^2
\end{aligned}$$

9.

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot 1^k \cdot 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

10.

$$1 = 1^n = (p + (1-p))^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

Kapitel 5

Trigonometri

5.1 Vinklar

1. Använd exempelvis att $1° = \dfrac{\pi}{180}$ radianer. Det ger att
$$30° = \frac{\pi}{6}, \quad 60° = \frac{\pi}{3}, \quad 120° = \frac{2\pi}{3} \quad \text{och} \quad 270° = \frac{3\pi}{2}.$$

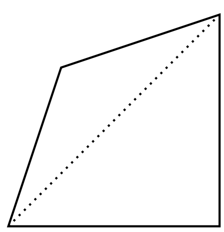
2. Använd exempelvis att 1 radian är $\left(\dfrac{180}{\pi}\right)^{\circ}$. Detta ger: $\dfrac{\pi}{2} = 90°$ och $\dfrac{7\pi}{4} = 315°$.

3. Eftersom $3 \cdot 360° < 1200 < 4 \cdot 360°$ så följer det att det ryms tre hela varv på 1200°. På samma sätt får vi att $6 \cdot 2\pi < 13\pi < 7 \cdot 2\pi$ så det ryms sex hela varv i 13π rad.

4. Diagonalen delar hörnvinkeln mitt itu och måste därför vara hälften av 90°, vilket blir 45°. I radianer får vi hälften av $\frac{\pi}{2}$, det vill säga $\frac{\pi}{4}$.

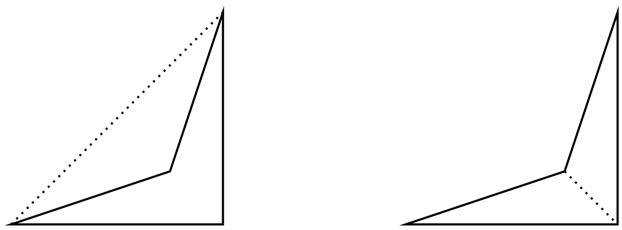
5. Om triangeln är liksidig så är alla vinklar lika, det vill säga att alla är w. Vinklarnas summa är 180° så vi får $3w = 180°$. Det ger att $w = 60°$ och i radianer motsvarar det $60° \cdot \frac{\pi}{180°} = \frac{\pi}{3}$.

6. Vi tänker oss en allmän fyrhörning, och delar den i två trianglar som i figuren nedan.



De två trianglar som bildas har båda vinkelsumman $180°$ och man kan se att fyrhörningens vinkelsumma är summan av trianglarnas vinklar. Fyrhörningens vinkelsumma är därför $2 \cdot 180° = 360°$.

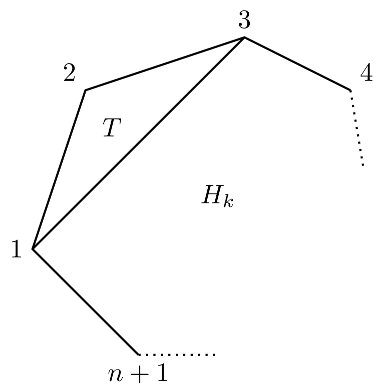
Om fyrhörningen inte är *konvex* kan man ändå dela den i två trianglar, som i figuren nedan, och upprepa samma argument. I figuren till vänster ser vi att vissa försök att dela en fyrhörning i två trianglar genom att sammanbinda två motstående hörn med en diagonal inte på ett självklart sätt leder till att fyrhörningen delas in i två trianglar. I dessa fall duger dock alltid den andra diagonalen, som i figuren till höger.



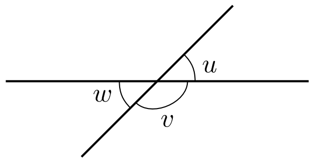
7. Vi bevisar följande påstående för $n \geq 3$.

   $P(n)$: Vinkelsumman s i en n-hörning är $s = 180° \cdot (n-2)$ för $n \geq 3$.

   Induktionsbasen $P(3)$ blir den välkända satsen om att en triangel har vinkelsumman $180°$. Vi antar att $P(k)$ är sann och bevisar att $P(k+1)$ följer ur det. Låt H_{k+1} vara $(k+1)$-hörningen i figuren nedan med hörnen numrerade från 1 till $k+1$. Låt T vara den triangel som vi får genom att förbinda hörnen 1 och 3 i H_{k+1}. Bredvid T bildas då en k-hörning som vi betecknar med H_k. Vi kan nu sluta oss till att vinkelsumman i T är $180°$ och med hjälp av induktionsantagandet att vinkelsumman för H_k är $180° \cdot (k-2)$. Eftersom vinkelsumman s för H_{k+1} är summan av vinklarna i T och H_k så får vi att $s = 180° + 180° \cdot (k-2) = 180° \cdot ((k+1)-2)$. Den sista slutsatsen ger att $P(k+1)$ är sann. Induktionsprincipen ger att $P(n)$ är sann för alla $n \geq 3$.



8. I figuren nedan kan vi se att $u + v = 180°$ och $v + w = 180°$. Ur detta följer att $u = w$.

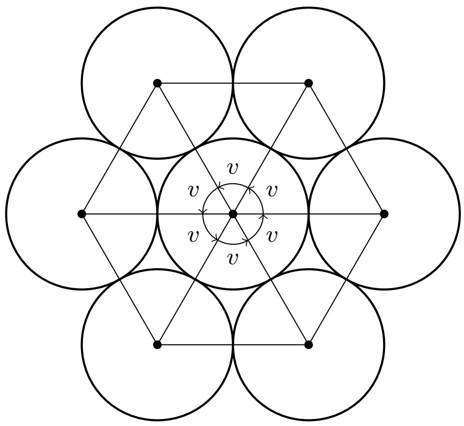


Notera att en svaghet i detta bevis är att vi inte uttryckligen argumenterat för att vi alltid kan hitta en ordning på hörnen som faktiskt ger en triangel T. Om n-hörningen inte är konvex skulle hörn 2 kunna vara en ”inbuktning”. Informellt så kan inte *alla* hörn vara ”inbuktningar”, så vi kan alltid hitta *någon* triangel T att skära bort så att argumentet håller.

Om n-hörningen faktiskt *är* konvex kan vi ta vilken ordning som helst på hörnen och alltid få en triangel som fungerar i argumentet.

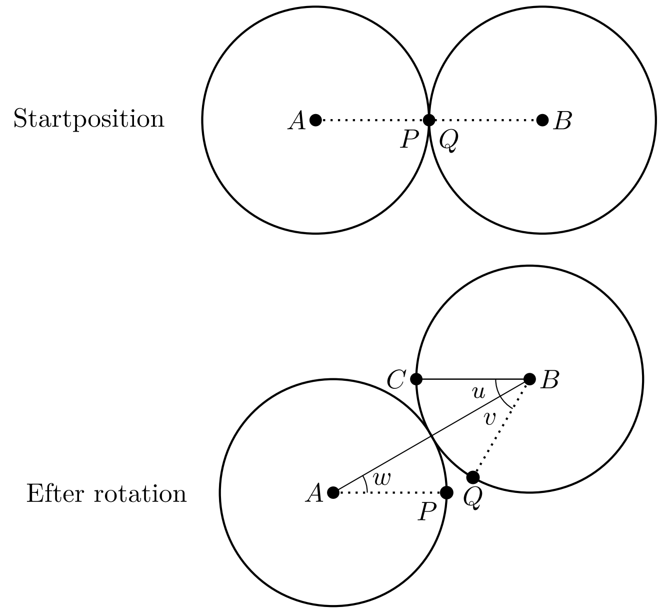
9. Vinkelbågens längd är (enligt definitionen av radianer) $r \cdot w$ lång. Om $r = 1$ sammanfaller w och C.

10. I nedanstående figur kan man se hur sex enkronor precis får plats runt en sjunde enkrona. Notera att alla vinklar runt myntet i mitten är lika, det vill säga $v = 60°$, och att alla de trianglar som bildas är liksidiga.



11. I figuren nedan visas först mynten bredvid varandra i startpositionen. Den gemensamma tangeringspunkten kan vi beteckna med $P = Q$, där punkten P ligger på det vänstra myntets omkrets.

Under denna figur visas mynten efter att ha det högra har rullat längs med kanten av det vänstra myntet. Det högra myntet har då roterat vinkeln $u+v$ runt sitt centrum, och punkten Q har förflyttat sig något. Man kan se att $u = w$ (alternatvinklar). Man kan också se att $v = w$ eftersom mynten har varit i kontakt längst en gemensam cirkelbåge under rotationen. Vi får alltså att det högra myntet har roterat vinkeln $u + v = 2w$. Om vi tar $w = 360°$ så kommer då det högra myntet ha roterat $2 \cdot 360°$ runt sitt centrum, det vill säga två varv.



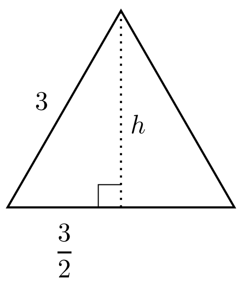
5.2 Pythagoras sats

1. Pythagoras sats säger att $a^2 + b^2 = c^2$ där a och b är kateter och c är hypotenusan. Om vi substituerar $a = 80$ och $b = 18$ så får vi

$$c^2 = 80^2 + 18^2 = 6724,$$

vilket ger $c = \pm\sqrt{6724} = \pm 82$. Eftersom c är en sträcka så kan det negativa värdet avfärdas, och vi får$c = 82$. Notera att a, b och c alla är heltal, vilket inte är normalfallet.

2. I figuren nedan har vi dragit höjden h i en liksidig triangel med sidan 3.

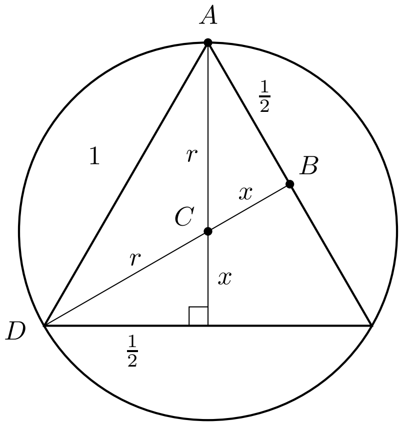


Pythagoras sats ger

$$\begin{aligned}
3^2 &= h^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 \\
9 &= h^2 + \frac{9}{4} \\
h^2 &= 9 - \frac{9}{4} = \frac{27}{4} \\
h &= \pm\sqrt{\frac{27}{4}} = \pm\frac{\sqrt{27}}{2} = \pm\frac{3}{2}\sqrt{3},
\end{aligned}$$

så $h = \frac{3}{2}\sqrt{3}$.

3. I figuren nedan har vi dragit två höjder i triangeln och delat in dem i två delar, dels cirkelns radie r och det som blir över, vilket vi betecknar med x. Sträckan AB har längd $\frac{1}{2}$ eftersom triangeln är liksidig, och C är cirkelns medelpunkt på grund av triangelns symmetri. Notera att triangeln ABC är rätvinklig.



Pythagoras sats ger oss två ekvationer, den första för triangeln ABD och den andra för triangeln ABC:

$$\begin{aligned}
1^2 &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 + (r + x)^2 \\
r^2 &= x^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2
\end{aligned}$$

Den första ekvationen ger att

$$r + x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

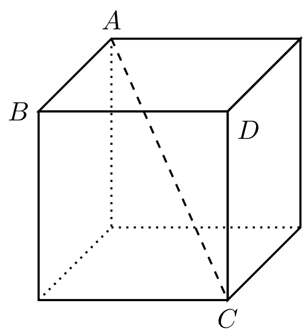
vilket vi substituerar i den andra ekvationen och får

$$r^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - r\right)^2 + \frac{1}{4}.$$

Om vi utvecklar kvadraten i högerled och förenklar så får vi $r = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Cirkelns omkrets blir därför $2\pi r = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$ och dess area blir $\pi r^2 = \frac{\pi}{3}$.

En alternativ lösning fås genom att observera att observera att triangeln ABC är likformig med triangeln DBA, eftersom båda är rätvinkliga och vinkeln $A\hat{C}B$ är lika stor som vinkeln $D\hat{A}B$, på grund av att den stora triangeln är liksidig. Då får man ur likformigheten att $\frac{1}{r+x} = \frac{1}{\sqrt{3}/2} = \frac{r}{1/2}$, där man enkelt kan lösa ut $r = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

4. I figuren nedan kan man exempelvis dra en rymddiagonal från hörnet A till hörnet C (den streckade linjen).



Denna sträcka är hypotenusa i den rätvinkliga triangeln ABC. Pythagoras sats ger därför följande:

$$|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2$$

där $|AB|$, $|BC|$ och $|AC|$ är längden av respektive sträckor AB, BC och AC. Sträckan AB är en sida i kuben, och vi har därför $|AB| = 1$. Längden av BC kan beräknas med Pythagoras sats:

$$|BC|^2 = |BD|^2 + |CD|^2 = 1^2 + 1^2 = 2.$$

Vi sätter in detta i den första ekvationen och får att $|AC|^2 = 3$. Längden av rymddiagonalen är därför $\sqrt{3}$.

Notera att diagonalens längd i en kvadrat med sida 1 har längd $\sqrt{2}$, och man kan visa med induktion att den längsta rymddiagonalens längd i en n-dimensionell kub har längd $\sqrt{n}$.

5. Avståndet d som söks kan skrivas som

$$d = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{x^2 + (3-2x)^2}.$$

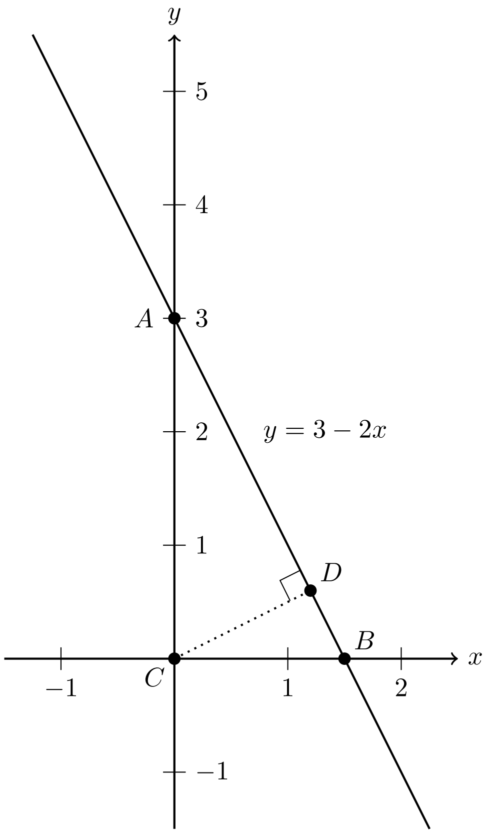
Vi söker alltså det minsta värdet som detta uttryck kan anta. Vi skriver om det med hjälp av kvadratkomplettering:

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{x^2 + (3-2x)^2} = \sqrt{5\left(x^2 - \frac{12}{5} + \frac{9}{5}\right)} = \\ &= \sqrt{5} \cdot \sqrt{\left(x - \frac{6}{5}\right)^2 - \frac{36}{25} + \frac{9}{5}} = \\ &= \sqrt{5} \cdot \sqrt{\left(x - \frac{6}{5}\right)^2 + \frac{11}{25}}. \end{aligned}$$

Vi ser att detta uttryck har sitt minimum då $x = \frac{6}{5}$, eftersom kvadraten är noll för detta värde på x, och strikt positiv för alla andra värden på x.

Den punkt som söks är därför $(x, y) = (\frac{6}{5}, \frac{3}{5})$, och det minimala avståndet är $\frac{3}{5}\sqrt{5}$.

Som alternativ kan man resonera med hjälp av vissa geometriska begrepp. I figuren nedan har vi streckat det linjestycke som vi mäter avståndet längs med. Det kortaste avståndet fås då linjen CD är rätvinklig mot linjen AB.



Man kan se att trianglarna ABC och CDB är likformiga eftersom vinkeln vid D måste vara rät. Detta leder till följande:

$$\frac{|CD|}{|CB|} = \frac{|AC|}{|AB|}.$$

Vi kan se att $|CD| = d$, $|AC| = 3$, $|CB| = \frac{3}{2}$ och med hjälp av Pythagoras sats att $|AB| = \sqrt{3^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{3}{2}\sqrt{5}$. Vi får alltså att

$$d = CB \cdot \frac{|AC|}{|AB|} = \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{3}{5}\sqrt{5}.$$

6. a) Följande likhet bevisar påståendet.

$$5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169 = 13^2$$

b) Om (a, b, c) är en pythagoreisk trippel så gäller att

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Vi multiplicerar med k^2 och skriver om uttrycket.

$$k^2a^2 + k^2b^2 = k^2c^2$$
$$(ka)^2 + (kb)^2 = (kc)^2$$

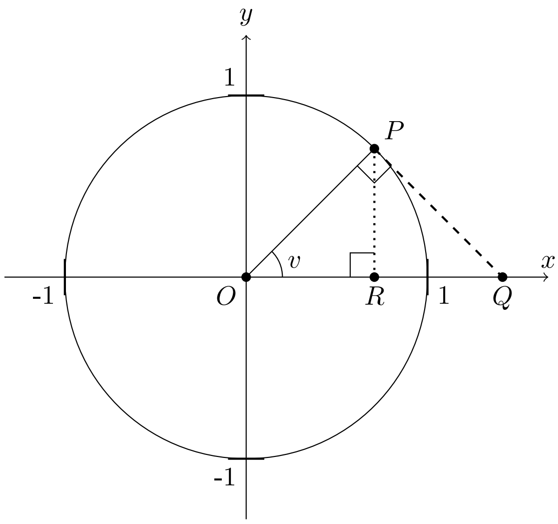
men detta betyder per definition att (ka, kb, kc) är en pythagoreisk trippel.

c) Följande likhet bevisar påståendet.

$$(2mn)^2 + (m^2 - n^2)^2 = m^4 + 2n^2m^2 + n^4 = (m^2 + n^2)^2$$

5.3 Trigonometriska funktioner

1. I figuren nedan har vi dragit höjden från punkten P. Man kan se att triangeln OPQ är likformig med triangeln ORP, eftersom de båda är rätvinkliga och har ytterligare en vinkel gemensam, nämligen v.



Detta ger att

$$\frac{|PQ|}{|OP|} = \frac{|PR|}{|OR|}.$$

Men $|OP| = 1$, $|OR| = \cos(v)$ och $|PR| = \sin(v)$ vilket ger:

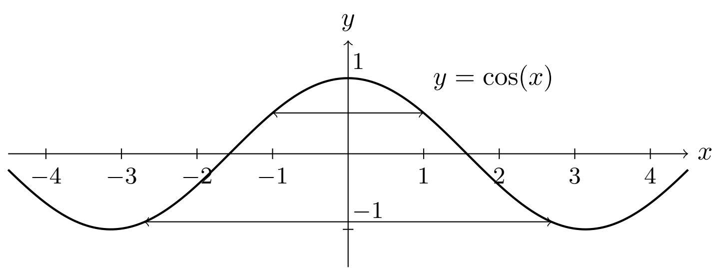
$$|PQ| = |OP| \cdot \frac{|PR|}{|OR|} = \frac{\sin(v)}{\cos(v)} = \tan(v).$$

5.4 De trigonometriska funktionernas egenskaper

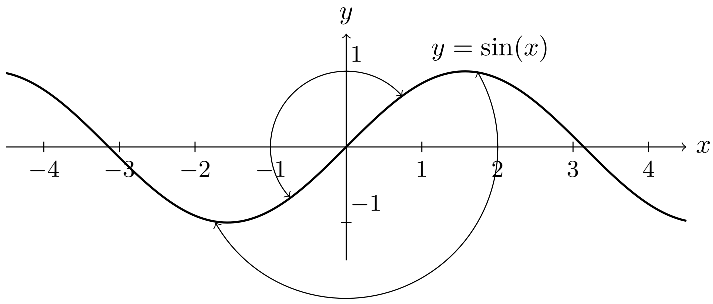
1. Nedan har vi använt att $\cos(-v) = \cos(v)$ och $\sin(-v) = -\sin(v)$ för att utöka tabellen med vinklarna $-30° = -\pi/3$ radianer, $-45°$ och $-60°$.

v rad	$v°$	$\cos(v)$	$\sin(v)$	$\tan(v)$
$-\frac{\pi}{3}$	-60	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\sqrt{3}$
$-\frac{\pi}{4}$	-45	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	-1
$-\frac{\pi}{6}$	-30	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$
0	0	1	0	0
$\frac{\pi}{6}$	30	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$\frac{\pi}{4}$	45	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1
$\frac{\pi}{3}$	60	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{2}$	90	0	1	odef.
π	180	-1	0	0

2. I grafen nedan anges vinkeln x i radianer. Det kan vara lätt att glömma att ställa om vinkelenheten på sin räknare när man ritar trigonometriska grafer. En jämn funktion är spegelsymmetrisk runt y-axeln. Detta antyds genom de dubbelriktade pilarna mellan några av de punkter som speglas på varandra.



3. En udda funktion är rotationssymmetrisk runt origo. Detta antyds i grafen genom de böjda pilarna mellan några av de punkter som roteras till varandra.



4. Vi får att

$$\tan(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin(x)}{\cos(x)} = -\frac{\sin(x)}{\cos(x)} = -\tan(x).$$

   Notera att vi i mellanstegen har $\cos(-x)$ respektive $\cos(x)$ i nämnarna, så de uttrycken är inte definierade för de x som ger $\cos(-x) = 0$ eller $\cos(x) = 0$, men det gör inget, för det är precis de värden på x där inte heller $\tan(x)$ och $\tan(-x)$ är definierat.

5. Om $f(x) = x + \sin(x)$ så gäller att

$$f(-x) = -x + \sin(-x) = -x - \sin(x) = -\bigl(x + \sin(x)\bigr) = -f(x).$$

6. Om $f(x) = x^2 + \cos(x)$ så gäller att

$$f(-x) = (-x)^2 + \cos(-x) = x^2 + \cos(x) = f(x).$$

7. Nedan har vi använt att $\cos(\pi + v) = -\cos(v)$ och $\sin(v + \pi) = -\sin(v)$ för att utöka tabellen med vinklarna 210°, 225° och 240°.

v rad	v°	$\cos(v)$	$\sin(v)$	$\tan(v)$
$-\frac{\pi}{3}$	-60	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\sqrt{3}$
$-\frac{\pi}{4}$	-45	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	-1
$-\frac{\pi}{6}$	-30	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$
0	0	1	0	0
$\frac{\pi}{6}$	30	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$\frac{\pi}{4}$	45	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1
$\frac{\pi}{3}$	60	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{2}$	90	0	1	odef.
π	180	-1	0	0
$\frac{7\pi}{6}$	210	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$\frac{5\pi}{4}$	225	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	1
$\frac{4\pi}{3}$	240	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{3}$

8. Följande är ett exempel på hur man kan resonera:

$$\sin(180^\circ - v) = \sin(-v + 180^\circ) = -\sin(-v) = -(-\sin(v)) = \sin(v)$$

I den första och sista likheten använder vi bara elementär algebra. I den andra likheten använder vi addition av halvt varv, och i den tredje använder vi att sinus är en udda funktion.

9. Exempelvis gäller att $\sin(750^\circ) = \sin(360^\circ \cdot 2 + 30^\circ) = \sin(30^\circ) = \frac{1}{2}$. Med liknande resonemang får vi följande tabell.

v rad	v°	$\cos(v)$	$\sin(v)$	$\tan(v)$
$\frac{13\pi}{6}$	390	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$\frac{25\pi}{6}$	750	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$\frac{19\pi}{3}$	1140	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{3}$

10. Att $\sin(x)$ har period 360° kan vi också uttrycka som att

$$\sin(x + n \cdot 360^\circ) = \sin(x)$$

för alla $n \in \mathbb{Z}$, samt att 360° är den minsta vinkeln som detta gäller för. Det betyder att $\sin(2x) = \sin(2x + n \cdot 360^\circ)$ vilket kan skrivas som

$\sin(2x) = \sin(2(x+n\cdot 180°))$. Detta betyder att värdena som $\sin(2x)$ antar upprepas med den kortare perioden $180°$ (eller π radianer).

11. Samma resonemang som ovan ger

$$\cos\left(\frac{x}{3}\right) = \cos\left(\frac{x}{3} + n\cdot 360°\right) = \cos\left(\frac{1}{3}(x + 1080°)\right).$$

Perioden är alltså $1080°$ eller 6π radianer.

12. Man kan resonera på följande vis:

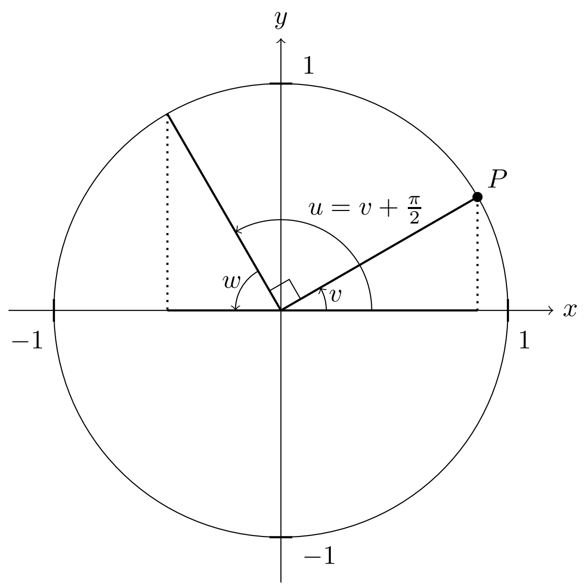
$$\cos(v - 90°) = \cos(-(v - 90°)) = \cos(90° - v) = \sin(v).$$

I den första likheten har vi använt att cosinus är en jämn funktion, och den andra likheten är bara elementär algebra.

13. Notera att $w = \pi - (\frac{\pi}{2} + v) = \frac{\pi}{2} - v$. Från föregående uppgift får vi att

$$\sin(w) = \sin(\frac{\pi}{2} - v) = \cos(\frac{\pi}{2} - v - \frac{\pi}{2}) = \cos(-v) = \cos(v).$$

Påståendet följer också av att vinkeln i punkten P i figuren nedan måste vara w, på grund av likformighet mellan trianglarna.



14. Trigonometriska ettan ger att

$$\cos(v) = \pm\sqrt{1 - \sin(v)^2} = \pm\sqrt{1 - 0{,}7^2} = \pm\sqrt{0{,}51}.$$

Det måste vara den positiva lösningen som är den riktiga eftersom $\cos(v) > 0$ när $0° < v < 90°$.

Man kan också tänka sig andra sätt att resonera, med hjälp av andra trigonometriska identiteter.

15. Trigonometriska ettan ger att
$$\cos(v) = \pm\sqrt{1-\sin(v)^2} = \pm\sqrt{1-0{,}4^2} = \pm\sqrt{0{,}84}.$$
Det måste vara den negativa lösningen som är den riktiga eftersom $\cos(v) < 0$ när $90° < v < 180°$. Vi får alltså
$$\tan(v) = \frac{\sin(v)}{\cos(v)} = \frac{0{,}4}{-\sqrt{0{,}84}} = \frac{-4}{\sqrt{84}} = \frac{-2}{\sqrt{21}}.$$
Man kan också tänka sig andra sätt att resonera, med hjälp av andra trigonometriska identiteter.

16. Punkten $(\cos(v), \sin(v))$ ligger per definition på enhetscirkeln. Punkterna där kännetecknas av att de har avstånd 1 till $(0, 0)$. Avståndsformeln ger
$$\sqrt{(\cos(v)-0)^2 + (\sin(v)-0)^2} = 1^2,$$
vilket kan skriva om till
$$\cos^2(v) + \sin^2(v) = 1.$$

17. När $\cos(v) = 0$ är varken högerled eller vänsterled definierade, eftersom man då skulle dela med 0. Vi måste alltså förutsätta att $v \neq \frac{\pi}{2} + n\cdot\pi$ för alla $n \in \mathbb{Z}$. För övriga v kan vi resonera på detta vis:
$$1+\tan^2(v) = \frac{\cos^2(v)}{\cos^2(v)} + \frac{\sin^2(v)}{\cos^2(v)} = \frac{\cos^2(v)+\sin^2(v)}{\cos^2(v)} = \frac{1}{\cos^2(v)}$$

18. Dessa formler följer genom att sätta $u = v = x$ i summationsformlerna för cosinus respektive sinus.

19. Dessa vinklar kan beräknas på olika sätt med hjälp av tidigare kända värden och de trigonometriska identiteterna, så nedanstående beräkningar ska ses som exempel.

   (a) $\sin(690°) = \sin(2\cdot 360° - 30°) = -\sin(30°) = -\frac{1}{2}$

   (b) $\cos\left(\frac{9\pi}{4}\right) = \cos\left(2\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

   (c) Med hjälp av summationsformlerna:
$$\begin{aligned}\sin(75°) &= \sin(45° + 30°)\\ &= \sin(45°)\cos(30°) + \sin(30°)\cos(45°)\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\\ &= \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\end{aligned}$$

(d) $\tan(210°) = \tan(180° + 30°) = \tan(30°) = \frac{1}{\sqrt{3}}$

20. Här är några exempel på hur man kan utföra beräkningarna.

a) Summationsformel för sinus ger

$$\begin{aligned} \sin\left(\pi + \tfrac{\pi}{4}\right) &= \sin(\pi)\cos\left(\tfrac{\pi}{4}\right) + \cos(\pi)\sin\left(\tfrac{\pi}{4}\right) \\ &= 0 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + (-1) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

b) Summationsformel för cosinus ger

$$\begin{aligned} \cos\left(\tfrac{5\pi}{4}\right) &= \cos\left(\pi + \tfrac{\pi}{4}\right) \\ &= \cos(\pi)\cos\left(\tfrac{\pi}{4}\right) - \sin(\pi)\sin\left(\tfrac{\pi}{4}\right) \\ &= (-1) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - 0 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

c) Addition av halvt varv till vinkeln.

$$\sin\left(\tfrac{4\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3} + \pi\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

d) Addition av halvt varv till vinkeln.

$$\sin\left(\pi - \tfrac{\pi}{4}\right) = -\sin\left(-\tfrac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\tfrac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

e) Periodisk funktion.

$$\cos\left(\tfrac{9\pi}{4}\right) = \cos\left(2\pi + \tfrac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\tfrac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

f) Periodisk funktion.

$$\tan\left(\tfrac{4\pi}{3}\right) = \tan\left(\pi + \tfrac{\pi}{3}\right) = \tan\left(\tfrac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}.$$

21. Trigonometriska ettan tillämpad på formeln för dubbla vinkeln ger

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = \cos^2(x) - (1 - \cos^2(x)) = 2\cos^2(x) - 1.$$

22. Vi löser ut $\cos^2(x)$ ur föregående uppgift.

$$\begin{aligned} \cos(2x) &= 2\cos^2(x) - 1 \\ 1 + \cos(2x) &= 2\cos^2(x) \\ \cos^2(x) &= \frac{\cos(2x) + 1}{2} \end{aligned}$$

Om vi nu sätter $x = \frac{v}{2}$ så får vi den första identiteten som efterfrågas i uppgiften. Om vi använder trigonometriska ettan så kan vi härleda nästa identitet.

$$\begin{aligned}
\cos^2\left(\frac{v}{2}\right) &= \frac{\cos(v)+1}{2} \\
1-\sin^2\left(\frac{v}{2}\right) &= \frac{\cos(v)+1}{2} \\
\sin^2\left(\frac{v}{2}\right) &= \frac{1-\cos(v)}{2}
\end{aligned}$$

23. Sätt exempelvis $v = 30°$ i föregående uppgift. Då fås

$$(\cos(15°))^2 = \frac{\cos(30°)+1}{2} = \frac{\sqrt{3}+2}{4},$$

vilket ger $\cos(15°) = \frac{\sqrt{\sqrt{3}+2}}{2}$.

Ett alternativt sätt är att använda subtraktionsformeln för $\cos(45° - 30°)$.

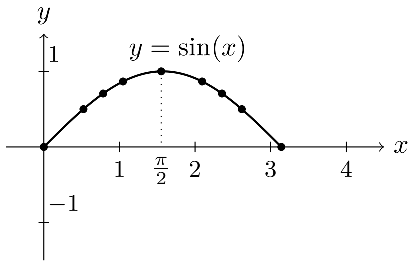
24. Med hjälp av summationsformlerna och trigonometriska ettan får vi

$$\begin{aligned}
(\sin(x)+\cos(x))^2 - 1 &= \sin(x)^2 + 2\sin(x)\cos(x) + \cos(x)^2 - 1 \\
&= \sin(x)^2 + \cos(x)^2 + 2\sin(x)\cos(x) - 1 \\
&= 1 + 2\sin(x)\cos(x) - 1 \\
&= 2\sin(x)\cos(x) \\
&= \sin(2x)
\end{aligned}$$

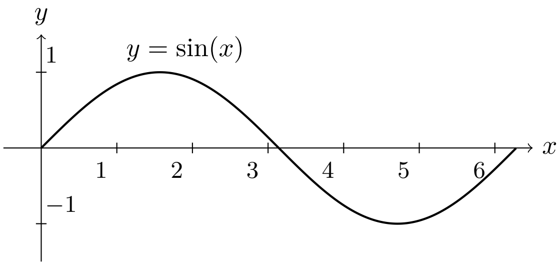
25. Summationsformlerna ger (efter lite arbete)

v rad	$v°$	$\cos(v)$	$\sin(v)$	$\tan(v)$
$\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}$	120	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}$	135	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	-1
$\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}$	150	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}$	180	-1	0	0

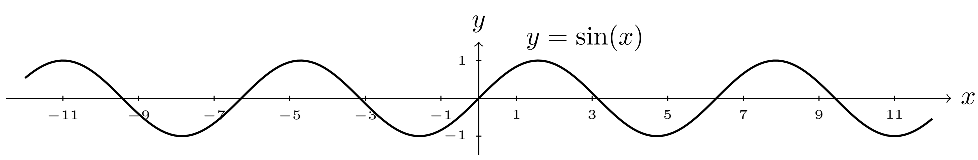
26. Vi får följande graf, med punkterna ur tabellen ovan och Figur 5.10 markerade.



27. Den utvidgade grafen blir



28. Grafen periodiskt utvidgad till hela axeln blir



5.5 Trigonometriska ekvationer

1. Om $\sin(2x) = 1$ så gäller att
$$2x = 90^\circ + n \cdot 360^\circ,$$
det vill säga att
$$x = 45^\circ + n \cdot 180^\circ.$$

2. Om $\cos(3x + 30^\circ) = 0{,}5$ så gäller att
$$3x + 30 = \pm 60^\circ + n \cdot 360^\circ,$$
det vill säga att
$$x_1 = 10^\circ + n \cdot 120^\circ$$
$$x_2 = -30^\circ + n \cdot 120^\circ.$$

3. Om $\tan(3x) = 1$ så gäller att
$$3x = 45° + n \cdot 180°,$$
det vill säga att
$$x = 15° + n \cdot 60°.$$

4. Ekvationen saknar lösning eftersom $-1 \leq \sin(x) \leq 1$ för alla x.

5. Denna ekvation kan endast vara giltig då $\cos(x) = 0$, det vill säga då $x = 90° + n \cdot 360°$ eller $x = 270° + n \cdot 360°$.

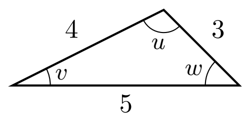
6. Om $x^2 = 2x + 1$ så uppfylls ekvationen, och detta inträffar då $x = 1 \pm \sqrt{2}$.

   För att få alla lösningar så måste vi också ta hänsyn till periodiciteten för sinus. Om $v_1 + n \cdot 360° = 180° - v_2 + m \cdot 360°$, eller $v_1 + n \cdot 360° = v_2 + m \cdot 360°$ så är $\sin(v_1) = \sin(v_2)$. Vi kan alltså lösa ekvationerna $x^2 = 180° - 2x - 1 + n \cdot 360°$ och $x^2 = 2x + 1 + n \cdot 360°$ för att få alla lösningar. Detta ger $x = 1 \pm \sqrt{2 + 360 \cdot n}$ och $x = -1 \pm \sqrt{180 + 720 \cdot n}$.

5.6 Triangelsatserna

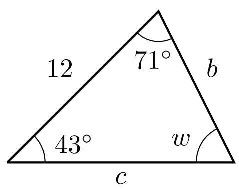
1. Cosinussatsen och sinussatsen kan vara till hjälp i denna uppgift.

   a) Cosinussatsen ger $3^2 = 4^2 + 5^2 - 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \cos(v)$ vilket kan förenklas till $\cos(v) = \frac{4}{5}$ där $0 < v < 90°$. Vi får $v = 36{,}8698976°$. På samma sätt kan vi bestämma att $u = 90°$ och $w = 53{,}1301024°$.

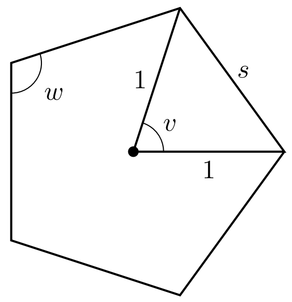
   

   Alternativt kan vi känna igen triangeln som en Pythagoreisk triangel, som alltså har alla sidlängder heltaliga, och är rätvinklig. Vinkeln u är alltså rät. När vi vet att triangeln är rät kan vi direkt använda de geometriska definitionerna av sinus och cosinus för att finna de andra två vinklarna.

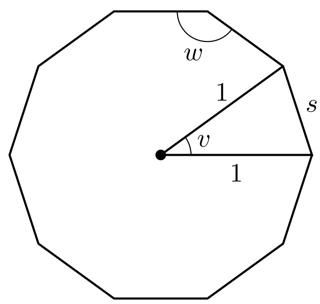
   b) Summan av vinklarna i en triangel är $180°$ så $w = 180° - 71° - 43° = 66°$. Sinussatsen ger att $b \sin(66) = 12 \sin(43)$ vilket i sin tur ger $b \approx 8{,}96$. På samma sätt får vi $c \approx 12{,}42$

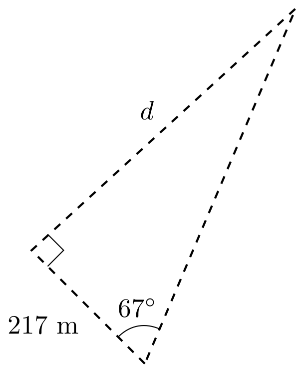
2. I figuren nedan kan man se att $5v = 360°$, det vill säga $v = 72°$. Vi kan också se att $v + \frac{w}{2} + \frac{w}{2} = 180°$ så $w = 108°$. För sidlängden s måste det gälla att $\frac{s}{2} = 1 \cdot \sin\left(\frac{v}{2}\right)$ vilket ger att $s \approx 1{,}18$.



3. Vi använder samma beteckningar som i föregående figur och får att $10v = 360°$, det vill säga $v = 36°$. Vi får också att $v + \frac{w}{2} + \frac{w}{2} = 180°$, vilket ger $w = 144°$. Sidlängden s uppfyller $\frac{s}{2} = 1 \cdot \sin\left(\frac{v}{2}\right)$ vilket ger att $s \approx 0{,}62$.



4. För avståndet d över sjön gäller att $d \cdot \tan(67) = 217$. Detta ger att $d \approx 511$ m.



5. Enligt cosinussatsen gäller att $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(v)$ där vinkeln v står mittemot sidan som har längd a. Om $a^2 = b^2 + c^2$ så får vi $2bc\cos(v) = 0$

vilket betyder att $\cos(v) = 0$, eftersom $b > 0$ och $c > 0$. Detta ger att

$$v = \pm 90^\circ + n \cdot 360^\circ.$$

Eftersom $0 < v < 180^\circ$ för alla vinklar v i en triangel så måste vi ha $v = 90^\circ$. Triangeln har alltså en rät vinkel.

Detta kan sägas vara omvändningen till Pythagoras sats: Pythagoras sats säger att varje rätvinklig triangel uppfyller $a^2 + b^2 = c^2$. Det som bevisats här är att varje triangel som uppfyller $a^2 + b^2 = c^2$ måste vara rätvinklig.

6. Om $a = 4, b = 13$ och $c = 15$ så blir $s = 16$ och arean blir

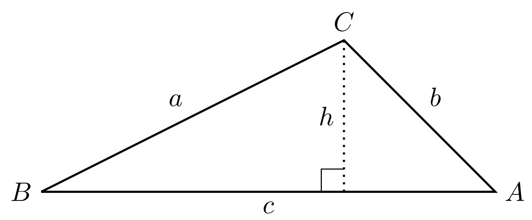
$$\text{Area} = \sqrt{16(16-4)(16-13)(16-15)} = 24.$$

En triangel där alla sidlängder är heltal, och dessutom arean är ett heltal brukar kallas en *Heronsk triangel*.

7. I figuren nedan ser vi att $h = a \cdot \sin(B)$. Vi får alltså att arean blir

$$\text{Area} = \frac{1}{2} ac \sin(B).$$

Notera att vi här missbrukar notationen något, genom att behandla B både som ett hörn i triangeln och den vinkel i triangeln som bildas vid hörnet B. Så har vi gjort även i avsnitt 5.6.



8. Från föregående uppgift får vi att

$$\begin{aligned}
\text{Area} &= \frac{1}{2} ac \sqrt{1 - \cos^2(B)} \\
&= \frac{1}{2} ac \sqrt{1 - \left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}\right)^2} \\
&= \frac{1}{2} ac \sqrt{\frac{4a^2c^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2}{4a^2c^2}} \\
&= \frac{1}{4} \sqrt{4a^2c^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2}
\end{aligned}$$

9. Från föregående uppgift får vi att

   $$16 \cdot \text{Area}^2 = 4a^2c^2 - \left(a^2 + c^2 - b^2\right)^2 = -a^4 - b^4 - c^4 + 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2.$$

   Vi visar nu att Herons formel ger samma uttryck:

   $$\begin{aligned} 16 \cdot \text{Area}^2 &= 16s(s-a)(s-b)(s-c) \\ &= (a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c) \\ &= -a^4 - b^4 - c^4 + 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 \end{aligned}$$

   Vi får alltså samma uttryck i båda fallen. Med andra ord har vi nu bevisat Herons formel.

10. Vi kan se att $\sin(180° - A) = -\sin(-A) = \sin(A)$ så vi får samma uttryck för h.

Kapitel 6

Komplexa tal

6.1 Definition av de komplexa talen

1. Här ges exempel på hur man kan skriva om till formen $a + bi$:

   a) $(1+i)^2 = 1^2 + 2i + i^2 = 1 + 2i + (-1) = 2i$
   b) $i^3 = i^2 \cdot i = (-1) \cdot i = -i$
   c) $i^8 = (i^2)^4 = (-1)^4 = 1$
   d) $i^9 = i \cdot i^8 = i \cdot 1 = i$ (se föregående uppgift)
   e) $i^{-1} = \frac{1}{i} = \frac{1 \cdot i}{i \cdot i} = \frac{i}{-1} = -i$
   f) $i^{-3} = \frac{1}{i^3} = \frac{1}{-i} = -(-i) = i$ (se uppgift b och e).
   g) $(2i)^3 = 2^3 \cdot i^3 = 8 \cdot (-i) = -8i$
   h) $(2i)^4 = 16 \cdot i^4 = 16 \cdot 1 = 16$

2. Här ges exempel på hur man kan skriva om till formen $a + bi$:

   a) $\dfrac{1}{i+1} = \dfrac{1-i}{(i+1)(1-i)} = \dfrac{1-i}{1^2 - i^2} = \dfrac{1-i}{2} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{i}{2}$
   b) $\dfrac{1-i}{i+1} = \dfrac{(1-i)^2}{(i+1)(1-i)} = \dfrac{-2i}{2} = -i$
   c) $\dfrac{i}{i+1} = \dfrac{i(1-i)}{(i+1)(1-i)} = \dfrac{1+i}{2} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{i}{2}$
   d) $\dfrac{5-3i}{2i+7} = \dfrac{(5-3i)(7-2i)}{(2i+7)(7-2i)} = \dfrac{35 - 10i - 21i + 6i^2}{7^2 - 4i^2} = \dfrac{29}{53} - \dfrac{31i}{53}$

3. Här ges exempel på hur man kan skriva om till formen $a + bi$:

   a) $z + \overline{w} = (7-i) + \overline{(3+5i)} = 7 - i + 3 - 5i = 10 - 6i$
   b) $z \cdot w^2 = (7-i) \cdot (3+5i)^2 = (7-i) \cdot (-16 + 30i) = -82 + 226i$

c) $\dfrac{z}{w} = \dfrac{7-i}{3+5i} = \dfrac{(7-i)(3-5i)}{(3+5i)(3-5i)} = \dfrac{16-38i}{34} = \dfrac{8}{17} - \dfrac{19i}{17}$

d) $z + \overline{z} = (7-i) + (7+i) = 14$

4. Vi sätter $z = a + bi$ och $w = c + di$ och räknar:

   a) $z + \overline{z} = (a+bi) + (a-bi) = 2a = 2\,\mathrm{Re}(z)$

   b) $z - \overline{z} = (a+bi) - (a-bi) = 2bi = 2i\ \mathrm{Im}(z)$

   c) $\overline{z+w} = \overline{(a+ib)+(c+di)} = (a+c) - (b+d)i = (a-bi) + (c-di)$
   $= \overline{z} + \overline{w}$

   d) $\overline{z \cdot w} = \overline{(a+bi)\cdot(c+di)} = \overline{(ac-bd)+(ad+bc)i}$
   $= (ac-bd) - (ad+bc)i = (a-bi)\cdot(c-di) = \overline{a+bi}\cdot\overline{c+di}$
   $= \overline{z}\cdot\overline{w}$

5. För $z = 0$ är uttrycket inte definierat. För övriga z sätter vi $z = a+bi$ och räknar:

$$\begin{aligned}
\overline{z}/z &= \frac{\overline{a+bi}}{a+bi} = \frac{a-bi}{a+bi} \\
&= \frac{(a-bi)(a-bi)}{(a+bi)(a-bi)} = \frac{a^2-2abi-b^2}{a^2+b^2} \\
&= \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} - \frac{2ab}{a^2+b^2}i
\end{aligned}$$

6.2 Det komplexa talplanet

Inga uppgifter till detta avsnitt.

6.3 Polär form

1. Om $z = 7 + i$ och $w = -3 - 5i$ så får vi

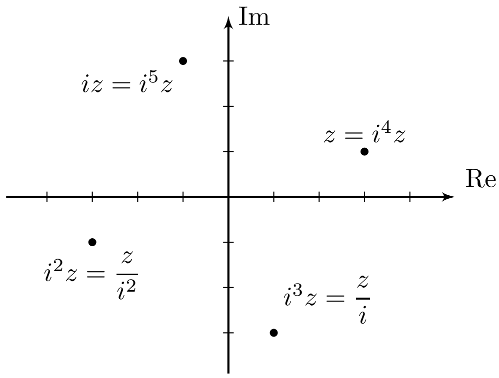
   a) $|z| = |7+i| = \sqrt{7^2+1^2} = \sqrt{50}$

   b) $|w| = |-3-5i| = \sqrt{(-3)^2+(-5)^2} = \sqrt{34}$

   c) $\arg(z) = \arctan\left(\dfrac{1}{7}\right) \approx 0{,}142$ rad

   d) $\arg(w) = -\pi + \arctan\left(\dfrac{5}{3}\right) = -2{,}11$ rad

2. Om $z = 3 + i$ så får vi:



   När man multiplicerar med i så motsvarar det alltså ett kvarts varvs rotation runt origo.

3. Genom att rita ut talet i det komplexa talplanet kan vi bestämma argumentet. I uppgift f) och h) ritar du talet som står i basen och använder sedan de Moivres formel.

   a) $\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

   b) $\sqrt{8}\,\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$

   c) $3\left(\cos(0) + i \sin(0)\right)$

   d) $\sqrt{10}\left(\cos(1{,}89) + i \sin(1{,}89)\right)$

   e) $\sqrt{2}\,\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right)$

   f) $\left(\sqrt{2}\right)^{37} \cdot \left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right)$

   g) $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$

   h) $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

4. Vi skriver $z = a + bi$ och räknar:

   a) $z\overline{z} = (a+bi)\overline{(a+bi)} = (a+bi)(a-bi) = a^2+b^2 = \left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2 = |z|^2$

   b) $|\overline{z}| = |\overline{(a+bi)}| = |a-bi| = \sqrt{a^2+(-b)^2} = \sqrt{a^2+b^2} = |z|$

c) Om z ligger i första kvadranten, d.v.s. om $a > 0$ och $b \geq 0$, så är

$$\arg(\overline{z}) = \arctan\left(\frac{-b}{a}\right) = -\arctan\left(\frac{b}{a}\right) = -\arg(z)$$

eftersom $\arctan(-v) = -\arctan(v)$ för alla v. Om z ligger i en annan kvadrant så kan man resonera på ett liknande vis.

d) Om $b \neq 0$ så gäller att

$$\arg\left((z - \overline{z})^2\right) = \arg((2bi)^2) = \arg(-4b^2) = \pi$$

eftersom $-4b^2$ är ett negativt reellt tal. Om $b = 0$ så är $\arg\left((z - \overline{z})^2\right) = \arg(0)$ vilket är odefinierat (i denna bok).

5. Låt $z = 2(\cos(\pi/3) + i\sin(\pi/3))$ och $w = 3(\cos(\pi/2) + i\sin(\pi/2))$. Använd sedan de Moivres formel.

a) $z^2 = (2(\cos(\pi/3) + i\sin(\pi/3)))^2 = 4(\cos(2\pi/3) + i\sin(2\pi/3))$

b) $zw = 2(\cos(\pi/3) + i\sin(\pi/3)) \cdot 3(\cos(\pi/2) + i\sin(\pi/2))$
$= 6(\cos(5\pi/6) + i\sin(5\pi/6))$

c) $w/z = 3(\cos(\pi/2) + i\sin(\pi/2))/2(\cos(\pi/3) + i\sin(\pi/3))$
$= \frac{3}{2}(\cos(\pi/6) + i\sin(\pi/6))$

d) $z/w^2 = 2(\cos(\pi/3) + i\sin(\pi/3))\big/9(\cos(\pi) + i\sin(\pi))$
$= \frac{2}{9}(\cos(-2\pi/3) + i\sin(-2\pi/3))$

6. Binomialsatsen ger

$$\begin{aligned}(\cos(v) + i\sin(v))^3 & \\ &= \cos^3(v) + 3i\cos^2(v)\sin(v) - 3\cos(v)\sin^2(v) - i\sin^3(v) \\ &= (\cos^3(v) - 3\cos(v)\sin^2(v)) + i(3\cos^2(v)\sin(v) - \sin^3(v)).\end{aligned}$$

Vi kan också skriva om uttrycket med deMoivres formel:

$$(\cos(v) + i\sin(v))^3 = \cos(3v) + i\sin(3v)$$

Om vi ser på realdelen av $(\cos(v) + i\sin(v))^3$ så får vi att

$$\cos(3v) = \cos^3(v) - 3\cos(v)\sin^2(v)$$

och för imaginärdelen att

$$\sin(3v) = 3\cos^2(v)\sin(v) - \sin^3(v).$$

7. Om $z = |z|(\cos(v) + i\sin(v))$ så ska vi bevisa att

$$z^n = |z|^n(\cos(nv) + i\sin(nv))$$

gäller för alla $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsbasen består av fallet då $n = 0$ och vi kan se att båda leden är lika med 1 i det fallet. Vi antar därför att påståendet är sant för $n = k \geq 0$ och försöker visa att påståendet för $n = k + 1$ då följer.

$$\begin{aligned}
\mathrm{VL}_{k+1} &= z^{k+1} = z \cdot z^k \\
&= |z|(\cos(v) + i\sin(v)) \cdot |z|^k(\cos(kv) + i\sin(kv)) \\
&= z^{k+1} \cdot (\cos(v) + i\sin(v)) \cdot (\cos(kv) + i\sin(kv)) \\
&= z^{k+1} \cdot (\cos((k+1)v) + i\sin((k+1)v)) \\
&= \mathrm{HL}_{k+1}
\end{aligned}$$

I den tredje likheten använde vi induktionsantagandet och i den femte att argumenten adderas vid multiplikation i polär form. Enligt induktionsprincipen gäller alltså påståendet för alla $n \in \mathbb{N}$.

6.4 Exponentialfunktionen

1. Här ges exempel på hur man kan räkna och resonera.

a) $e^{-\pi i} = e^0 \cdot (\cos(-\pi) + i\sin(-\pi)) = 1 \cdot (-1 + i \cdot 0) = -1$
Man kan också se att argumentet $-\pi$ ger att talet ligger på negativ reell axel, och eftersom exponentens realdel är noll, så måste beloppet vara 1. Vi får då att $e^{-\pi i} = -1$.

b) $e^{\frac{\pi}{4}i} = e^0 \cdot (\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)) = 1 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}$
Man kan också se att argumentet är en åttondels varv, så talet ligger på en stråle i första kvadranten, med samma realdel som imaginärdel. Eftersom beloppet är 1 så ger Pythagoras sats att $2(\mathrm{Re}(z))^2 = 1$, så $\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \mathrm{Im}(z)$.

c) $e^{-\frac{\pi}{2}i} = 1 \cdot (0 + i \cdot (-1)) = -i$.

d) $e^{\ln 2 + \frac{\pi}{4}i} = e^{\ln 2} \cdot (\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)) = 2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$

e) $\dfrac{1}{e^{-\pi i}} = e^{\pi i} = -1$

f) $e^{-\frac{\pi}{4}i} = \frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}$

g) $e^{-\frac{\pi}{2}i} + e^{\frac{\pi}{2}i} = -i + i = 0$
Observera dock att det *inte* i allmänhet gäller att $e^{x+iy} - e^{-x-iy} = 0$.

h) $e^{\frac{19\pi}{4}i} = e^{4\pi i + \frac{3\pi}{4}i} = e^{4\pi i} \cdot e^{\frac{3\pi}{4}i} = 1 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}$

2. Här är exempel på hur man kan resonera.

   a) Eftersom $|i| = 1$ och $\arg(i) = \frac{\pi}{2}$ så blir $i = e^{0+i\cdot\frac{\pi}{2}} = e^{i\cdot\frac{\pi}{2}}$

   b) $i^2 = -1 = e^{i\cdot\pi}$

   c) $|1+i| = \sqrt{2}$ och $\arg(1+i) = \frac{\pi}{4}$. Vi får därför att $1+i = \sqrt{2}\cdot e^{i\frac{\pi}{4}} = e^{\ln(\sqrt{2})+i\frac{\pi}{4}}$.

   d) $2 = e^{\ln(2)+i\cdot 0}$

   e) $\dfrac{1}{i} = i^{-1} = \left(e^{i\cdot\frac{\pi}{2}}\right)^{-1} = e^{-i\cdot\frac{\pi}{2}}$

   f) Från uppgift c) får vi $\dfrac{1}{1+i} = e^{\ln(\frac{1}{\sqrt{2}})-i\frac{\pi}{4}}$

   g) $\dfrac{1+i}{1-i} = \dfrac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)} = i = e^{i\frac{\pi}{2}}$

   h) $2+2i = 2(1+i)$, så från uppgift c) får vi $2+2i = \sqrt{8}\cdot e^{i\frac{\pi}{4}} = e^{\ln(\sqrt{8})+i\frac{\pi}{4}}$

3. Enligt definitionen av exponentialfunktionen:

$$
\begin{aligned}
\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} &= \frac{1}{2}(\cos(x) + i\sin(x) + \cos(-x) + i\sin(-x)) = \\
&= \frac{1}{2}(\cos(x) + i\sin(x) + \cos(x) - i\sin(x)) = \\
&= \frac{1}{2}\cdot 2\cos(x) = \cos(x).
\end{aligned}
$$

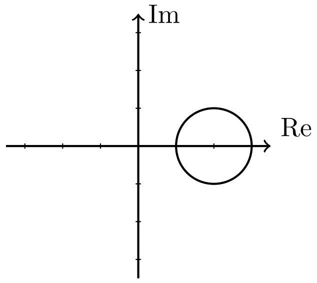
4. Tangens är kvoten mellan sinus och cosinus, så vi får följande:

$$
\begin{aligned}
\tan(z) &= \frac{\sin(z)}{\cos(z)} = \\
&= \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{e^{ix}+e^{-ix}}\frac{2}{2i} = \\
&= -i\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{e^{ix}+e^{-ix}}
\end{aligned}
$$

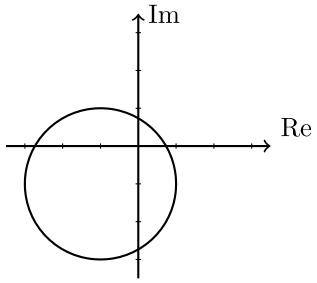
6.5 Avstånd och absolutbelopp

1. Vi använder den geometriska tolkningen av absolutbeloppet.

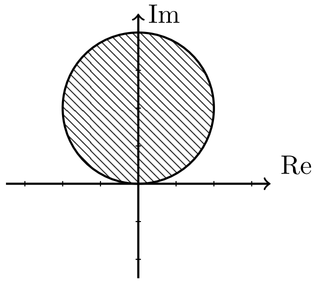
   a) Den geometriska tolkningen av $|z-2|$ ger att uttrycket motsvarar avståndet mellan talet z och talet 2. Detta avstånd ska hela tiden vara 1, vilket betyder att vi får en cirkel med radie 1 och centrum i det komplexa talet 2.



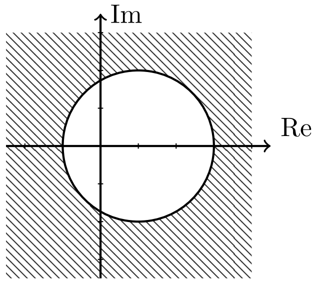
b) Vi kan skriva likheten som $|w - (-i - 1)| = 2$. Den geometriska tolkningen ger en cirkel med centrum i punkten $-1 - i$ och radie 2.



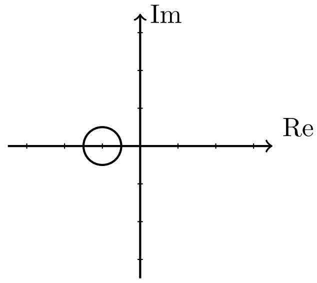
c) Olikheten är uppfylld av alla tal z som ligger på avstånd högst 2 från talet $2i$.



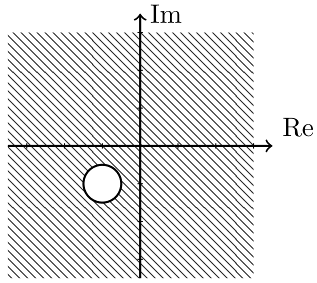
d) Olikheten är uppfylld av alla tal z som ligger på avstånd minst 2 från talet 1.



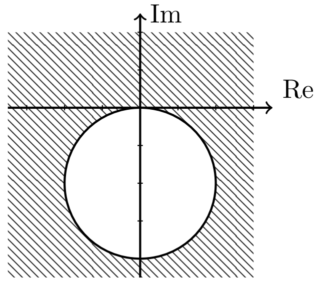
e) Vi kan skriva om likheten till $|z - (-1)| = \frac{1}{2}$. Den motsvarar alltså en cirkel med radien $\frac{1}{2}$ och med centrum i talet -1.



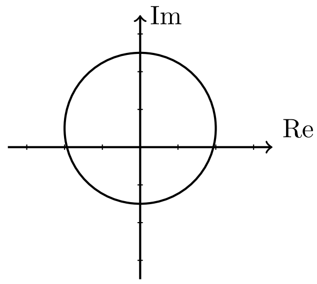
f) Vi skriver om likheten till $|z-(-1-i)| \geq \frac{1}{2}$.



g) Om man bryter ut talet i i vänsterled så får man $\left|i\left(z-\frac{2}{i}\right)\right| \geq 2$, vilket kan skrivas som $|i||z+2i| \geq 2$ om man använder att $\frac{a}{i}=-ai$. Vi får alltså olikheten $|z-(-2i)| \geq 2$.

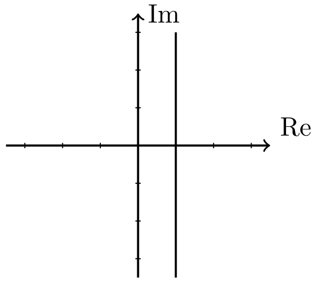


h) Olikheten kan skrivas som $\left|w-\frac{1}{2}i\right|=2$.

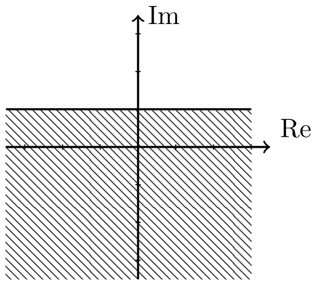


2. Låt $a \in \mathbb{R}$. Vi använder att $\mathrm{Re}(z) = a$ motsvarar en lodrät linje genom talet a på den reella axeln och att $\mathrm{Im}(z) = a$ motsvarar en vågrät linje genom talet ai på den imaginära axeln.

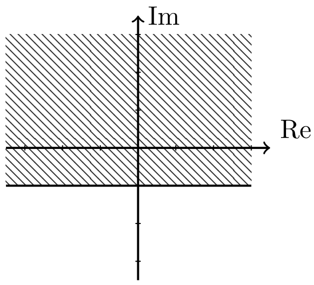
   a) Se den geometriska tolkningen ovan.



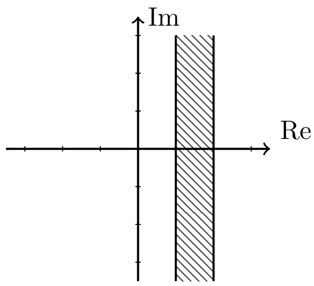
   b) Se den geometriska tolkningen ovan.



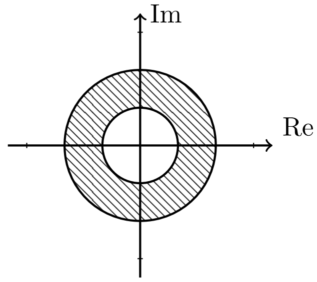
   c) Se den geometriska tolkningen ovan.



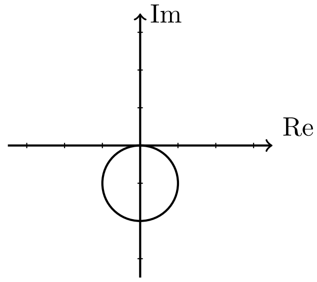
   d) Se den geometriska tolkningen ovan.



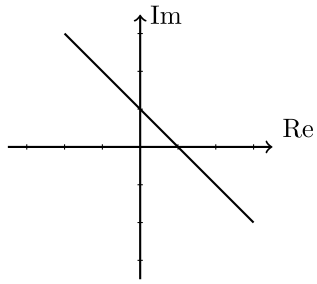
e) Använd den geometriska tolkningen av absolutbeloppet.



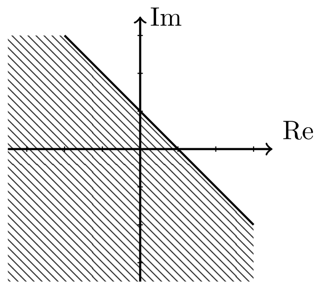
f) Använd den geometriska tolkningen av absolutbeloppet.



g) $\mathrm{Re}(z)+\mathrm{Im}(z) = a$ motsvarar linjen $y = -x+a$ i ett xy-koordinatsystem.

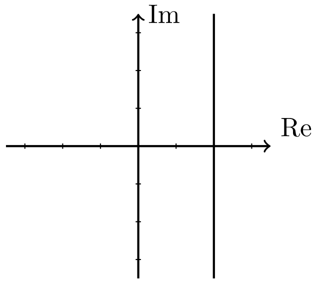


h) Se föregående uppgift.

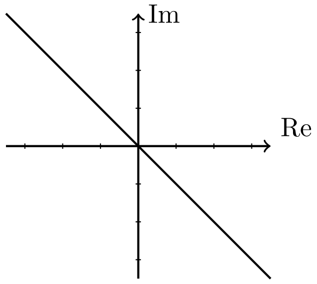


3. Den geometriska tolkningen av $\arg(z) = v$ ger en linje från origo som bildar vinkeln v mot den positiva delen av den reella axeln.

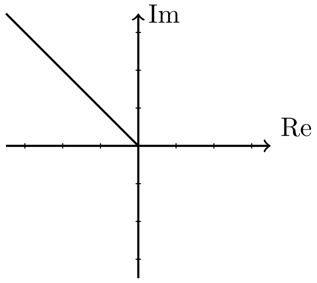
a) Likheten gäller för de z som ligger på samma avstånd från talen 1 och 3. Det ger en lodrät linje som passerar genom den punkt som ligger mitt mellan 1 och 3.



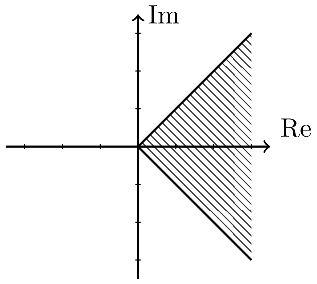
b) Vi skriver om likheten till $|z - (-1)| = |z - i|$ och se att det ger en linje på samma sätt som i föregående uppgift.



c) Använd den geometriska tolkningen av argumentet.



d) Använd den geometriska tolkningen av argumentet.



4. Vi använder de geometriska tolkningar som finns i tidigare uppgifter.

   a) I figuren kan man se att området motsvarar de punkter som ligger i en cirkel med radie $\frac{3}{2}$ och centrum i det komplexa talet $-\frac{3}{2}i$. Dessa punkter kan också beskrivas med olikheten $|x-(-\frac{3}{2}i)| \leq \frac{3}{2}$ eller $|x+\frac{3}{2}i| \leq \frac{3}{2}$

   b) Punkterna är de som har realdel som är högst 1, det vill säga $\text{Re}(z) \leq 1$.

6.6 Rötter till polynomekvationer

1. Nedanstående är exempel på hur man kan lösa ekvationerna.

   a) *pq*-formeln ger:

$$x = -2 \pm \sqrt{2^2 - 5}$$
$$x = -2 \pm \sqrt{-1}$$
$$x = -2 \pm i$$

   b) *pq*-formeln ger:

$$x = -1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 3}$$
$$x = -1 \pm \sqrt{-2}$$
$$x = -1 \pm \sqrt{2}i$$

   c) *pq*-formeln ger:

$$x = -3 \pm \sqrt{(3)^2 - 9}$$
$$x = -3 \pm 0$$
$$x = -3 \text{ (dubbelrot)}$$

   d) Vi kan skriva om $x^2 + 1 = 0$ som $x^2 = -1$ vilket ger $x = \pm i$.

2. Nedanstående är exempel på hur man kan lösa ekvationerna.

   a) *pq*-formeln ger:

$$x = -i \pm \sqrt{(-i)^2 - (-2)}$$
$$x = -i \pm \sqrt{1}$$
$$x = -i \pm 1$$

b) pq-formeln ger:

$$x = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 6}$$
$$x = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - \frac{24}{4}}$$
$$x = \frac{5}{2} \pm \frac{1}{2}$$
$$x = 2 \text{ eller } x = 3$$

c) Ekvationen $x^2 + 4i = 0$ kan skrivas som $x^2 = -4i$. Vi låter $x = a + bi$ och sätter in detta i ekvationen:

$$\begin{aligned} x^2 &= -4i \\ (a+bi)^2 &= -4i \\ a^2 + 2abi - b^2 &= -4i \\ a^2 - b^2 + 2abi &= -4i \end{aligned}$$

Realdel respektive imaginärdel måste vara lika för höger- och vänsterled vilket ger att

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 0 \\ 2ab = -4 \end{cases}$$

Från den första ekvationen får vi att $a = \pm b$ vilket ger $\pm 2b^2 = -4$ om det sätts in i den andra ekvationen. Detta ger $b = \pm\sqrt{2}$. Vi får alltså att $a = \sqrt{2}, b = -\sqrt{2}$ eller $a = -\sqrt{2}, b = \sqrt{2}$. Svar: $z = \sqrt{2} - \sqrt{2}i$ eller $z = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$.

Lösningarna kan också med fördel testas i ursprungsekvationen.

d) Vi bryter ut x i vänsterled och får $x(x + (i+1)) = 0$. Alltså är $x = 0$ eller $x = -1 - i$.

3. Låt $z = r \cdot e^{x+iy}$.

a) Vi skriver om båda leden till exponentialform och får ekvationen $r^3 \cdot e^{3xi} = e^{-\pi i}$. Talet r är alltså ett positivt reellt tal som uppfyller att $r^3 = 1$, vilket betyder att $r = 1$. Vi kan också se att $3x = \pi + n \cdot 2\pi$ vilket ger $x = \frac{\pi}{3} + n \cdot \frac{2\pi}{3}$. Sammanfattningsvis ger detta tre unika lösningar: $e^{\frac{\pi}{3}i} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $e^{\pi i} = -1$ och $e^{\frac{5\pi}{3}i} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

b) Vi gör på samma sätt som i föregående uppgift och får $r^3 e^{3xi} = e^{-\frac{\pi}{2}i}$, vilket ger $r = 1$ och $x = -\frac{\pi}{6} + n \cdot \frac{2\pi}{3}$. Vi får tre unika lösningar $e^{-\frac{\pi}{6}i} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$, $e^{\frac{\pi}{2}i} = i$ och $e^{\frac{7\pi}{6}i} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$.

c) Exponentialformen blir $r^4 e^{4xi} = e^{\pi i}$, vilket ger $r = 1$ och $x = -\frac{\pi}{4} + n \cdot \frac{\pi}{2}$. Vi får de fyra lösningarna $e^{-\frac{\pi}{4}i} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$, $e^{\frac{\pi}{4}i} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$, $e^{\frac{3\pi}{4}i} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$ och $e^{\frac{5\pi}{4}i} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$.

d) Exponentialformen blir $r^3 \cdot e^{3xi} = 2^3 \cdot e^{\pi i}$, vilket ger $r = 2$ och $x = \frac{\pi}{3} + n \cdot \frac{2\pi}{3}$. Vi får de tre lösningarna $2e^{\frac{\pi}{3}} = 1 + \sqrt{3}i$, $2e^{\pi i} = -2$ och $2e^{\frac{5\pi}{3}} = 1 - \sqrt{3}i$

Kapitel 7

Funktioner

7.1 Grundläggande begrepp i funktionslära

1. a) $(f \circ g)(x) = f\left(\frac{x}{2} - 1\right) = 2\left(\frac{x}{2} - 1\right) + 1 = (x-2) + 1 = x - 1$

   b) $(g \circ f)(x) = g(2x+1) = \frac{2x+1}{2} - 1 = x + \frac{1}{2} - 1 = x - \frac{1}{2}$

   c) $(f \circ f)(x) = f(2x+1) = 2(2x+1) + 1 = 4x + 3$

   d) $(g \circ g)(x) = g\left(\frac{x}{2} - 1\right) = \frac{\frac{x}{2}-1}{2} - 1 = \frac{x}{4} - \frac{1}{2} - 1 = \frac{x}{4} - \frac{3}{2}$

2. Om $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vara funktionen som ges av att $f(x) = x^2$ och $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ funktionen där $g(x) = \sqrt{x}$ så gäller att $(f \circ g) : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ och

$$(f \circ g)(x) = f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 = x.$$

   Vi får också att $(g \circ f) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ och

$$(g \circ f)(x) = g(x^2) = \sqrt{x^2} = |x|.$$

   Notera skillnaden i definitionsmängd.

3. Värdemängden för funktionen f kan bestämmas genom att avgöra för vilka y som ekvationen $y = f(x)$ har en lösning x.

   a) Enligt definitionen av cosinus så gäller att $-1 \leq \cos(x) \leq 1$ och alla värden i intervallet kan antas (se enhetscirkeln). Värdemängden blir därför $\{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x \leq 1\}$.

   b) Uttrycket $(-1)^n$ är 1 för jämna n och -1 för udda n och inga andra värden kan antas. Det betyder att $1 + (-1)^n$ är 0 eller 2 för jämna respektive udda n. Värdemängden är därför $\{0, 2\}$.

   c) Vi kan avgöra om y tillhör värdemängden genom att försöka lösa ekvationen $y = x^2 + 6x + 1$ med avseende på x. Kvadratkomplettering ger ekvationen $(x+3)^2 = y + 8$ som har reella rötter om och endast om $y + 8 \geq 0$. Värdemängden blir därför $\{y : y \geq -8\}$.

Vi kan också resonera som följer: Eftersom x^2-termen har en positiv koefficient kommer funktionen att anta godtyckligt stora värden, och vi behöver bara avgöra vad det minsta möjliga värdet är. Exempelvis genom att utnyttja symmetri hos andragradskurvor får vi att det minsta värdet antas då $x = -3$, vilket ger $y = -8$.

d) Vi kan resonera på liknande sätt som i föregående uppgift. Ekvationen $y = 4x - 3$ har en lösning om och endast om y tillhör värdemängden för f. I detta fall kan vi se att alla y ger en lösning. Värdemängden blir därför $\mathbb{R}$.

7.2 Olika representationsformer för funktioner

1. Ett allmänt andragradspolynom kan skrivas som $p(x) = ax^2 + bx + c$. Om vi sätter in värdena så får vi följande ekvationer:

$$\begin{cases} 1 = p(-1) = a - b + c \\ 1 = p(1) = a + b + c \\ 3 = p(2) = 4a + 2b + c \end{cases}$$

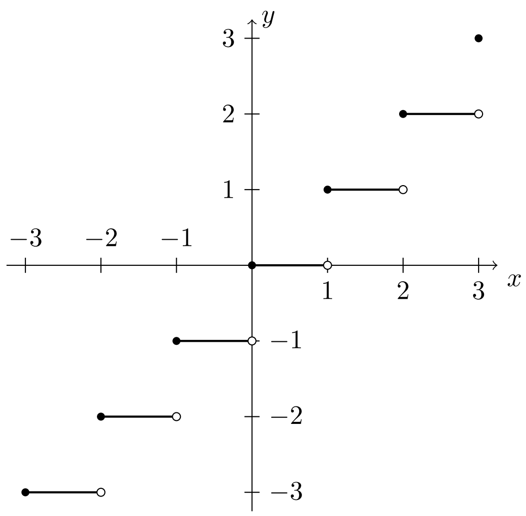
   Om vi subtraherar den första ekvationen från den andra så får vi $2b = 0$, det vill säga $b = 0$. Om vi subtraherar den andra från den tredje så får vi $2 = 3a$, det vill säga $a = \frac{2}{3}$, vilket i sin tur ger att $c = \frac{1}{3}$. Polynomet blir alltså $p(x) = \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{3}$. Detta kan med fördel kontrolleras mot de givna värdena.

2. Nedanstående är ett exempel på en sluten form för funktionen.

$$f(x) = \begin{cases} 3, & -\infty < x < -1 \\ 2 - x, & -1 \leq x < 1 \\ 2x - 1, & 1 \leq x < \infty \end{cases}$$

3. I grafen nedan markerar en ifylld cirkel funktionsvärdet för ett visst x, och en ej ifylld cirkel är en punkt som *inte* ligger på grafen.

$y = f(x)$

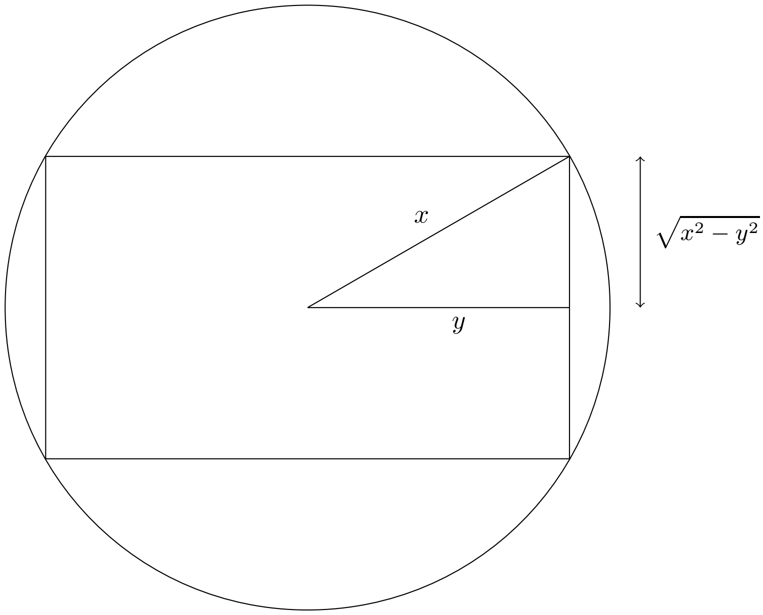


4. Nedanstående är exempel på hur man kan skriva funktionen på sluten form.

   a) Vi löser ekvationen med avseende på x med hjälp av kvadratkomplettering: $(x-a)^2 - 9a^2 = x^2 - 2ax - 8a^2 = 0$. Rötterna blir därför $x = a \pm 3a$, det vill säga $x = -2a$ eller $x = 4a$. Om $a > 0$ så är $x = 4a$ den största roten. Alltså är $f(a) = 4a$ en beskrivning på sluten form.

   b) I figuren nedan har vi skrivit in en rektangel med basen $2y$ i en cirkel med radien x (där $0 < y < x$). Vi kan med hjälp av Pythagoras sats se att rektangelns area är $2y \cdot 2\sqrt{x^2 - y^2} = 4\sqrt{y^2(x^2 - y^2)}$.

      Uttrycket för arean är så stort som möjligt då $y^2(x^2 - y^2)$ är så stort som möjligt. Detta inträffar då $y^2 = \frac{x^2}{2}$, vilket kan ses genom att sätta $t = y^2$ och undersöka maximum för det kvadratiska uttrycket $t(x^2 - t) = tx^2 - t^2$ där x^2 behandlas som en konstant. Den maximala arean blir därför $4\sqrt{\frac{x^2}{2}\left(x^2 - \frac{x^2}{2}\right)} = 2x^2$.



7.3 Ytterligare begrepp i funktionslära

1. a) Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ där $f(x) = 2x$ är en injektion eftersom $f(x) = f(y) \implies 2x = 2y \implies x = y$. Det är också en surjektion eftersom $y = f(x)$ alltid har en lösning $x = \frac{y}{2}$. Funktionen är därmed också en bijektion eftersom den är både en injektion och en surjektion.

   b) Med samma resonemang som ovan kan vi se att detta är en injektion. Det är däremot inte en surjektion eftersom $f(x) \neq 1 \in \mathbb{Z}$, exempelvis.

   c) Detta är inte en injektion eftersom $f(-1) = f(1)$. Det är heller inte en surjektion eftersom $f(x)$ aldrig kan bli negativ.

   d) Detta är inte en injektion eftersom $f(-1) = 1 = f(3)$, men det är en surjektion. För det senare kan vi resonera på följande vis: Om $y < 2$ så gäller att $f(y-2) = (y-2)+2 = y$ och om $y \geq 2$ så är $f(y+2) = (y+2)-2 = y$. Vi kan alltså få alla tänkbara y som funktionsvärden.

2. För att bestämma inversen till f kan vi lösa ut x ur ekvationen $f(x) = y$. En förutsättning är att funktionen är en bijektion.

   a) Funktionen är en bijektion. Vi löser ut x ur $y = f(x) = 2x + 7$ och får $x = \frac{y-7}{2} = \frac{y}{2} - \frac{7}{2}$. Inversen är därför $f^{-1}(x) = \frac{x}{2} - \frac{7}{2}$.

   b) Funktionen är en bijektion och om vi löser ut x ur $y = f(x) = x^3 - 1$ så får vi $x = (y-1)^{\frac{1}{3}}$. Inversen är därför $f^{-1}(x) = (x-1)^{\frac{1}{3}}$.

   c) Funktionen är inte injektiv, eftersom vi exempelvis har$f(1) = f(-1) = 0$.

d) Funktionen är inte injektiv, eftersom vi exempelvis har $f(-1) = f(1) = 1$.

3. För att bevisa påståendet kan man resonera på följande vis:

$$((g^{-1} \circ f^{-1}) \circ (f \circ g))(x) = g^{-1}(f^{-1}(f(g(x)))) = g^{-1}(g(x)) = x$$

7.4 Rekursiva definitioner av funktioner

1. a) Värdet $S(0) = 1$ är givet och vi beräknar med rekursionsformeln att $S(1) = 5$, $S(2) = 13$, $S(3) = 29$, $S(4) = 61$, samt $S(5) = 125$

   b) På liknande sätt som i föregående uppgift får vi funktionsvärdena 1, 1, 0, -1, -1, 0

2. Funktionsvärdena beräknas på liknande sätt som i föregående uppgift. Vi får
   $f(1) = 1$, $f(2) = 4$, $f(3) = 2{,}875$,
   $f(4) = 2{,}6548\overline{9130434782608695652173}$,
   $f(5) = \frac{1902497}{719072} \approx 2{,}645767$,
   att jämföras med $\sqrt{7} \approx 2{,}645751$. Vi noterar att värdena överensstämmer till fjärde decimalen.

3. Den rekursiva formeln kan utläsas direkt ur den retoriska beskrivningen, nämligen $T(n) = \sum_{k=1}^{n-1} T(k)$ där $T(0) = 1$. Som i föregående uppgifter kan vi då beräkna de inledande värdena i talföljden, nämligen $1, 1, 2, 4, 8, 16, \ldots$. En sluten formel ser ut att vara $T(0) = 1$ och $T(n) = 2^{n-1}$ för $n \geq 1$.

   Att denna formel stämmer kan sedan lämpligen bevisas med hjälp av induktion.

4. Initialvärdena som anges i uppgiften stämmer inte överens med numreringen i rekursionen. För att överensstämma med defintionen i texten ska man sätta $F(0) = 0$, $F(1) = 1$ och

$$F(2n) = F(n)^2 + 2F(n-1)F(n)$$
$$F(2n-1) = F(n)^2 + F(n-1)^2$$

   så att

$$F(2) = F(2 \cdot 1) = F(1)^2 + 2F(1-1)F(1) = 1^2 + 2 \cdot 0 \cdot 1 = 1$$

   och

$$F(3) = F(2 \cdot 2 - 1) = F(2)^2 + F(2-1)^2 = 1^2 + 1^2 = 2.$$

5. Basfallet $n = 1$ ges direkt av definitionen av S. I induktionssteget kan man resonera som följer. $S(n+1) = 2S(n)+3 = 2(2^{n+1}-3)+3 = 2^{(n+1)+1}-3$.

7.5 Polynomfunktioner, rotfunktioner, exponentialfunktioner och logaritmfunktioner

1. Följande är exempel på hur man kan förenkla.

   a) $16^{\frac{3}{2}} = \left(2^4\right)^{\frac{3}{2}} = 2^{4\cdot\frac{3}{2}} = 2^6 = 64.$

   b) $\left(\sqrt{8}\right)^{\frac{4}{3}} = \left(8^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{4}{3}} = \left(8^{\frac{1}{3}}\right)^2 = 2^2 = 4.$

   c) $\left(\left(\sqrt{6}\right)^3\right)^2 = \left(\left(\sqrt{6}\right)^2\right)^3 = 6^3 = 216.$

   d) $27^{\left(-\frac{2}{3}\right)} = \left(27^{\left(\frac{1}{3}\right)}\right)^{-2} = 3^{-2} = \frac{1}{9}.$

   e) $\left(\frac{100}{9}\right)^{\frac{3}{2}} = \left(\sqrt{\frac{100}{9}}\right)^3 = \left(\frac{10}{3}\right)^3 = \frac{1000}{27}.$

   f) $16^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}} = 16^{\frac{7}{4}} = \left(16^{\frac{1}{4}}\right)^7 = 2^7 = 128.$

2. Vi sätter in $x = 2$ i definitionen, och adderar termer till dess att den tredje decimalen stabiliserats. Vi får att $e^2 \approx 7,389$. Det behövs 12 termer ur definitionen för att få tillräcklig precision.

3. (A) Från olikheten $4 < 5 < 9$ får vi att $2 < \sqrt{5} < 3$ om vi drar roten ur varje led.

   (B-D) Raderna i tabellen nedan innehåller stegen i beräkningen.

a	b	$\frac{b-a}{2}$	m	a^2	b^2	m^2	$m^2 < 5$?
2	3	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$	2	9	$\frac{25}{4}$	Nej
2	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{9}{4}$	4	$\frac{25}{4}$	$\frac{81}{16}$	Nej
2	$\frac{9}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{17}{8}$	4	$\frac{81}{16}$	$\frac{289}{64}$	Ja
$\frac{17}{8}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{1}{16}$					

   Vi stannar efter tre rader eftersom $\frac{b-a}{2} = \frac{1}{16} < 0{,}1$. Vi får alltså att $\sqrt{5} \approx \frac{a+b}{2} = \frac{35}{16}$. Skrivet på decimalform motsvarar detta $\frac{35}{16} = 2{,}1875$ vilket kan jämföras med den sanna värdet $\sqrt{5} \approx 2{,}2361$. Avvikelse är alltså verkligen mindre än 0,1.

4. Vi använder räkneregler för exponenter och det faktum att e^x och $\ln(x)$ är varandras inverser och får

$$e^{\frac{1}{m}\ln(x)} = \left(e^{\ln(x)}\right)^{\frac{1}{m}} = x^{1/m}.$$