



Stelkroppsdyamik

Problemsamling

Lösningar

av Christer Nyberg

Stelkroppsdyamik Problemsamling A

LP A.1 Kulan påverkas av tyngdkraften mg samt trådkrafterna S_A och S_B . Alla dessa tre krafter är verkliga krafter och har kända riktningar. I ett medföljande accelererande referenssystem finns det en tröghetskraft, nämligen systempunktskraften

$$\mathbf{F}_{sp} = -m\mathbf{a}_{sp} = -ma\mathbf{e}_x$$

där $\mathbf{e}_x$ har samma riktning som den givna accelerationen. Kulan är i jämvikt i det accelererande systemet.

Jämviktsvillkoret är

$$\rightarrow: S_B \cos 60^\circ - S_A \cos 60^\circ - ma = 0 \quad (1)$$

$$\uparrow: S_B \sin 60^\circ + S_A \sin 60^\circ - mg = 0 \quad (2)$$

$$\frac{1}{2}S_B - \frac{1}{2}S_A - ma = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}S_B + \frac{\sqrt{3}}{2}S_A - mg = 0 \quad (4)$$

Multipluera ekv (3) med $\sqrt{3}$ och addera ekv (4)! $\Rightarrow$

$$\sqrt{3}S_B = m(\sqrt{3}a + g) \Rightarrow$$

$$\underline{\underline{S_B = m\left(\frac{g}{\sqrt{3}} + a\right)}}$$

Insättning i ekv (3) ger

$$\underline{\underline{S_A = m\left(\frac{g}{\sqrt{3}} - a\right)}}$$

LP A.5 Kulan påverkas av tyngdkraften mg samt trådkrafterna S_A och S_B . Alla dessa tre krafter är verkliga krafter och har kända riktningar. I ett medföljande roterande referenssystem finns det en tröghetskraft, nämligen systempunktskraften

$$\mathbf{F}_{sp} = -m\mathbf{a}_{sp} = -m[\mathbf{a}_{O'} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}_{rel} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{rel})]$$

Vinkelhastigheten är konstant så att $\dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{0}$.

Om origo läggs på rotationsaxeln är också $\mathbf{a}_{O'} = \mathbf{0}$.

$$\Rightarrow \mathbf{F}_{sp} = -m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{rel}) = mb\omega^2 \mathbf{e}_x$$

där $\mathbf{e}_x$ är riktad horisontellt från axeln ut mot kulan.

Corioliskraften är noll, eftersom kulan saknar hastighet i det medföljande systemet. Kulan är i jämvikt i det roterande referenssystemet.

Jämviktsvillkoret är

$$\rightarrow : S_B \cos 60^\circ - S_A \cos 60^\circ - mb\omega^2 = 0 \quad (1)$$

$$\uparrow : S_B \sin 60^\circ + S_A \sin 60^\circ - mg = 0 \quad (2)$$

$$\frac{1}{2}S_B - \frac{1}{2}S_A + mb\omega^2 = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}S_B + \frac{\sqrt{3}}{2}S_A - mg = 0 \quad (4)$$

Multipluera ekv (3) med $\sqrt{3}$ och addera ekv (4)! $\Rightarrow$

$$\sqrt{3}S_B = m(-\sqrt{3}b\omega^2 + g) \quad \Rightarrow$$

$$\underline{\underline{S_B = m\left(\frac{g}{\sqrt{3}} - b\omega^2\right)}}$$

Insättning i ekv (3) ger

$$\underline{\underline{S_A = m\left(\frac{g}{\sqrt{3}} + b\omega^2\right)}}$$

LP A.8

Vinkelrätt mot skivans plan påverkas partikeln av tyngdkraften mg och normalkraften N_v . Spåret är glatt och ger ingen friktionskraft i skivans plan. I skivans plan påverkas partikeln av en normalkraft N_H vinkelrät mot spåret samt en fjäderkraft $k(y-l)\mathbf{e}_y$ i spårets riktning. Alla dessa krafter är verkliga krafter. I ett medföljande roterande referenssystem finns det tröghetskrafter, nämligen

systempunktskraften

$$\mathbf{F}_{sp} = -m\mathbf{a}_{sp} = -m[\mathbf{a}_{O'} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})]$$

och corioliskraften

$$\mathbf{F}_{sp} = -m\mathbf{a}_{cor} = -2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{rel}$$

Vinkelhastigheten är konstant så att $\dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{0}$.

Om origo läggs på rotationsaxeln är också $\mathbf{a}_{O'} = \mathbf{0}$.

$$\Rightarrow \quad \mathbf{F}_{sp} = -m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{rel}) = mR\omega^2 \mathbf{e}_x + my\omega^2 \mathbf{e}_y$$

där $\mathbf{e}_x$ är riktad horisontellt från axeln ut mot fjäderns fäste.

Corioliskraften är vinkelrät mot skårans riktning och kommer inte med i rörelseekvationen. Den kunde haft betydelse om friktionen skulle varit betydelsefull.

Kraftekvationen i skårans eller den relativa rörelsens riktning är

$$m\ddot{y} = -k(y-l) + m\omega^2 y \quad \Rightarrow$$

$$m\ddot{y} + (k - m\omega^2)y = kl \quad \Rightarrow$$

$$\underline{\underline{\ddot{y} + \left(\frac{k}{m} - \omega^2\right)y = \frac{kl}{m}}}$$

Förutsättningen för en harmonisk svängningsrörelse är att $\frac{k}{m} > \omega^2$.

Stelkroppsdyamik Problemsamling 1

Obs! Till en fullständig lösning krävs en figur!

- LP 1.1** Systemets masscentrum G ligger hela tiden vid axeln.
Kraftekvationen för hela systemet:

$$\boxed{\mathbf{F} = m\mathbf{a}_G} \quad \Rightarrow \quad P = (M + 2m)\ddot{x}_G$$

- LP 1.2** Använd definitionen av kinetisk energi. Varje kula har en cirkelrörelse.

$$\boxed{T = \sum \frac{1}{2} m_k v_k^2} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{1}{2} m(c\omega)^2 + \frac{1}{2} m(b^2 + c^2)\omega^2 + \frac{1}{2} m(b^2 + c^2)\omega^2$$

- LP 1.3** Lagen om kinetiska energins två delar kan användas. Sambandet $v = R\omega$ är givet.

$$\boxed{T = \frac{1}{2} m v_G^2 + \sum \frac{1}{2} m_k v_{krel}^2} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{1}{2} 5m v^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} m (R\omega)^2 = \frac{9}{2} m v^2$$

- LP 1.4** Den övre kulan har en fart $b\omega$ i masscentrumsystemet. Den absoluta hastigheten är vektorsumman av systemets hastighet och den relativa hastigheten $\mathbf{v} = \mathbf{v}_G + \mathbf{v}_{rel}$. Rörelsemängd definieras $\mathbf{p} = \sum m_k \mathbf{v}_k$ men beräknas oftast enligt $\boxed{\mathbf{p} = m\mathbf{v}_G}$

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_1 &= m(v - b\omega \sin \theta, b\omega \cos \theta, 0) \\ \mathbf{p}_2 &= m(v + b\omega \sin \theta, -b\omega \cos \theta, 0) \\ \mathbf{p} &= \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = m(2v, 0, 0) = 2m v \mathbf{e}_x \end{aligned}$$

- LP 1.5** Kinetiska energin beräknas antingen som

$$\begin{aligned} \boxed{T = T^{vagn} + T^{kulor}} \quad \Rightarrow \quad T &= \frac{1}{2} M v^2 + \frac{1}{2} m [(v - r\omega \sin \theta)^2 + (r\omega \cos \theta)^2] \\ &+ \frac{1}{2} m [(v + r\omega \sin \theta)^2 + (-r\omega \cos \theta)^2] = \frac{1}{2} (M + 2m) v^2 + m r^2 \omega^2 \end{aligned}$$

eller med lagen om kinetiska energins två delar:

$$\boxed{T = \frac{1}{2} m v_G^2 + \sum \frac{1}{2} m_k v_{krel}^2} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{1}{2} (M + 2m) v^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} m r^2 \omega^2$$

LP 1.6 Teckna först kulornas koordinater och tidsderivera för att få hastigheten.

$$\begin{aligned} x_A &= b \sin \theta & \Rightarrow & \dot{x}_A = b \dot{\theta} \cos \theta \\ y_B &= -b \cos \theta & \Rightarrow & \dot{y}_B \equiv v = b \dot{\theta} \sin \theta \end{aligned} \quad (1)$$

Kinetiska energin beräknas här med definitionen

$$\boxed{T = \sum \frac{1}{2} m_k v_k^2} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{1}{2} m (b \dot{\theta} \cos \theta)^2 + \frac{1}{2} m (-b \dot{\theta} \sin \theta)^2 + \frac{1}{2} m v^2$$

Sätt in sambandet (1):

$$T = 2 \cdot \frac{1}{2} m b^2 \left(\frac{v}{b \sin \theta} \right)^2 \cos^2 \theta + \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \left(\frac{2}{\tan^2 \theta} + 1 \right) v^2$$

LP 1.7 Rörelsemängdsmomentet för ett partikelsystem med avseende på origo definieras

$$\boxed{\mathbf{H}_O = \sum \mathbf{r}_k \times m_k \mathbf{v}_k}$$

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad \mathbf{H}_O &= b \mathbf{e}_x \times m b \omega \mathbf{e}_y + (b \mathbf{e}_x + b \mathbf{e}_z) \times m b \omega \mathbf{e}_y \\ &= m b^2 \omega \mathbf{e}_z + m b^2 \omega \mathbf{e}_z - m b^2 \omega \mathbf{e}_x \\ &= -m b^2 \omega \mathbf{e}_x + 2 m b^2 \omega \mathbf{e}_z \end{aligned}$$

$$\text{b)} \quad \mathbf{H}_A = b \mathbf{e}_z \times m b \omega \mathbf{e}_y = -m b^2 \omega \mathbf{e}_x$$

$$\text{c)} \quad H_z = \mathbf{H}_O \cdot \mathbf{e}_z = 2 m b^2 \omega \quad \text{eller} \quad \mathbf{H}_z = 2 m b^2 \omega \mathbf{e}_z$$

LP 1.8 Rörelsemängdsmomentet för ett partikelsystem med avseende på masscentrum kan beräknas i masscentrumsystemet enligt

$$\boxed{\mathbf{H}_G = \mathbf{H}_{\text{Grel}}$$

I detta system ser hjulet ut att rotera kring en fix axel genom centrum. Endast de fyra periferipartiklarna bidrar. Räkna hävarm gånger rörelsemängd och bestäm riktningen med högerregeln.

$$\text{a)} \quad \mathbf{H}_{\text{Grel}} = -4 \cdot R \cdot m R \omega \mathbf{e}_z = -4 m R^2 \omega \mathbf{e}_z$$

b) Rörelsemängdsmomentets två delar skrivs

$$\boxed{\mathbf{H}_O = \mathbf{H}_G + \mathbf{r}_{OG} \times m \mathbf{v}_G}$$

Insättning ger

$$\mathbf{H}_O = -4 m R^2 \omega \mathbf{e}_z - R \cdot 5 m v \mathbf{e}_z = -9 m R v \mathbf{e}_z$$

- LP 1.9** Rörelsemängdsmomentets två delar skrivs $\boxed{\mathbf{H}_O = \mathbf{H}_G + \mathbf{r}_{OG} \times m\mathbf{v}_G}$
 Rörelsemängdsmomentet för ett partikelsystem med avseende på masscentrum kan beräknas i masscentrumsystemet enligt

$$\boxed{\mathbf{H}_G = \mathbf{H}_{Grel}}$$

$$\mathbf{H}_{Grel} = 2mb^2\omega\mathbf{e}_z$$

$$\mathbf{H}_O = 2mb^2\omega\mathbf{e}_z - y_G \cdot 2m\mathbf{v}\mathbf{e}_z = 2m(b^2\omega - y_G v)\mathbf{e}_z$$

- LP 1.10** Kraftekvationen $\boxed{\mathbf{F} = m\mathbf{a}_G}$
 projicerad i
 tangentialriktningen: $3mc\ddot{\theta} = R_t - 3mg\sin\theta$
 normalriktningen: $3mc\dot{\theta}^2 = R_n - 3mg\cos\theta$

- LP 1.11** Begynnelsevillkoret är $t = 0 \quad \begin{cases} x = 0 \\ \dot{x} = 0 \end{cases}$

Kraftekvationen $\boxed{\mathbf{F} = m\mathbf{a}_G}$ ger om trådkraften kallas S

för massan m : $\rightarrow: S - kx = m\ddot{x}$

för massan M : $\downarrow: Mg - S = M\ddot{x}$

Adderas dessa två ekvationer elimineras den inre kraften S .
 Resultatet är en svängningsekvation:

$$Mg - kx = (M + m)\ddot{x}$$

som kan skrivas på standardformen

$$\ddot{x} + \frac{k}{M + m}x = \frac{Mg}{M + m}$$

eller
$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = \frac{Mg}{M + m}$$

Den allmänna lösningen är

$$x = A \cos \omega t + B \sin \omega t + \frac{Mg}{k}$$

$$\dot{x} = -A\omega \sin \omega t + B\omega \cos \omega t$$

Begynnelsevillkoret ger

$$0 = A \cos 0 + B \sin 0 + \frac{Mg}{k} \Rightarrow A = -\frac{Mg}{k}$$

$$0 = -A\omega \sin 0 + B\omega \cos 0 \Rightarrow B = 0$$

Lösningen är alltså
$$x = \frac{Mg}{k}(1 - \cos \omega t)$$

LP 1.12 a) I masscentrumssystemet syns bara rotationen

$$\mathbf{v}_{Arel} = R\omega \mathbf{e}_\theta = R\omega \cos\theta \mathbf{e}_x - R\omega \sin\theta \mathbf{e}_y$$

b) Den absoluta hastigheten är $\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_G + \mathbf{v}_{Arel}$

$$\mathbf{v}_A = (v + R\omega \cos\theta) \mathbf{e}_x - R\omega \sin\theta \mathbf{e}_y$$

LP 1.13 Om vagnens förflyttning är x åt höger blir lådans förflyttning x åt vänster. Trådkraften S på lådan gör lika stort arbete som trådkraften S på vagnen. Det totala arbetet blir därför noll.

Lagen om arbetet $\boxed{U = T - T_0}$ för hela systemet:

$$Px - \mu mgx - \mu mgx = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}^2$$
$$\dot{x} = \sqrt{\frac{2(P - 2\mu mg)x}{M + m}}$$

Resultatet blir detsamma som när man räknar friktionskraftens arbete vid den relativa förflyttningen $2x$.

LP 1.14 Om plattformens förflyttning är x åt höger blir lådans förflyttning $2x$ åt vänster. Trådkraften S på lådan gör då lika stort arbete som trådkraften $2S$ på plattformen. Det totala trådkraftarbetet blir därför noll.

Lagen om arbetet $\boxed{U = T - T_0}$ för hela systemet:

$$Px - [\mu mg + \mu(M + m)g]x - \mu mg \cdot 2x = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m (2\dot{x})^2$$
$$\dot{x} = \sqrt{\frac{2[P - \mu(4m + M)g]x}{M + 4m}}$$

LP 1.15 Kraftekvationen $\boxed{\mathbf{F} = m\mathbf{a}_G}$ för hela systemet:

$$\uparrow: P + 2N - 2mg = 2m \cdot 0 \quad \Rightarrow \quad N = mg - \frac{P}{2}$$

Lagen om arbetet $\boxed{U = T - T_0}$ för hela systemet:

Kraften P är konstant.

$$P \cdot (b \sin\theta - b \sin\beta) = 2 \cdot \frac{1}{2} m v^2 \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{Pb}{m} (\sin\theta - \sin\beta)}$$

LP 1.16 Om stora lådans förflyttning neråt är x blir lilla lådans förflyttning $2x$. Trådkraften $2S$ på stora lådan gör då lika stort arbete som trådkraften S på lilla vagnen. Det totala arbetet blir noll.

Lagen om arbetet $\boxed{U = T - T_0}$ för hela systemet:

$$kmg \cdot x \sin \beta + mg \cdot 2x \sin \beta = \frac{1}{2} k m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m (2\dot{x})^2$$

$$\dot{x} = \sqrt{\frac{2(k+2)gx \sin \beta}{k+4}}$$

Observera att för $k \rightarrow \infty$ (lilla lådan finns ej) blir $\dot{x} = \sqrt{2gx \sin \beta}$

LP 1.17 Kropparna har lika stor förflyttning och avvikelser från utgångsläget kallas x . Trådkraften S är lika i hela tråden. S på den ena kroppen gör då lika stort arbete men med annat tecken som trådkraften S på den andra. Det totala trådkraftarbetet blir därför noll. Den mekaniska energin bevaras eftersom de enda krafter som gör arbete (fjäderkraften och tyngdkraften) är konservativa.

$\boxed{T + V = T_0 + V_0}$ för hela systemet:

$$\frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} p m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2 + mg \sin \beta - pmgx = 0 + 0$$

$$\Rightarrow \dot{x} = \sqrt{\frac{1}{1+p} \left[2g(p - \sin \beta)x - \frac{k}{m} x^2 \right]}$$

LP 1.18 Kraftekvationen $\boxed{\mathbf{F} = m\mathbf{a}_G}$ projicerad i

tangentialriktningen: $3mc\ddot{\theta} = R_t - 3mg \sin \theta$ (1)

normalriktningen: $3mc\dot{\theta}^2 = R_n - 3mg \cos \theta$ (2)

Nu måste $\ddot{\theta}$ och $\dot{\theta}^2$ bestämmas på annat sätt!

Momentekvationen $\boxed{M_z = \dot{H}_z}$ ger

$$-3mgc \sin \theta = \frac{d}{dt} [mc^2 \dot{\theta} + 2m(b^2 + c^2)\dot{\theta}]$$

$$\Rightarrow -3mgc \sin \theta = m(2b^2 + 3c^2)\ddot{\theta}$$
 (3)

Lagen om mekaniska energins bevarande $\boxed{T + V = T_0 + V_0}$:

$$\frac{1}{2} mc^2 \dot{\theta}^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} m(b^2 + c^2) \dot{\theta}^2 - 3mgc \cos \theta = 0 + 0$$

$$\Rightarrow m(2b^2 + 3c^2) \dot{\theta}^2 = 6mgc \cos \theta$$
 (4)

Sätt in (3) och (4) i (1) och (2)!

$$R_t = \frac{6b^2}{2b^2 + 3c^2} mg \sin \theta; \quad R_n = \frac{2b^2 + 9c^2}{2b^2 + 3c^2} \cdot 3mg \sin \theta$$

LP 1.19 De krafter som verkar är tyngdkraft och kontaktkraft. Kontaktkraften gör inget arbete vid rullning. Den mekaniska energin bevaras alltså för hela systemet:: $T + V = T_0 + V_0$

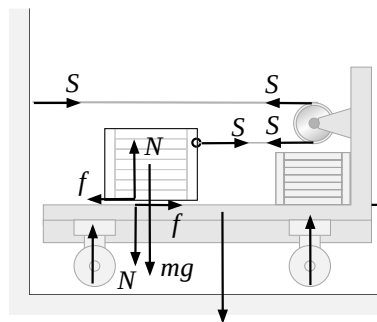
$$\frac{1}{2} \cdot 5mv^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} m(R\omega)^2 - 5mgx \sin \beta = 0 + 0 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{10}{9} g \sin \beta x}$$

LP 1.20 Om vagnens förflyttning åt höger är x , blir lådans förflyttning $2x$ åt samma håll. Avvikelsen från utgångsläget kallas x . Trådkraften S på lådan gör då lika stort arbete men med motsatt tecken som trådkraften $2S$ på vagnen. Det totala trådkraftarbetet blir därför noll. Friktionskraften mellan lådan och vagnen är vid glidning $f = \mu N = \mu mg$

Lagen om arbetet $U = T - T_0$ för hela systemet:

$$Px + \mu mg \cdot x - \mu mg \cdot 2x = \frac{1}{2} M\dot{x}^2 + \frac{1}{2} m(2\dot{x})^2$$

$$\Rightarrow \dot{x} = \sqrt{\frac{2(P - \mu mg)x}{M + 4m}}$$



Eftersom lådans relativa förflyttning är x blir resultatet

$$\dot{x} = \sqrt{\frac{2(P - \mu mg)d}{M + 4m}}$$

LP 1.21 Om alla förluster försummas är det bara tyngdkraften som gör arbete. Systemet är konservativt och den mekaniska energin bevaras:

$$T + V = T_0 + V_0 \quad \text{för hela systemet:}$$

Låt den potentiella energin vara noll i slutläget 1.

$$\frac{1}{2} mv_1^2 + 0 = \frac{1}{2} mv_0^2 + mg \cdot y_G$$

Tågets masscentrum beräknas som masscentrum för en kurvbåge.

Masscentrum för en kurvbåge motsvarande en vinkel 2β är

$$y_G = \frac{\sin \beta}{\beta} R. \quad \text{Här är } R \cdot 2\beta = l \Rightarrow \beta = \frac{l}{2R}$$

$$\text{Insättning ger } v_1 = \sqrt{v_0^2 + 4g \frac{R^2}{l} \sin\left(\frac{l}{2R}\right)}$$

- LP 1.22** Om prismats förflyttning är x blir cylinderns höjdändring $x \tan \beta$. Motsvarande hastigheter är då $\dot{x}$ respektive $\dot{x} \tan \beta$. Om all friktion försummas är det bara tyngdkraften som gör arbete. Normalkrafterna gör tillsammans inget arbete.

Den mekaniska energin bevaras:

$$\boxed{T + V = T_0 + V_0} \quad \text{för hela systemet:}$$

$$\frac{1}{2} M (\dot{x} \tan \beta)^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - Mgx \tan \beta = 0 + 0$$

$$\Rightarrow \dot{x} = \sqrt{\frac{2Mgx \tan \beta}{M \tan^2 \beta + m}}$$

- LP 1.23** Kropparna rör sig friktionsfritt. Det finns då ingen yttre horisontell kraft på hela systemet. Kraftekvationen säger då att systemets rörelsemängd är en rörelsekonstant. Kraftekvationen

$$\boxed{\mathbf{F} = m\mathbf{a}_G} \Rightarrow \boxed{F_x = m\ddot{x}_G} \Rightarrow \boxed{0 = m\ddot{x}_G} \Rightarrow \boxed{m\dot{x}_G = \text{konstant}}$$

$$\rightarrow: -pmv_0 + mv_0 = -(1+p)mv_1 \Rightarrow v_1 = \frac{p-1}{p+1}v_0 \quad (1)$$

Här har antagits att v_1 är masscentrums hastighet åt vänster då fjäderförkortningen är maximal.

Eftersom fjäderkraften är den enda kraft som gör arbete bevaras också den mekaniska energin

$$\boxed{T_1 + V_1 = T_0 + V_0} \quad \text{för hela systemet:}$$

$$\frac{1}{2} mv_0^2 + \frac{1}{2} pmv_0^2 = 2 \cdot \frac{1}{2} k\delta^2 + \frac{1}{2} (p+1)mv_1^2 \Rightarrow$$

$$(1+p)mv_0^2 = 2k\delta^2 + (p+1)mv_1^2 \quad (2)$$

$$\text{Insättning av (1) i (2)!} \Rightarrow \delta = \sqrt{\frac{2pm}{(p+1)k}} v_0$$

LP 1.24

Kulan A har en cirkelrörelse. Farten kan då skrivas radien gånger vinkelhastigheten: $v_A = \sqrt{b^2 + c^2} \cdot \dot{\theta}$. Bestäm alltså $\dot{\theta}$ som funktion av tiden!

Momentekvationen med avseende på den fixa punkten O

$\boxed{\mathbf{M}_O = \dot{\mathbf{H}}_O}$ kan projiceras på z -axeln $\boxed{M_z = \dot{H}_z}$, vilket ger

$$M_1 = \frac{d}{dt} [mc^2 \dot{\theta} + 2 \cdot m(b^2 + c^2) \dot{\theta}]$$

$$\Rightarrow M_1 = m(2b^2 + 3c^2) \ddot{\theta} \quad \Rightarrow \quad \ddot{\theta} = \frac{M_1}{m(2b^2 + 3c^2)}$$

$\ddot{\theta}$ är alltså konstant och tidsintegrering ger $\dot{\theta} = \frac{M_1 t}{m(2b^2 + 3c^2)}$

$$\Rightarrow v_A = \frac{\sqrt{b^2 + c^2} M_1 t}{m(2b^2 + 3c^2)}$$

Kraftekvationen $\boxed{\mathbf{F} = m\mathbf{a}_G}$ projicerad i

tangentialriktningen: $R_t = 3mc\ddot{\theta} \quad \Rightarrow \quad R_t = \frac{3cM_1}{m(2b^2 + 3c^2)}$

normalriktningen: $R_n = 3mc\dot{\theta}^2 \quad \Rightarrow \quad R_n = \frac{3cM_1^2 t^2}{m(2b^2 + 3c^2)^2}$

LP 1.25

Krafterna på systemet är tyngdkraft $5mg$, normalkraft N och friktionskraft f .

Kraftekvationen $\boxed{\mathbf{F} = m\mathbf{a}_G}$ i rörelseriktningen:

$$5mg \sin \beta - f = 5m\ddot{x}_G \quad \Rightarrow \quad (1)$$

Momentekvationen $\boxed{\mathbf{M}_G = \dot{\mathbf{H}}_G}$

med avseende på en horisontell axel genom G $\boxed{M_z = \dot{H}_z}$ ger

$$f \cdot R = \frac{d}{dt} (4R \cdot mR\dot{\theta}) \quad \text{eller} \quad f = 4mR\ddot{\theta} \quad (2)$$

Eliminera friktionskraften f addera ekvationerna (1) och (2).

Rullningsvillkoret är givet i texten: $\dot{x} = R\dot{\theta} \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} = R\ddot{\theta} \quad (3)$

Insättning av (2) och (3) i (1) ger $\ddot{x}_G = \frac{5}{9} g \sin \beta$

LP 1.26

Vagnarna rör sig friktionsfritt. Det finns då ingen yttre horisontell kraft på hela systemet. Kraftekvationen säger då att systemets rörelsemängd är en rörelsekonstant. Kraftekvationen

$$\boxed{\mathbf{F} = \dot{\mathbf{p}}} \Rightarrow \boxed{F_x = \dot{p}_x} \Rightarrow \boxed{0 = \dot{p}_x} \Rightarrow \boxed{p_x = \text{rörelsekonstant}}$$

Antag att den vänstra vagnens nya hastighet är v_1 åt höger och den högra vagnens nya hastighet är v_2 åt vänster.

Rörelsemängden är hela tiden densamma:

$$\begin{aligned} \rightarrow: (2m + M)v_0 - (M + m)v_0 &= (M + m)v_1 + mv - (M + m)v_0 \Rightarrow \\ v_1 &= \frac{1}{M + m}[(M + 2m)v_0 - mv] \end{aligned} \quad (1)$$

$$\rightarrow: (2m + M)v_0 - (M + m)v_0 = (M + m)v_1 - (M + 2m)v_2$$

Om (1) sätts in i denna ekvation fås

$$v_2 = \frac{1}{M + 2m}[(M + m)v_0 - mv]$$

Om massorna är lika : $M = m$ fås $v_1 = \frac{1}{2}[3v_0 - v]$; $v_2 = \frac{1}{3}[2v_0 - v]$

Den nya relativa farten för vagnarna blir då

$$v_{\text{rel}} = v_1 + v_2 = \frac{13v_0 - 5v}{6}$$

LP 1.27

Det finns inget yttre kraftmoment med avseende på en vertikal axel genom den fixa punkten O som verkar på hela systemet.

Momentekvationen $\boxed{M_z = \dot{H}_z}$ för hela systemet:

$$0 = \dot{H}_z \Rightarrow H_z \text{ är en rörelsekonstant:}$$

$$m(l \sin \beta)^2 \omega_0 + km(l \sin \beta)^2 \omega_0 = km(2l \sin \beta)^2 \omega_1 \Rightarrow \omega_1 = \frac{1+k}{4k} \omega_0$$

b)

Friktionskrafter saknas. Normalkrafterna på partikel och rör gör tillsammans inget arbete. Endast tyngdkraften gör arbete och den mekaniska energin bevaras för hela systemet .

$$\boxed{T_0 + V_0 = T_1 + V_1} \text{ ger om } u \text{ är den relativa hastigheten.}$$

$$\frac{1}{2} m(l \sin \beta \omega_0)^2 + \frac{1}{2} km(l \sin \beta \omega_0)^2 + 0$$

$$= \frac{1}{2} mu^2 + \frac{1}{2} km[u^2 + (2l \sin \beta \omega_1)^2] + mgl \cos \beta - kmgl \cos \beta$$

$$\Rightarrow u = \sqrt{(l \sin \beta \omega_0)^2 \left[1 - \frac{9k}{16(k+1)} \right] + \frac{2(k-1)}{k+1} gl \cos \beta}$$

LP 1.28 Kulorna har farten $b\dot{\theta}$ och tyngden har samma fart $r\dot{\theta}$ som cirkelskivans periferi. Rörelsemängdsmomentet för tyngden bestäms som hävarm gånger rörelsemängd. Momentekvationen för hela systemet med avseende på rotationsaxeln:

$$\boxed{M_z = \dot{H}_z}$$

$$mgr = \frac{d}{dt}(2mb^2\dot{\theta} + r \cdot m r \dot{\theta}) \Rightarrow$$

$$mgr = m(2b^2 + r^2)\ddot{\theta} \Rightarrow \ddot{\theta} = \frac{gr}{2b^2 + r^2}$$

Alternativt utnyttjas lagen om mekaniska energin. Tyngden sjunker sträckan $r\theta$ och masscentrum för kulorna ändrar ej nivå.

Lagen om mekaniska energins bevarande för hela systemet

$$\boxed{T + V = T_0 + V_0}$$

$$2 \cdot \frac{1}{2} mb^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m(r\dot{\theta})^2 - mgr\theta = 0 + 0$$

$$\text{Tidsderivering ger } 2mb^2\ddot{\theta} + mr^2\ddot{\theta} = mgr \Rightarrow \ddot{\theta} = \frac{gr}{2b^2 + r^2}$$

LP 1.29 Trådkraft S , normalkraft N , friktionskraft f och tyngdkraft mg verkar på kroppen på planet. Den hängande kroppen påverkas av trådkraft S och tyngdkraft Mg . De båda trådkrafterna gör lika stort arbete så att det totala trådkraftarbetet blir noll. Friktionskraften är vid glidning $f = \mu N = \mu mg$. Tyngdkraftens och friktionskraftens arbete bestäms som kraft gånger väg medan fjäderkraftens arbete måste bestämmas med integrering eftersom fjäderkraften ej är konstant.

$$\text{Lagen om kinetiska energin } \boxed{U = T - T_0}$$

för hela systemet:

$$Mgx - \mu mgx - \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} M\dot{x}^2 + \frac{1}{2} m\dot{x}^2 - 0$$

$$\Rightarrow \dot{x} = \sqrt{\frac{1}{M+m}(2Mgx - 2\mu mgx - kx^2)}$$

LP 1.30

Friktionskrafter saknas. Det totala trådkraftarbetet blir noll eftersom tråden är oelastisk. Normalkraften på kropp A gör inget arbete. Endast tyngdkraften gör arbete och den mekaniska energin bevaras.

Lagen om mekaniska energins bevarande $T_1 + V_1 = T_0 + V_0$

för hela systemet ger för de två tillstånd då farten är noll

$$0 + m_A g R (1 - \cos \beta) + 0 = 0 + 0 + m_B g \left[R\sqrt{2} - 2R \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}\right) \right]$$

$$\frac{m_A}{m_B} = \frac{\sqrt{2} \left(1 - \cos \frac{\beta}{2} + \sin \frac{\beta}{2} \right)}{1 - \cos \beta}$$

LP 1.31

Till en början är förflyttningarna för kropparna lika. Trådkraften S är densamma i hela den övre tråden. Trådkrafternas totala arbete är då noll. Samma resonemang gäller den korta tråden. Tyngdkraften är den enda kraft som gör arbete för den första fasen av rörelsen och systemet är konservativt.

Lagen om mekaniska energins bevarande $T_1 + V_1 = T_0 + V_0$

för hela systemet ger för begynnelsestillståndet och tillståndet strax innan den undre vikten stöter mot golvet

$$\frac{1}{2} m v_1^2 + \frac{1}{2} m v_1^2 + \frac{1}{2} k m v_1^2 + k m g h - 2 m g h = 0 + 0$$

$$\Rightarrow v_1^2 = \frac{4 - 2k}{2 + k} g h$$

Nu är den undre vikten i vila och har förlorat energi vid stöten mot golvet. Efter stöten gäller dock lagen om mekaniska energins bevarande för resten av systemet. Låt v_2 vara farten just innan vikterna nuddar varandra.

$$\frac{1}{2} m v_2^2 + \frac{1}{2} k m v_2^2 + k m g l - m g l = \frac{1}{2} m v_1^2 + \frac{1}{2} k m v_1^2 + 0$$

$$\Rightarrow v_2^2 = \frac{2(1-k)}{1+k} g l + \frac{(1+k)(4-2k)}{(1+k)(2+k)} g h$$

Villkoret $v_2 = 0$ ger då $l = \frac{(1+k)(k-2)}{(1-k)(2+k)} h$

LP 1.40 "Raketekvationen" med bivillkor skrivs

$$\boxed{\begin{cases} \mathbf{F} + q_i \mathbf{v}_i - q_u \mathbf{v}_u = \dot{\mathbf{p}} \\ \frac{dm}{dt} = q_i - q_u \end{cases}}$$

Strömningen är stationär. Den ser likadan ut vid alla tidpunkter och alla tidsderivator är därför noll. Massflödet in är lika med massflödet ut och kan skrivas $q \equiv q_i = q_u = \rho Q$. Vattnet i sjön har hastigheten noll. Insättning ger

$$\left\{ \begin{array}{l} \leftarrow : S + q \cdot 0 - qv \cos \beta = \frac{dm}{dt} v + m \frac{dv}{dt} \\ \frac{dm}{dt} = q - q \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$S - qv \cos \beta = 0 \quad \Rightarrow \quad S = \rho Q v \cos \beta$$

LP 1.41 "Raketekvationen" med bivillkor skrivs

$$\boxed{\begin{cases} \mathbf{F} + q_i \mathbf{v}_i - q_u \mathbf{v}_u = \dot{\mathbf{p}} \\ \frac{dm}{dt} = q_i - q_u \end{cases}}$$

Strömningen är stationär. Den ser likadan ut vid alla tidpunkter och alla tidsderivator är noll. Massflödet in är lika med massflödet ut och kan skrivas $q \equiv q_i = q_u$. Flygplanets hastighet är konstant. Antag att motståndskraften är F_D . Avgasernas absoluta hastighet framåt är $v - u$. Insättning ger

$$\left\{ \begin{array}{l} \rightarrow : -F_D + q \cdot 0 - q(v - u) = \frac{dm}{dt} v + m \cdot 0 \\ \frac{dm}{dt} = q - q \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$F_D = q(u - v)$$

Detta gäller om bränslets andel av avgasernas massa försummas.

LP 1.42 "Raketekvationen" med bivillkor skrivs

$$\begin{cases} \mathbf{F} + q_i \mathbf{v}_i - q_u \mathbf{v}_u = \dot{\mathbf{p}} \\ \frac{dm}{dt} = q_i - q_u \end{cases}$$

Strömningen är stationär. Den ser likadan ut vid alla tidpunkter och alla tidsderivator är noll. Massflödet in är lika med massflödet ut och kan skrivas $q \equiv q_i = q_u = \rho \pi r^2 u$. Insättning ger

$$\begin{cases} \uparrow: & -mg + N + q_i(-u) - q_u(-v \cos \beta) = \frac{dm}{dt} v + m \frac{dv}{dt} \\ & 0 = q_i - q_u \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} -mg + N - qu + qv \cos \beta &= 0 \Rightarrow N = mg + q(u - v \cos \beta) \\ N &= mg + \rho \pi r^2 u(u - v \cos \beta) \end{aligned} \Rightarrow$$

LP 1.45 "Raketekvationen" med bivillkor skrivs

$$\begin{cases} \mathbf{F} + q_i \mathbf{v}_i - q_u \mathbf{v}_u = \dot{\mathbf{p}} \\ \frac{dm}{dt} = q_i - q_u \end{cases}$$

Det finns ingen yttre kraft i rörelseriktningen. Massflödet in har en vertikal hastighet. Massflödet ut är noll. Insättning ger

$$\begin{cases} \rightarrow: & 0 + q \cdot 0 - 0 = \frac{dm}{dt} v + m \frac{dv}{dt} \\ & \frac{dm}{dt} = q - 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\frac{d(mv)}{dt} = 0 \Rightarrow mv = m_0 v_0 \quad (\text{en rörelsekonstant}) \Rightarrow$$

$$v = \frac{v_0 m_0}{m} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{v_0 m_0}{m} \Rightarrow (\text{kedjeregeln}) \Rightarrow$$

$$dx = \frac{v_0 m_0}{m} \frac{dt}{dm} dm \Rightarrow dx = \frac{v_0 m_0}{q} \frac{dm}{m} \Rightarrow$$

$$x = \frac{v_0 m_0}{q} \ln \frac{m_0 + m_1}{m_0}$$

LP 1.46 "Raketekvationen" med bivillkor skrivs

$$\boxed{\begin{cases} \mathbf{F} + q_i \mathbf{v}_i - q_u \mathbf{v}_u = \dot{\mathbf{p}} \\ \frac{dm}{dt} = q_i - q_u \end{cases}}$$

Om granaterna skjuts iväg framåt kommer flygplanets hastighet att minska om inget görs. Antag att det krävs en extra dragkraft F_1 för att hålla hastigheten konstant! Systemets totala massa betecknas m . Varje granat har den absoluta hastigheten $v + v_{\text{rel}}$, där v är flygplanets hastighet. Insättning ger

$$\left\{ \begin{array}{l} \leftarrow : F_1 + 0 - q_u(v + v_{\text{rel}}) = \frac{dm}{dt}v + m \frac{dv}{dt} \\ \frac{dm}{dt} = 0 - q_u \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$F_1 + 0 - \left(-\frac{dm}{dt}\right)(v + v_{\text{rel}}) = \frac{dm}{dt}v + m \cdot 0 \Rightarrow$$

$$F_1 + \frac{dm}{dt}(v + v_{\text{rel}}) = \frac{dm}{dt}v \Rightarrow$$

$$F_1 = -\frac{dm}{dt}v_{\text{rel}} \Rightarrow$$

$$F_1 = n\Delta m \cdot v_{\text{rel}} \Rightarrow F_1 = 70 \cdot (0.640 \text{ kg}) \cdot (900 \text{ m/s}) \approx 40.3 \text{ kN}$$

LP 1.47 "Raketekvationen" med bivillkor skrivs

$$\begin{cases} \mathbf{F} + q_i \mathbf{v}_i - q_u \mathbf{v}_u = \dot{\mathbf{p}} \\ \frac{dm}{dt} = q_i - q_u \end{cases}$$

Insättning ger

$$\begin{cases} \uparrow: -mg + S + 0 - q(-u \sin \beta) = \frac{dm}{dt} v + m \frac{dv}{dt} \\ \frac{dm}{dt} = 0 - q \end{cases} \Rightarrow$$

I första ögonblicket är farten noll och accelerationen a_1 . Det totala massflödet ut ifrån hinken är q .

$$-mg + S + qu \sin \beta = -q \cdot 0 + ma_1 \Rightarrow S = mg - qu \sin \beta + ma_1$$

$$\Rightarrow S = (m_0 + m_1)(g + a_1) - qu \sin \beta$$

LP 1.48 "Raketekvationen" med bivillkor skrivs

$$\begin{cases} \mathbf{F} + q_i \mathbf{v}_i - q_u \mathbf{v}_u = \dot{\mathbf{p}} \\ \frac{dm}{dt} = q_i - q_u \end{cases}$$

Betrakta kedjan som ligger på hyllan. Låt det vara "systemet". Antag att hyllan påverkar kedjan med kraften N . Insättning ger

$$\begin{cases} \uparrow: -mg + N + q_i - 0 = \frac{dm}{dt} v + m \frac{dv}{dt} \\ \frac{dm}{dt} = q_i - 0 \end{cases} \Rightarrow$$

Systemet har accelerationen a och hastigheten $\dot{y} = at$. Den översta länken, liksom de andra ovanför systemet, faller fritt så att $\dot{x} = gt$. Hur lång är den kedja som per tid kommer in i systemet? Den är $\dot{x} + \dot{y}$. Massflödet in i systemet är alltså $q_i = \rho(\dot{x} + \dot{y})$.

$$\Rightarrow -\rho(x+y)g + N + \rho(\dot{x} + \dot{y})(-gt) - 0 = \rho(\dot{x} + \dot{y})at + \rho(x+y)a$$

$$\Rightarrow N = \rho(gt + at)(g + a)t + \rho(x+y)(g + a)$$

$$\Rightarrow N = \frac{3}{2} \rho(g+a)^2 t^2$$

LP 1.49 "Raketekvationen" med bivillkor skrivs

$$\begin{cases} \mathbf{F} + q_i \mathbf{v}_i - q_u \mathbf{v}_u = \dot{\mathbf{p}} \\ \frac{dm}{dt} = q_i - q_u \end{cases}$$

Insättning ger

$$\begin{cases} \uparrow: -mg + 0 - q(v - u) = \frac{dm}{dt}v + m \frac{dv}{dt} \\ \frac{dm}{dt} = 0 - q \end{cases} \Rightarrow$$

$$-mg - q(v - u) = -qv + m \frac{dv}{dt} \Rightarrow -mg + qu = m \frac{dv}{dt} \Rightarrow$$

$$-mg + qu = m \frac{dv}{dm} \frac{dm}{dt} \Rightarrow \frac{dv}{dm} = \frac{g}{q} - \frac{u}{m} \Rightarrow$$

$$v = -\frac{g}{q}(m_0 + m_1 - m) + u \ln \frac{m_0 + m_1}{m}$$

LP 1.50 "Raketekvationen" med bivillkor skrivs

$$\begin{cases} \mathbf{F} + q_i \mathbf{v}_i - q_u \mathbf{v}_u = \dot{\mathbf{p}} \\ \frac{dm}{dt} = q_i - q_u \end{cases}$$

Insättning ger

$$\begin{cases} \uparrow: -mg + 0 - q(v - u) = \frac{dm}{dt}v + m \frac{dv}{dt} \\ \frac{dm}{dt} = 0 - q \end{cases} \Rightarrow$$

$$-mg - q(v - u) = -qv + m \frac{dv}{dt} \Rightarrow -mg + qu = m \frac{dv}{dt} \Rightarrow$$

$$-mg + qu = m \frac{dv}{dm} \frac{dm}{dt} \Rightarrow \frac{dv}{dm} = \frac{g}{q} - \frac{u}{m} \Rightarrow$$

$$v_1 = \frac{g}{q}(m_1 - m_0) - u \ln \frac{m_1}{m_0}$$

Stelkroppsdyamik Problemsamling 2

OBS! En fullständig lösning måste innehålla en figur!

LP 2.1 Kroppen har en rotationshastighet. Kulan P beskriver en cirkelrörelse. För ren rotation gäller

$$\boxed{\mathbf{v}_P = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{OP}} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}_P = 5b\omega \mathbf{e}_t$$

Eftersom $\boldsymbol{\omega}$ och $\mathbf{r}_{OP}$ är vinkelräta bestäms storleken av kryssprodukten med "belopp gånger belopp". Riktningen bestäms av högerregeln.

Accelerationen ges av $\boxed{\mathbf{a}_P = \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}_{OP} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{OP})}$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{a}_P = 5b\dot{\omega} \mathbf{e}_t + 5b\omega^2 \mathbf{e}_n = 5b\alpha \mathbf{e}_t + 5b\omega^2 \mathbf{e}_n$$

Den första kryssprodukten bestäms på samma sätt som för hastigheten. Den dubbla kryssprodukten bestäms i två steg: först parentes och sedan hela uttrycket.

LP 2.2 Kroppen har en ren rotationshastighet. Punkten P beskriver en cirkelrörelse. För ren rotation gäller

$$\boxed{\mathbf{v}_P = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{OP}} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}_P = R\omega \mathbf{e}_t$$

där vinkelfarten fortfarande är okänd.
Accelerationen, som är känd,

ges av $\boxed{\mathbf{a}_P = \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}_{OP} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{OP})}$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{a}_P = R\alpha \mathbf{e}_t + R\omega^2 \mathbf{e}_n = (1.5 \mathbf{e}_t + 4 \mathbf{e}_n) \text{ m/s}^2$$

$$\Rightarrow \quad R\alpha = 1.5 \text{ m/s}^2; \quad R\omega^2 = 4 \text{ m/s}^2$$

Eftersom $R = 0.250 \text{ m}$ fås resultatet

$$\alpha = 6 \text{ rad/s}^2; \quad \omega = 4 \text{ rad/s}$$

LP 2.3

Punkten P har en acceleration som ges av

$$\mathbf{a}_P = \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}_{OP} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{OP})$$

Vi måste alltså ur det givna i princip bestämma vinkelaccelerationen $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ och vinkelhastigheten $\boldsymbol{\omega}$. En punkt på den lilla remskivans periferi måste ha farten v_B . Vi får då skivans vinkelhastighet ur

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \Rightarrow v_B = r\omega \Rightarrow \omega = \frac{v_B}{r} \Rightarrow \omega = \frac{2}{0.1} \text{ rad/s} = 20 \text{ rad/s}$$

Accelerationen för en punkt på den stora skivans periferi ges av

$$\mathbf{a} = \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \Rightarrow \mathbf{a} = R\dot{\omega} \mathbf{e}_t + R\omega^2 \mathbf{e}_n$$

Accelerationen i tangentialriktningen är den givna a_A .

Det betyder att

$$R\dot{\omega} = a_A \Rightarrow \dot{\omega} = \frac{a_A}{R} \Rightarrow \alpha = \frac{34}{0.33} \text{ rad/s}^2$$

Resultatet blir

$$\mathbf{a}_P = \frac{R}{2} \cdot \frac{a_A}{R} \mathbf{e}_t + \frac{R}{2} \cdot \left(\frac{v_B}{r} \right)^2 \mathbf{e}_n = \frac{a_A}{2} \mathbf{e}_t + \frac{R}{2r^2} v_B^2 \mathbf{e}_n = (17\mathbf{e}_t + 66\mathbf{e}_n) \text{ m/s}^2$$

LP 2.4

Alla tre kropparna har ren rotationsrörelse. En punkt på en av de oelastiska remmarna har samma fart som alla andra punkter på remmen. En punkt på periferin av en remskiva måste ha samma fart som remmens fart. Detta leder till ekvationerna

$$\begin{aligned} 3r\omega_A &= r\omega_B & \Rightarrow & \omega_B = 3\omega_A \\ 2r\omega_C &= 4r\omega_B & \Rightarrow & \omega_C = 6\omega_A \end{aligned}$$

LP 2.5

Punkten P har en acceleration som allmänt kan skrivas

$$\mathbf{a}_p = \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}_p + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_p)$$

där lägevektorn börjar i centrum av skiva C . Med naturliga basvektorer blir det

$$\mathbf{a}_p = 2r\alpha_c \mathbf{e}_t + 2r\omega_c^2 \mathbf{e}_n \quad (1)$$

Bestäm alltså först α_c och ω_c ! Varje del av en rem har lika stor fart, men inte lika hastighet. Varje del av en rem har också lika stor fartökning per tid, dvs acceleration i hastighetsriktningen. Den vänstra remmens fart kan skrivas antingen som periferihastigheten för skivan A eller periferihastigheten för B . Motsvarande gäller också för den andra remmen. Låt ω vara vinkelhastigheten för A !

$$\begin{cases} r\omega = 2r\omega_B \\ r\omega_B = 2r\omega_C \end{cases} \Rightarrow \omega_C = \frac{1}{4}\omega \Rightarrow \omega_C = \frac{1}{4}\alpha t$$

- b) Tidsderivering ger $\alpha_c = \frac{1}{4}\alpha$. Insättning i (1) ger

$$\mathbf{a}_p = 2r\frac{\alpha}{4}\mathbf{e}_t + 2r\left(\frac{\alpha t}{4}\right)^2 \mathbf{e}_n$$

Storleken blir då
$$a_p = \sqrt{\left(\frac{r\alpha}{2}\right)^2 + 4r^2\left(\frac{\alpha^4 t^4}{4^4}\right)^2} = \frac{r\alpha}{2} \sqrt{1 + \frac{\alpha^2 t^4}{16}}$$

LP 2.6

Stången OP har en rotationshastighet. Ändpunkten A har en cirkelrörelse. Hastigheten kan skrivas $\mathbf{v}_A = b\omega \mathbf{e}_\theta$. Hastighetskomponenten i x -riktningen kan skrivas $(\mathbf{v}_A)_x = b\omega \sin \theta$ och är densamma som hastigheten för stången BC .

Accelerationen för A är

$$\mathbf{a}_A = b\alpha \mathbf{e}_\theta - b\omega^2 \mathbf{e}_r$$

Stången BC får då en acceleration i x -riktningen som är

$$(\mathbf{a}_A)_x = b\alpha \sin \theta + b\omega^2 \cos \theta$$

Alternativt tecknas koordinaten för A . Två tidsderiveringar ger resultatet

LP 2.7

Skivans mittpunkt kallas G och sammanfaller med masscentrum för en homogen skiva. Hastighetsriktningarna i A och B är kända. Sambandsformeln för hastigheter

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{BA}$$

kan projiceras på x - och y -axeln:

$$\rightarrow: v_A \cos 60^\circ = v_B - b\omega \cos 60^\circ \quad (1)$$

$$\uparrow: -v_A \sin 60^\circ = 0 - b\omega \sin 60^\circ \quad (2)$$

Ekv (2) ger $v_A = b\omega$ och (1) ger då $v_B = b\omega$

Mittpunktens hastighet fås enligt sambandsformeln

$$\mathbf{v}_G = \mathbf{v}_B + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{BG} \Rightarrow$$

$$\mathbf{v}_G = b\omega \mathbf{e}_x - \frac{b\omega}{4} \mathbf{e}_x - \frac{b\omega\sqrt{3}}{4} \mathbf{e}_y \Rightarrow \mathbf{v}_G = \frac{3}{4}b\omega \mathbf{e}_x - \frac{\sqrt{3}b\omega}{4} \mathbf{e}_y$$

LP 2.8

Sambandsformeln för hastigheter för vardera stängen är

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_C + \boldsymbol{\omega}_{AC} \times \mathbf{r}_{CA} \quad (1)$$

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_C + \boldsymbol{\omega}_{BC} \times \mathbf{r}_{CB} \quad (2)$$

Hastigheten $\mathbf{v}_C$ och vinkelhastigheten $\boldsymbol{\omega}_{AC}$ skall bestämmas. Utnyttja att $\boldsymbol{\omega}_{BC} = -\boldsymbol{\omega}_{AC}$ och subtrahera ekv (1) och (2)!

$$\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B = \boldsymbol{\omega}_{AC} \times (\mathbf{r}_{CA} + \mathbf{r}_{CB})$$

Tag y -komponenten!

$$\uparrow: v_A - v_B = -\omega_{AC} \cdot 2b \sin \theta \Rightarrow \omega_{AC} = \frac{v_B - v_A}{2b \sin \theta} \quad (3)$$

Addition av ekv (1) och (2) ger

$$\mathbf{v}_A + \mathbf{v}_B = 2\mathbf{v}_C + \boldsymbol{\omega}_{AC} \times (\mathbf{r}_{CA} - \mathbf{r}_{CB}) \Rightarrow$$

$$\mathbf{v}_C = \frac{v_A + v_B}{2} \mathbf{e}_y - \frac{1}{2} \omega_{AC} \cdot 2b \cos \theta \mathbf{e}_x$$

$$\text{Insättning av (3) ger} \quad \mathbf{v}_C = \frac{v_B - v_A}{2 \tan \theta} \mathbf{e}_x + \frac{v_A + v_B}{2} \mathbf{e}_y$$

LP 2.9

Den högra och vänstra vajern tangerar trissorna i C respektive D . C har liksom B hastigheten noll och D har liksom A hastigheten v_A uppåt. Sambandsformeln för hastigheter

$$\mathbf{v}_D = \mathbf{v}_C + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{CD}$$

Men $\mathbf{v}_D = \mathbf{v}_A$ och $\mathbf{v}_C = \mathbf{0}$ ger

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{0} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{CD} \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{v_A}{3r} \text{ medurs}$$

$$\mathbf{v}_O = \mathbf{v}_C + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{CO} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}_O = \mathbf{0} + 2r \cdot \frac{v_A}{3r} \mathbf{e}_y \quad \Rightarrow$$

$$\mathbf{v}_O = \frac{2v_A}{3} \mathbf{e}_y$$

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{OP} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}_P = \frac{2v_A}{3} \mathbf{e}_y + 2r \cdot \frac{v_A}{3r} \mathbf{e}_x \quad \Rightarrow$$

$$\mathbf{v}_P = \frac{2v_A}{3} \mathbf{e}_x + \frac{2v_A}{3} \mathbf{e}_y$$

LP 2.10

Både stängen OA och hjulet vid C har ren rotationshastighet. A och B beskriver var sin cirkelrörelse. Antag att hjulet har en vinkelhastighet Ω medurs!

$$\mathbf{v}_A = b\omega \mathbf{e}_\theta = -b\omega \sin\theta \mathbf{e}_x + b\omega \cos\theta \mathbf{e}_y$$

$$\mathbf{v}_B = -r\Omega \mathbf{e}_x$$

Sambandsformeln för hastigheter

$$\boxed{\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{BA}}$$

kan projiceras på x - och y -axeln:

$$\rightarrow: -b\omega \sin\theta = -r\Omega + 0 \quad (1)$$

$$\uparrow: b\omega \cos\theta = 0 + c\omega_{AB} \quad (2)$$

$$\text{Ekv (2) ger } \omega_{AB} = \frac{b\omega}{c} \cos\theta \text{ och (1) ger då } \Omega = \frac{b\omega}{r} \sin\theta$$

LP 2.11 Både stängen OA och BD har ren rotationshastighet. A , B och D beskriver var sin cirkelrörelse. Antag att stängen BD har en vinkelhastighet Ω moturs.

$$\mathbf{v}_A = 3b\omega\mathbf{e}_x; \quad \mathbf{v}_B = -2b\Omega\mathbf{e}_y; \quad \mathbf{v}_D = 4b\Omega\mathbf{e}_y \quad (1)$$

Vinkelhastigheten Ω måste bestämmas.
Sambandsformeln för hastigheter för stängen AB , som har längden $3\sqrt{2}b$

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \boldsymbol{\omega}_{AB} \times \mathbf{r}_{BA}$$

$$\rightarrow: \quad 3b\omega = 0 + \frac{3\sqrt{2}b\omega_{AB}}{\sqrt{2}} + 0 \quad (2)$$

$$\uparrow: \quad 0 = -2b\Omega + \frac{3\sqrt{2}b\omega_{AB}}{\sqrt{2}} \quad (3)$$

Vinkelhastigheten ω_{AB} kan lätt elimineras genom att subtrahera (3) från (2) vilket ger $\Omega = 3\omega/2$. Insättning i ekv (1c) ger

$$\mathbf{v}_D = 4b \cdot \frac{3}{2}\omega\mathbf{e}_y \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}_D = 6b\omega\mathbf{e}_y$$

Lösningen fås enklare om man inser att momentancentrum för stängen AB ligger i O .

LP 2.12 Antag att vinkelhastigheterna är ω_{AB} och ω_{BC} moturs. Sambandsformeln för hastigheter för stängen AB

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \boldsymbol{\omega}_{AB} \times \mathbf{r}_{BA}$$

$$\rightarrow: \quad 0 = c\omega_{BC} - b\omega_{AB}\cos\theta \quad (1)$$

$$\uparrow: \quad -v_A = 0 - b\omega_{AB}\sin\theta \quad (2)$$

$$\text{Ekv (2) ger } \omega_{AB} = \frac{v_A}{b\sin\theta} \text{ och ekv (1) ger då } \omega_{BC} = \frac{v_A}{c\tan\theta}$$

LP 2.13 Både stängen OA och CB har ren rotationshastighet. A och B beskriver var sin cirkelrörelse med hastigheterna

$$\mathbf{v}_A = -3b\omega \mathbf{e}_y; \quad \mathbf{v}_B = 2b\Omega \mathbf{e}_x$$

Stängen AB , som tillfälligtvis har längden $\sqrt{13}b$ och bildar vinkeln θ med vertikalen, är inte stel. Sambandsformeln gäller ej för hastighetskomponenter i stängens riktning. Vi kan ändå tillämpa sambandsformeln i en riktning vinkelrätt mot stängen. Alltså,

$$\boxed{\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \boldsymbol{\omega}_{AB} \times \mathbf{r}_{BA}} \quad \Rightarrow$$

$$3b\omega \sin \theta = -2b\Omega \cos \theta + \sqrt{13}b\omega_{AB} \Rightarrow$$

$$\omega_{AB} = \frac{1}{\sqrt{13}}(3\omega \sin \theta + 2\Omega \cos \theta)$$

Figurens geometri ger $\sin \theta = 3/\sqrt{13}$ och $\cos \theta = 2/\sqrt{13}$

$$\Rightarrow \quad \omega_{AB} = \frac{1}{13}(9\omega + 4\Omega) \quad (\text{moturs})$$

LP 2.14 Eftersom D betraktas som en fix punkt beskriver B en cirkelrörelse. Punkten A har en vertikal hastighet.

$$\mathbf{v}_A = v \mathbf{e}_y; \quad \mathbf{v}_B = b\dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi = b\dot{\varphi} \cos \varphi \mathbf{e}_x + b\dot{\varphi} \sin \varphi \mathbf{e}_y \quad (1)$$

Vinkelhastigheten $\dot{\theta}$ skall bestämmas.
Sambandsformeln för hastigheter för skopan AB

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \boldsymbol{\omega}_{AB} \times \mathbf{r}_{BA}$$

$$\rightarrow: \quad 0 = b\dot{\varphi} \cos \varphi + c\dot{\theta} \sin \theta \quad (2)$$

$$\uparrow: \quad v = b\dot{\varphi} \sin \varphi - c\dot{\theta} \cos \theta \quad (3)$$

$$\text{Ekv (2) ger } \dot{\varphi} = -\frac{c \sin \theta}{b \cos \varphi} \dot{\theta} \text{ och ekv (1) ger } \dot{\theta} = \frac{b\dot{\varphi} \sin \varphi - v}{c \cos \theta} \Rightarrow$$

$$\dot{\theta} = -\frac{bc \sin \theta \sin \varphi}{bc \cos \varphi \cos \theta} \dot{\theta} - \frac{v}{c \cos \theta} \Rightarrow \quad \dot{\theta} = -\frac{v \cos \varphi}{c \cos(\theta - \varphi)}$$

LP 2.15 Sambandsformeln för hastigheter för stängen AB

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_C + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{CB}$$
$$\rightarrow: \quad 0 = -v + b\omega \sin \theta \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{v}{b \sin \theta}$$

Sambandsformeln igen: $\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_C + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{CA} \Rightarrow$

$$\mathbf{v}_A = -v \mathbf{e}_x - b\omega \sin \theta \mathbf{e}_x + b\omega \cos \theta \mathbf{e}_y \Rightarrow$$

$$\mathbf{v}_A = -\left(v + b \cdot \frac{v}{b \sin \theta} \sin \theta\right) \mathbf{e}_x + b \cdot \frac{v}{b \sin \theta} \cos \theta \mathbf{e}_y$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{v}_A = -2v \mathbf{e}_x + \frac{v}{\tan \theta} \mathbf{e}_y$$

LP 2.16 Momentancentrums läge bestäms geometriskt av skärningspunkten av de två räta linjer som går genom hastighetsvektorernas fotpunkter respektive spetsar. Momentancentrum C ligger alltså någonstans på stängen eller dess förlängning. Antag att C ligger på stängen på avståndet x ifrån den vänstra ändpunkten. Då gäller

$$\begin{cases} v_A = (b-x)\omega \\ v_B = (2b-x)\omega \end{cases} \Rightarrow v_B(b-x) = v_A(2b-x) \Rightarrow x = \frac{v_B - 2v_A}{v_B - v_A} b$$

För det givna hastighetsförhållandet fås $x = \frac{b}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{2} \text{ m}$

Vinkelhastigheten fås då ur det första sambandet

$$\omega = \frac{v_A}{b-x} \Rightarrow \omega = \frac{2v_A}{b} \Rightarrow \omega = 10 \text{ rad/s}$$

LP 2.17 Enligt konstruktionsmetoden för momentancentrums läge ligger den punkten C på stängen eller dess förlängning. Antag att C ligger på avståndet x ifrån den vänstra ändpunkten. Då gäller

$$v_A = (x - b)\omega \Rightarrow x = b + \frac{v_A}{\omega} \Rightarrow x = b + \frac{v_A}{\omega} \Rightarrow x = 3 \text{ m}$$

Hastigheten i B blir då med hjälp av momentancentrum

$$\begin{aligned} v_B &= (x - 2b)\omega \Rightarrow v_B = \left(b + \frac{v_A}{\omega} - 2b\right)\omega \\ \Rightarrow v_B &= v_A - b\omega \Rightarrow v_B = 5 \text{ m/s} \end{aligned}$$

LP 2.18 Hastigheten i A är vertikal och i B horisontell. Drag rätta linjer genom hastighetsvektorernas fotpunkter vinkelrätt mot hastigheterna. Det betyder en horisontell rät linje genom A och en vertikal rät linje genom B .

- a) Momentancentrum C har koordinaterna

$$x = b \sin \theta; y = b \cos \theta$$

- b) I det betraktade ögonblicket kan man säga att skivan roterar kring momentancentrum. B ser ut att ha en cirkelrörelse kring C . Farten är radien gånger vinkelhastigheten:

$$v_B = b \cos \theta \cdot \omega \Rightarrow \omega = \frac{v_B}{b \cos \theta}$$

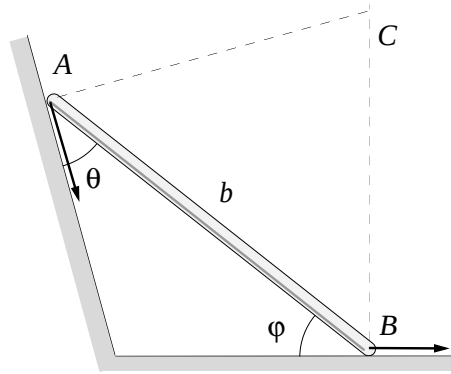
- c) Hastigheten för G fås också med hjälp av momentancentrum. G ser ut att ha en cirkelrörelse med radien $b/2$ kring C :

$$v_G = \frac{b}{2} \omega \Rightarrow \mathbf{v}_G = \frac{b\omega}{2} \cos \theta \mathbf{e}_x - \frac{b\omega}{2} \sin \theta \mathbf{e}_y$$

$$\Rightarrow \mathbf{v}_G = \frac{v_B}{2} \mathbf{e}_x - \frac{v_B}{2} \tan \theta \mathbf{e}_y$$

$\Rightarrow$

LP 2.19



Hastighetsriktningarna i A och B är kända. Drag rätta linjer genom A och B vinkelrätt mot hastighetsvektorerna. Skärningspunkten är momentancentrum C. I det betraktade ögonblicket kan man säga att skivan roterar kring momentancentrum.

A och B ser ut att ha en cirkelrörelse kring C. Farten är radien gånger vinkelhastigheten:

$$v_A = |\mathbf{r}_{CA}| \omega; \quad v_B = |\mathbf{r}_{CB}| \omega$$

Avstånden $|\mathbf{r}_{CA}|$ och $|\mathbf{r}_{CB}|$ motsvarar sidorna i triangeln ABC.

Hastighetsförhållandet kan bestämmas med hjälp av sinussatsen för triangeln ABC:

$$\frac{v_B}{v_A} = \frac{|\mathbf{r}_{CB}| \omega}{|\mathbf{r}_{CA}| \omega} = \frac{|\mathbf{r}_{CB}|}{|\mathbf{r}_{CA}|} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)} = \frac{\cos \theta}{\cos \varphi}$$

Lösningen fås mycket enklare om man inser att projektionen av de två hastigheterna $\mathbf{v}_A$ och $\mathbf{v}_B$ på skivans riktning måste vara lika om skivan är stel:

$$\mathbf{v}_A \cdot \mathbf{e}_{AB} = \mathbf{v}_B \cdot \mathbf{e}_{AB} \quad \Rightarrow \quad v_A \cos \theta = v_B \cos \varphi$$

LP 2.20

Antag att vinkelhastigheten ω och vinkelaccelerationen α är riktade moturs. Sambandsformeln för hastigheter

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{BA}$$

kan projiceras på x - och y -axeln:

$$\rightarrow: -v_A \cos 30^\circ = -v \cos 30^\circ + 0 \quad (1)$$

$$\uparrow: v_A \sin 30^\circ = -v \sin 30^\circ - b\omega \quad (2)$$

$$\text{Ekv (1) ger } v_A = v \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}_A = -\frac{\sqrt{3}}{2}v\mathbf{e}_x + \frac{1}{2}v\mathbf{e}_y$$

$$\text{och (2) ger } \omega = -\frac{v_B}{b}$$

Sambandsformeln för accelerationer

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_B + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}_{BA} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{BA})$$

$$\rightarrow: a_{Ax} = 0 + 0 + b\omega^2 \quad \Rightarrow \quad a_{Ax} = b\omega^2 \quad (3)$$

$$\uparrow: a_{Ay} = 0 + b\alpha + 0 \quad \Rightarrow \quad a_{Ay} = b\alpha \quad (4)$$

$$\mathbf{a}_A = b\omega^2\mathbf{e}_x + b\alpha\mathbf{e}_y$$

Accelerationen måste här vara parallell med underlaget. Det betyder att

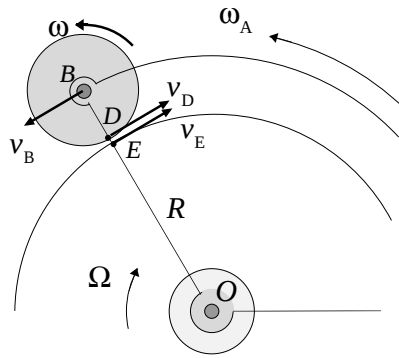
$$\tan 30^\circ = -\frac{a_{Ay}}{a_{Ax}} = -\frac{b\alpha}{b\omega^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\alpha}{\omega^2} \quad \Rightarrow \quad \alpha = -\frac{\omega^2}{\sqrt{3}} \quad \Rightarrow$$

$$\alpha = -\frac{v^2}{b^2\sqrt{3}} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a}_A = \frac{v^2}{b}\mathbf{e}_x - \frac{v^2}{b\sqrt{3}}\mathbf{e}_y$$

LP 2.21

Lösning finns i boken

LP 2.22



Antag att vinkelhastigheten är ω moturs. Punkten B har en cirkelrörelse kring O :

$$v_B = (R + r)\omega_A$$

Punkten E har också en cirkelrörelse kring O :

$$v_E = R\Omega$$

Eftersom rullning förutsätts är hastigheten i D och E lika: $v_D = v_E$

Sambandsformeln för hastigheter

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_D + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{DB}$$

kan projiceras på tangentialriktningen snett neråt:

$$v_B = -v_D + r\omega \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{v_B + v_D}{r} \quad \Rightarrow$$

$$\omega = \frac{(R + r)\omega_A + R\Omega}{r} \quad \Rightarrow \quad \omega = \omega_A + \frac{R}{r}(\omega_A + \Omega)$$

LP 2.23

Tyngdens hastighet uppåt måste vara lika stor som handens hastighetskomponent i den övre tråddelens riktning. Bestäm alltså hastigheten i C och projicera den på trådens riktning där. Med ett koordinatsystem med x -axeln åt höger och y -axeln uppåt fås

$$\mathbf{v}_B = b\omega_{AB}\mathbf{e}_y$$

Sambandsformeln för hastigheter $\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_B + \boldsymbol{\omega}_{BC} \times \mathbf{r}_{BC}$ ger

$$\mathbf{v}_C = b\omega_{AB}\mathbf{e}_y + c\omega_{BC}\mathbf{e}_\theta \quad \text{eller}$$

$$\mathbf{v}_C = b\omega_{AB}\mathbf{e}_y + c\omega_{BC}(-\sin\theta\mathbf{e}_x + \cos\theta\mathbf{e}_y)$$

Projicera denna hastighet i trådens riktning som kallas $\mathbf{e}$. Då gäller sambanden (Här krävs förstås en tydlig figur.)

$$\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e} = \cos(\pi - \varphi) = -\cos\varphi$$

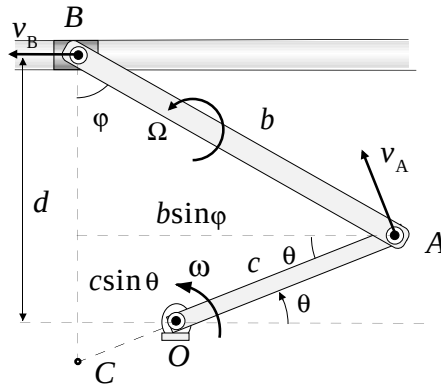
$$\mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \sin\varphi \quad \Rightarrow$$

$$\mathbf{v}_C \cdot \mathbf{e} = b\omega_{AB}\mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e} + c\omega_{BC}(-\sin\theta\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e} + \cos\theta\mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}) \quad \Rightarrow$$

$$\mathbf{v}_C \cdot \mathbf{e} = b\omega_{AB}\sin\varphi + c\omega_{BC}(\sin\theta\cos\varphi + \cos\theta\sin\varphi) \quad \Rightarrow$$

Tyngdens fart uppåt är $\mathbf{v}_C \cdot \mathbf{e} = b\omega_{AB}\sin\varphi + c\omega_{BC}\sin(\theta + \varphi)$

LP 2.24



Punkten A har en cirkelrörelse kring O: Antag att vinkelhastigheten är ω moturs.

Punkten B har en cirkelrörelse kring O:

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_A &= c\omega \mathbf{e}_\theta \Rightarrow \\ \mathbf{v}_A &= c\omega(-\sin\theta \mathbf{e}_x + \cos\theta \mathbf{e}_y)\end{aligned}$$

Sambandsformeln för hastigheter

$$\boxed{\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega}_{AB} \times \mathbf{r}_{AB}}$$

- b) kan projiceras på den horisontella och vertikala riktningen. Antag att vinkelhastigheten för AB är Ω moturs.

$$\leftarrow : v_B = c\omega \sin\theta + b\Omega \cos\varphi \quad (1)$$

$$\uparrow : 0 = c\omega \cos\theta - b\Omega \sin\varphi \quad \Rightarrow \quad \Omega = \frac{c\cos\theta}{b\sin\varphi} \omega \quad (2)$$

Här återstår att finna sambandet mellan vinklarna θ och φ .

Figurens geometri ger
$$b\sin\varphi = \sqrt{b^2 - (d - c\sin\theta)^2}$$

Insättning i (2) ger
$$\Omega = \frac{c\cos\theta}{\sqrt{b^2 - (d - c\sin\theta)^2}} \omega$$

- c) Drag konstruktionslinjer vinkelrätt mot hastighetsvektorerna i A och B genom deras fotpunkter. Punkten C är momentancentrum. I det betraktade ögonblicket kan A också sägas ha en cirkelbanehastighet kring C. Antag att C ligger på avståndet x från O.

$$v_A = c\omega = (c + x)\Omega \quad \Rightarrow \quad x = c\left(\frac{\omega}{\Omega} - 1\right)$$

- d) Hastigheten v_B fås antingen ur (1) eller med hjälp av momentancentrum. B ser ju ut att ha en cirkelrörelse kring C.

$$v_B = (d + x\sin\theta)\Omega \quad \Rightarrow \quad v_B = \left(d + c\left(\frac{\omega}{\Omega} - 1\right)\sin\theta\right)\Omega$$

LP 2.25

Lägg in ett koordinatsystem med x -axeln åt höger och y -axeln uppåt. Punkten A har en cirkelrörelse kring O :

$$\mathbf{v}_A = b\omega_{OA} \mathbf{e}_\theta \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}_A = b\omega_{OA} (-\cos\theta \mathbf{e}_x - \sin\theta \mathbf{e}_y)$$

Sambandsformeln för hastigheter

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega}_{BA} \times \mathbf{r}_{AB}$$

kan projiceras på den horisontella och vertikala riktningen. Om hastigheten för C är horisontell måste det även gälla B , annars förändras längden av stängen BC .

$$\rightarrow: v_B = -b\omega_{OA} \cos\theta + 0$$

$$\uparrow: 0 = -b\omega_{OA} \sin\theta - c\omega_{BA} \quad \Rightarrow \quad \omega_{BA} = -\frac{b \sin\theta}{c} \omega_{OA}$$

Sambandsformeln för hastigheter

$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_B + \boldsymbol{\omega}_{BC} \times \mathbf{r}_{BC}$$

$$\rightarrow: v_C = -b\omega_{OA} \cos\theta + d\omega_{BC}$$

LP 2.26

Antag att bakhjulet har vinkelhastigheten ω och kedjekransen eller pedalarmen vinkelhastigheten Ω . Centrumpunkten på hjulet har hastigheten v . Den punkt på hjulet som råkar vara i kontakt med vägen har hastigheten noll och är momentancentrum. Detta kan utnyttjas för att bestämma vinkelhastigheten:

$$v = R\omega \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{v}{R}$$

Varje länk på kedjan har samma hastighet i kedjans riktning. Om kuggkransen och kedjekransen har radien r_1 respektive r_2 gäller alltså att periferihastigheterna måste vara lika:

$$r_1\omega = r_2\Omega$$

Kuggkransen har ju samma vinkelhastighet som bakhjulet. Men antalet kuggar är proportionellt mot omkretsen, dvs radien.

$$\Omega = \frac{r_1\omega}{r_2} \quad \Rightarrow \quad \Omega = \frac{N_1\omega}{N_2} \quad \Rightarrow \quad \Omega = \frac{N_1v}{N_2R}$$

LP 2.27

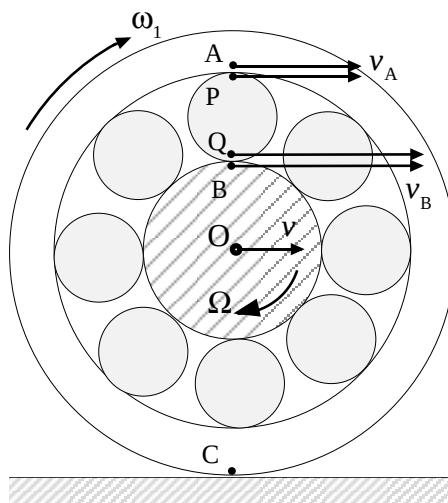
I vissa fall kan det vara enklast att ställa upp koordinaten för punkten i fråga och tidsderivera för att få hastigheten.

$$y_B = b \sin \theta + \sqrt{c^2 - b^2 \sin^2 \theta} \quad \Rightarrow$$

$$\dot{y}_B = -b \sin \theta \dot{\theta} + \frac{1}{2} (c^2 - b^2 \sin^2 \theta)^{-\frac{1}{2}} (-b^2 \cdot 2 \sin \theta \cos \theta \dot{\theta}) \quad \Rightarrow$$

$$\dot{y}_B = -b\omega \left(1 + \frac{b \cos \theta}{\sqrt{c^2 - b^2 \sin^2 \theta}} \right) \sin \theta$$

LP 2.28



Punkten C är den yttre lagerringens momentancentrum. Antag att motsvarande vinkelhastighet är ω_1

$$\Rightarrow v = 5r\omega_1 \quad (1)$$

Punkten A tillhör samma ring

$$\Rightarrow v_A = 9r\omega_1 \quad (2)$$

Ekv (1) och (2) ger

$$v_A = \frac{9v}{5} \quad (3)$$

Sambandsformeln för hastigheter för den inre lagerringen

$$\boxed{\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{OB}} \quad \Rightarrow \quad \rightarrow: v_B = v + 2r\Omega \quad (4)$$

Sambandsformeln för hastigheter för kulan

$$\boxed{\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_Q + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{PQ}} \quad (5)$$

Men eftersom kulan rullar mot väggarna i P och Q är hastigheterna i A och P samt B och Q lika. Insättning i (5) ger

$$\rightarrow: v_A = v_B - 2r\omega \quad (6)$$

Insättning av (3) och (4) ger då

$$\frac{9v}{5} = v + 2r\Omega - 2r\omega \quad \Rightarrow \quad \omega = \Omega - \frac{2v}{5r}$$

LP 2.29

Eftersom punkterna D , C och B tillhör en tråd som inte kan förlängas måste hastigheten i trådens riktning vara en och densamma $\Rightarrow$

a) $\mathbf{v}_D = -v\mathbf{e}_y; \quad \mathbf{v}_C = v\mathbf{e}_y; \quad \mathbf{v}_B = v\mathbf{e}_y \quad (\mathbf{e}_y \text{ riktad uppåt})$

b) Trissans centrumpunkt är fix och måste vara momentancentrum.

c) Punkten D på trissan har en cirkelrörelse och har samma hastighet som tråden i den punkten. Vinkelhastigheten räknas positiv medurs

$$v_D = 2r\omega \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{v}{2r}$$

d) Hastigheten i A är noll eftersom trådens hastighet är noll i den övre fästpunkten.

e) A är momentancentrum eftersom hastigheten där är noll.

f) Den stora trissan ser momentant ut att rotera kring A . Hastigheten i B är känd. Vinkelhastigheten räknas positiv moturs.

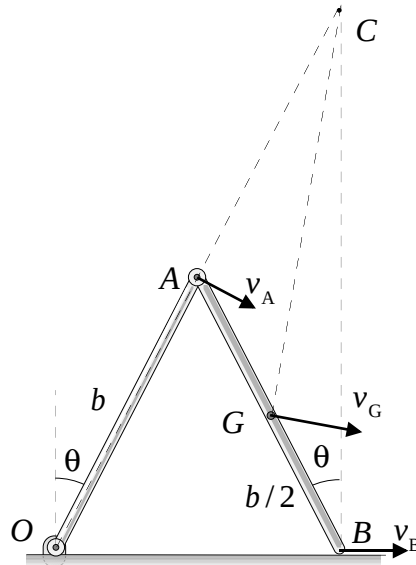
$$v_B = 6r\Omega \quad \Rightarrow \quad \Omega = v / 6r$$

g) Tyngden F har samma hastighet som stora trissans centrum:

$$v_F = 3r\Omega \quad \Rightarrow \quad v_F = v/2$$

h) $\boxed{\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{AB}} \Rightarrow \quad \uparrow: \quad v_B = 0 - 6r\Omega \quad \Rightarrow$

LP 2.30



Punkten A har en cirkelrörelse kring O:

$$v_A = b\dot{\theta} \quad (1)$$

Hastigheten i B är känd.
Konstruera momentancentrum C för kroppen AB med räta linjer vinkelräta mot hastighetsvektorer i A och B.
Momentant ser alltså både A och B ut att ha en cirkelrörelse kring C. Vinkelhastigheten för AB är densamma som för OA eftersom de bildar lika stor vinkel med vertikalen.

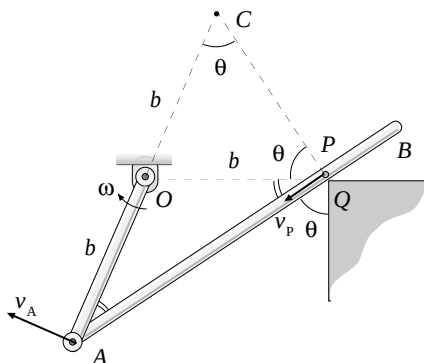
$$v_B = |\mathbf{r}_{BC}| \dot{\theta} \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{v_B}{|\mathbf{r}_{BC}|} \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{v_B}{2b \cos \theta} \quad (2)$$

Mittpunkten G ser också ut att ha en cirkelrörelse kring C. Farten bestäms som $v_G = |\mathbf{r}_{CG}| \dot{\theta}$. Avståndet bestäms t ex med cosinus-satsen för triangeln ABC

$$v_G = \sqrt{(2b \cos \theta)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{b}{2} \cdot 2b \cos \theta \cdot \cos \theta} \cdot \frac{v_B}{2b \cos \theta} \Rightarrow$$

$$v_G = \sqrt{8 \cos^2 \theta + 1} \cdot \frac{v_B}{4 \cos \theta}$$

LP 2.31



Punkten A har en cirkelrörelse kring O. Hastighetsriktningen är vinkelrät mot stängen OA och

$$v_A = b\omega \quad (1)$$

Hastighetsriktningen i punkten P är känd. P kan ju inte ha någon hastighetskomposant in mot hörnet P.

Konstruera momentancentrum C för kroppen AB med räta linjer vinkelräta mot hastighetsvektorer i A och P. Momentant ser alltså både A och P ut att ha en cirkelrörelse kring C. Geometrin ger att vinkeln OAB är lika med vinkeln OPA. Då är också vinklarna OPC och OCP lika och lika med θ . Triangeln OCP är därför likbent och vi får med momentancentrum C

$$v_A = 2b\omega_{AB} \Rightarrow b\omega = 2b\omega_{AB} \Rightarrow \omega_{AB} = \omega/2$$

$$v_P = 2b \cos \theta \omega_{AB} \Rightarrow v_P = b \cos \theta \omega$$

Stelkroppsdyamik Problemsamling 3

Obs! Till en fullständig lösning krävs en figur

LP 3.1 Tröghetsmomentets definition för ett partikelsystem ger (partiklarnas bidrag från vänster räknat i figuren)

$$I_x = \sum m_k r_{k\perp}^2 = \sum m_k (y_k^2 + z_k^2) = mb^2 + mb^2 + mb^2 = 3mb^2$$

$$I_y = \sum m_k r_{k\perp}^2 = \sum m_k (x_k^2 + z_k^2) = mb^2 + mb^2 + mb^2 = 3mb^2$$

$$I_z = \sum m_k r_{k\perp}^2 = \sum m_k (x_k^2 + y_k^2) = m(b^2 + b^2) + 0 + m(b^2 + b^2) = 4mb^2$$

LP 3.2 Tröghetsmomentet för en homogen stång med massan m och längden l är med avseende på en axel genom ändpunkten respektive mittpunkten

$$\frac{ml^2}{3} \text{ och } \frac{ml^2}{12}$$

Denna beräkning finns i teorin och redovisas inte här.
Tröghetsmomentet är additivt så att det totala tröghetsmomentet är lika med summan av delkropparnas tröghetsmoment.
Stängerna har vardera massan $m/2$.
Om Steiners sats används för den horisontella stängen fås

$$I_A = \frac{(m/2)(2b)^2}{3} + \left[\frac{(m/2)(2b)^2}{12} + (m/2)(2b)^2 \right]$$

$$I_A = \frac{2}{3}mb^2 + \left[\frac{1}{6} + 2 \right]mb^2 = \frac{17}{6}mb^2$$

LP 3.3

För en homogen stång med massan m och längden b är tröghetsmomentet med avseende på en axel vinkelrät mot stängen och genom dess mittpunkt (masscentrum G):

$$I_G = \frac{mb^2}{12}$$

Denna beräkning redovisas i teorin. Steiners sats ger tröghetsmomentet med avseende på en ändpunkt A :

$$I_A = I_G + m\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{mb^2}{12} + \frac{mb^2}{4} = \frac{mb^2}{3}$$

Den givna kroppen består av tre stänger. Bidragen till tröghetsmomenten i följande uttryck räknas med ordning nerifrån och upp.

$$I_x = 0 + \frac{(m/3)b^2}{3} + \left[\frac{(m/3)b^2}{12} + \frac{m}{3} \left(\frac{b^2}{4} + b^2 \right) \right] = \frac{5mb^2}{9}$$

$$I_y = \frac{(m/3)b^2}{3} + \frac{(m/3)b^2}{3} + (m/3)b^2 = \frac{5mb^2}{9}$$

$$I_z = \frac{(m/3)b^2}{3} + 0 + \frac{(m/3)b^2}{3} = \frac{2mb^2}{9}$$

Här har Steiners sats använts för beräkning av I_x . Detta är markerat med en klammer.

LP 3.8

Tröghetsmomentet med avseende på symmetriaxeln för en homogen cirkelskiva eller cylinder med radien R och massan m är

$$I_z = \frac{mR^2}{2}$$

Denna beräkning finns i bokens teoriavsnitt och redovisas inte här. Tröghetsmomentet är additivt så att det totala tröghetsmomentet är lika med summan av delkropparnas tröghetsmoment. Kalla hålet för kropp 1 och återstoden, dvs den betraktade kroppen, för kropp 2! Då gäller om densiteten är ρ och cylinderns höjd är h :

$$m_1 = \rho \cdot \pi r^2 \cdot h \quad m_2 = \rho \cdot \pi (R^2 - r^2) \cdot h \quad m_{\text{tot}} = \rho \cdot \pi R^2 \cdot h$$

$$I_{\text{tot}} = I_1 + I_2 \Rightarrow \frac{m_{\text{tot}} R^2}{2} = \frac{m_1 r^2}{2} + I_2 \Rightarrow I_2 = \frac{m_{\text{tot}} R^2}{2} - \frac{m_1 r^2}{2}$$

$$\Rightarrow I_2 = \frac{(\rho \cdot \pi R^2 \cdot h) R^2}{2} - \frac{(\rho \cdot \pi r^2 \cdot h) r^2}{2} \Rightarrow I_2 = \frac{\rho \pi h}{2} (R^4 - r^4)$$

Densiteten kan bestämmas eftersom massan och volymen för den givna kroppen är kända:

$$\rho = \frac{m_2}{\pi (R^2 - r^2) h}$$

Eftersom massan $m_2 \equiv m$ är given i texten ger insättning

$$I_2 = \frac{m}{\pi (R^2 - r^2) h} \cdot \frac{\pi h}{2} (R^4 - r^4) \Rightarrow I_2 = \frac{m (R^4 - r^4)}{2 (R^2 - r^2)} \Rightarrow$$

$$I_2 = \frac{m (R^2 + r^2) (R^2 - r^2)}{2 (R^2 - r^2)} \Rightarrow I_2 = \frac{m (R^2 + r^2)}{2}$$

LP 3.10

Skiva upp cylindern i tunna cirkelskivor! Betrakta den cirkelskiva som ligger på avståndet z från xy -planet. Den har massan dm och tjockleken dz . Tröghetsmomentet för bara denna cirkelskiva är enligt Steiners sats:

$$dI_x = \frac{dm \cdot R^2}{4} + dm \cdot z^2$$

Här har vi utgått ifrån att tröghetsmomentet för en cirkelskiva med avseende på en diameter är känt (beräkningen är gjord i bokens teoriavsnitt).

För hela cylindern fås då:
$$I_x = \int dI_x = \int \left(\frac{R^2}{4} + z^2 \right) dm$$

För masselementet gäller: $dm = \rho \cdot \pi R^2 dz = \frac{m}{\pi R^2 h} \cdot \pi R^2 dz = \frac{m}{h} dz$

Insättning ger

$$I_x = \int \left(\frac{R^2}{4} + z^2 \right) dm = \int \left(\frac{R^2}{4} + z^2 \right) \frac{m}{h} dz = \frac{m}{h} \left[\frac{R^2}{4} z + \frac{z^3}{3} \right]_0^h \Rightarrow$$

$$I_x = \frac{m}{h} \int_0^h \left(\frac{R^2}{4} + z^2 \right) dz = \frac{m}{h} \left[\frac{R^2}{4} z + \frac{z^3}{3} \right]_0^h = \frac{m}{h} \left(\frac{R^2}{4} h + \frac{h^3}{3} \right) = m \left(\frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{3} \right)$$

Om $R \rightarrow 0$ så $I_x \rightarrow \frac{mh^2}{3}$ (smal stång).

Om $h \rightarrow 0$ så $I_x \rightarrow \frac{mR^2}{4}$ (tunn cirkelskiva).

LP 3.11

Här utgår vi från att tröghetsmomentet för en cylinder med avseende på en diameter i basytan är känt. Beräkningarna har gjorts i föregående problem. Rent allmänt gäller att kroppens totala tröghetsmoment är

$$I = I^{\text{skaft}} + I^{\text{klubba}}$$

För klubban måste Steiners sats tillämpas. Detta markeras nedan med en klammer. Se klubban som två cylindrar, vardera med höjden h . För varje sådan cylinder kan tröghetsmomentet med avseende på klubbans mittpunkt bestämmas enligt föregående problem. Vi får

$$I_x = \rho\pi r^2 b \left(\frac{r^2}{4} + \frac{b^2}{3} \right) + 2 \left[\rho\pi R^2 h \left(\frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{3} \right) + \rho\pi R^2 h \cdot (b+R)^2 \right]$$

$$I_x = \rho\pi r^2 b \left(\frac{r^2}{4} + \frac{b^2}{3} \right) + 2\rho\pi R^2 h \left[\frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{3} + (b+R)^2 \right]$$

LP 3.12

Om det hade varit en *hel* cirkelring med massan m och radien r vet vi att tröghetsmomentet med avseende på symmetriaxeln enligt definitionen är $I_z = mr^2$. Massfördelningen är tunn och plan och då gäller satsen om tunna skivor:

$$I_x + I_y = I_z$$

Då $I_x = I_y$ på grund av symmetri för en sådan hel cirkelring fås

$$2I_x = I_z \quad \Rightarrow \quad I_x = \frac{mr^2}{2}$$

Det är bara massans avstånd från axeln som är av betydelse för tröghetsmomentet. Det spelar alltså ingen roll om vi viker den hela cirkelbågen längs x -axeln så att vi får en halv cirkelbåge. Tröghetsmomentet blir oförändrat dvs

$$I_x = \frac{mr^2}{2}$$

- b) I fortsättningen gäller det tröghetsmoment med avseende på axlar parallella med z -axeln. Vi vet för halvcirkelbågen att $I_O = mr^2$.

Halvcirkelbågens masscentrum har koordinaten $y_G = \frac{2r}{\pi}$.

Steiners sats ger

$$I_G = I_O - my_G^2$$

$$I_A = I_G + m(r - y_G)^2 \Rightarrow$$

$$I_A = I_O - my_G^2 + m(r - y_G)^2 \Rightarrow$$

$$I_A = mr^2 - my_G^2 + m(r^2 - 2ry_G + y_G^2) \Rightarrow I_A = 2mr^2 - 2mry_G \Rightarrow$$

$$I_A = 2mr^2 - 2m \frac{2r^2}{\pi} \quad \Rightarrow \quad I_A = 2m \left(1 - \frac{2}{\pi}\right) r^2$$

Stelkroppsdyamik Problemsamling 4

OBS! En fullständig lösning måste innehålla en figur!

LP 4.3

Tyngdkraften, normalkraften och friktionskraften verkar på lådan. Antag att normalkraftens angreppspunkt är på avståndet x från lådans nedre vänstra hörn.

Kraftekvationen $\mathbf{F} = m\mathbf{a}_G$ och momentekvationen $\mathbf{M}_G = \dot{\mathbf{H}}_G$ i komponentform ger

$$\rightarrow : f = ma \quad (1)$$

$$\uparrow : N - mg = 0 \quad (2)$$

$$\curvearrowright G: f \cdot \frac{h}{2} - N \left(\frac{b}{2} - x \right) = 0 \quad (3)$$

Lådan har ju ingen vinkelacceleration. Sätt in (1) och (2) i (3)!

$$ma \cdot \frac{h}{2} - mg \left(\frac{b}{2} - x \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{2} \left(b - \frac{ha}{g} \right)$$

$$\text{Gränsfall glidning} \quad f = \mu N \quad \Rightarrow \quad a = \mu g$$

$$\text{Gränsfall balans} \quad x = 0 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{b}{h} g$$

LP 4.4

De yttre krafterna på skottkärran är tyngdkraften mg , kraften P samt normalkraften N vid hjulet. Problemtexten *kan* kanske ge intrycket av att kraften P är given. Tanken är att den ska bestämmas, så att skottkärran utan rotation får accelerationen a . Kraftekvationen:

$$\boxed{\mathbf{F} = m\mathbf{a}_G} \Rightarrow \rightarrow: P \cos \theta = ma \quad (1)$$

$$\uparrow: P \sin \theta - mg + N = 0 \quad (2)$$

Momentekvationen med avseende på masscentrum G :

$$\boxed{\mathbf{M}_G = \dot{\mathbf{H}}_G} \Rightarrow \curvearrowright_G: Nc - P \sin \theta \cdot b - P \cos \theta \cdot (d - h) = I_G \cdot 0$$

Högerledet i ekv (3) är noll eftersom skottkärrans vinkelacceleration är noll. Lös nu ut $P \cos \theta$ och $P \sin \theta$ ur ekv (1) och (2) och sätt in i ekv (3)!

$$\Rightarrow Nc - (mg - N) \cdot b - (ma) \cdot d = 0 \quad \Rightarrow$$

$$N(b + c) = ma(d - h) + mgb \quad \Rightarrow$$

$$N = \frac{1}{b + c} [ma(d - h) + mgb]$$

Nu när normalkraften är känd kan vinkeln θ bestämmas ur ekv (1) och (2).

$$\frac{P \sin \theta}{P \cos \theta} = \frac{mg - N}{ma} \Rightarrow \tan \theta = \frac{g - \frac{1}{b + c} [a(d - h) + gb]}{a} \Rightarrow$$

$$\tan \theta = \frac{gc - a(d - h)}{a(b + c)}$$

Alternativ lösning: Momentekvationen med avseende på en rörlig punkt A skrivs allmänt

$$\boxed{\mathbf{M}_A = \mathbf{H}_G + \mathbf{r}_{AG} \times m\mathbf{a}_G}$$

I detta fall fås normalkraften direkt ur ekvationen

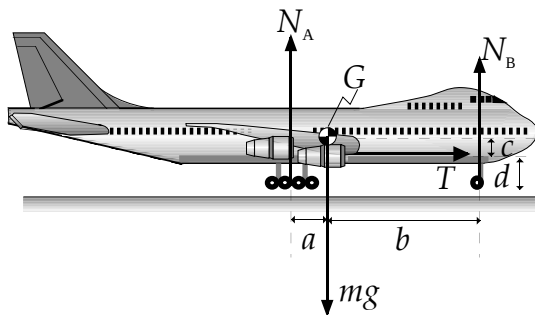
$$\curvearrowright_A: N(b + c) - mgb = I_G \cdot 0 + (d - h)ma$$

Ställ nu upp momentekvationen med avseende på punkten C , som är skärningspunkt mellan verkningslinjerna för krafterna P och N .

$$\curvearrowright_C: mgc = I_G \cdot 0 + [(d - h) + (b + c) \tan \theta]ma$$

Ekvationen ger direkt vinkeln θ .

LP 4.8



Accelerationen kan bestämmas med hjälp av kraftekvationen, om alla krafter i accelerationens riktning är kända.

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}_G \quad (1)$$

Normalkrafterna kan sedan bestämmas med momentekvationen

$$\mathbf{M}_G = \dot{\mathbf{H}}_G \quad (2)$$

I komponentform fås ekvationerna

$$\rightarrow : T = ma_G \quad (3)$$

$$\uparrow : N_A + N_B - mg = 0 \quad (4)$$

$$\curvearrowright G : N_B b - N_A a + Tc = 0 \quad (5)$$

Ekv (3) ger accelerationen
$$a_G = \frac{T}{m} \quad (6)$$

Eliminering av N_A ur ekv (4) och (5) ger

$$N_B b - (mg - N_B)a + Tc = 0 \quad (7)$$

$$\Rightarrow N_B(a + b) - mga + Tc = 0 \quad (8)$$

Resultatet är

$$N_B = \frac{mga - Tc}{a + b} \quad N_A = \frac{mgb + Tc}{a + b} \quad (9)$$

Kommentar:

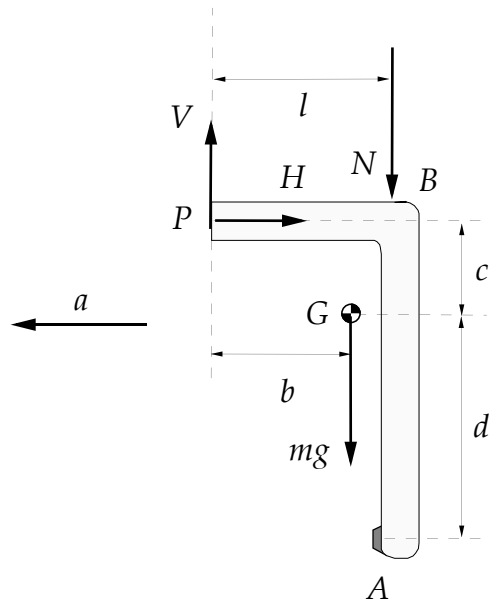
Det går också bra att bestämma normalkrafterna i tur och ordning med momentekvationen för rörlig momentpunkt:

$$\mathbf{M}_A = \dot{\mathbf{H}}_G + \mathbf{r}_{AG} \times m\mathbf{a}_G$$

$$\curvearrowright A : N_B(b + a) - mga - Td = 0 - (d + c)ma_G$$

vilket ger samma resultat som ovan.

LP 4.10



Vi frilägger armen PBA och inför reaktionskraftkomponenterna H och V vid den glatta leden P .

Reaktionskrafterna vid P kan elimineras redan från början genom att utnyttja momentekvationen med avseende på den rörliga punkten P :

$$\mathbf{M}_P = \dot{\mathbf{H}}_G + \mathbf{r}_{PG} \times m\mathbf{a}_G \quad (1)$$

Om vi betraktar gränsfallet då kontakten vid A upphör, blir z -komponenten av denna ekvation

$$\curvearrowright P): -Nl - mgb = 0 - cma \quad (2)$$

$$\underline{\underline{a = \frac{Nl}{mc} + \frac{gb}{c}}} \quad (3)$$

Alternativ lösning ges av momentekvationen

$$\mathbf{M}_P = \dot{\mathbf{H}}_{P_{\text{rel}}} + \mathbf{r}_{PG} \times m\mathbf{a}_P \quad (4)$$

som ger en likadan komponentekvation som ekv (2) eftersom P och G har lika stor acceleration.

Alternativt löses problemet med kombinationen

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}_G \quad (5)$$

$$\mathbf{M}_G = \dot{\mathbf{H}}_G \quad (6)$$

I komponentform fås ekvationerna

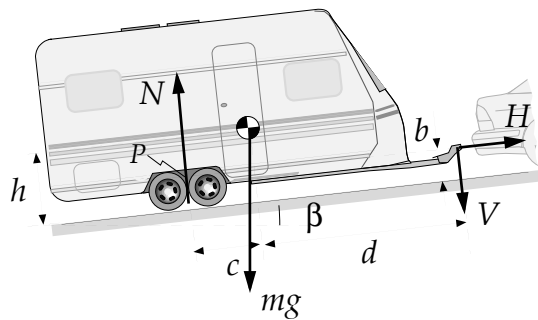
$$\rightarrow : H = -ma \quad (7)$$

$$\uparrow : V - N - mg = 0 \quad (8)$$

$$\curvearrowright G): -Vb - Hc - N(l - b) = 0 \quad (9)$$

Eliminering av H och V ur ekv (7-9) ger samma resultat som ovan.

LP 4.12



Frilägg husvagnen och inför krafterna vid kontaktpunkterna enligt figuren. Eftersom en kraft söks är det naturligt att ställa upp kraftekvationen och momentekvationen för husvagnen.

Kraftekvationen

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}_G$$

ger följande komponentekvationer i vägens riktning och vinkelrät emot:

$$\rightarrow : H - mg \sin \beta = m\ddot{x}_G \quad (1)$$

$$\uparrow : -V - mg \cos \beta + N = 0 \quad (2)$$

Momentekvationen med avseende på masscentrum $\mathbf{M}_G = \dot{\mathbf{H}}_G$ ger

$$\curvearrowright_G : Vd - H(h - b) + Nc = 0 \quad (3)$$

Accelerationen är given: $\ddot{x}_G = a$. Kraften H ges alltså direkt av ekv (1)

$$\underline{\underline{H = m(a + g \sin \beta)}} \quad (4)$$

Eliminera normalkraften N genom att lösa ut N ur (2) och sätta in i (3). Med ekvation (4) kan ekv (3) då skrivas

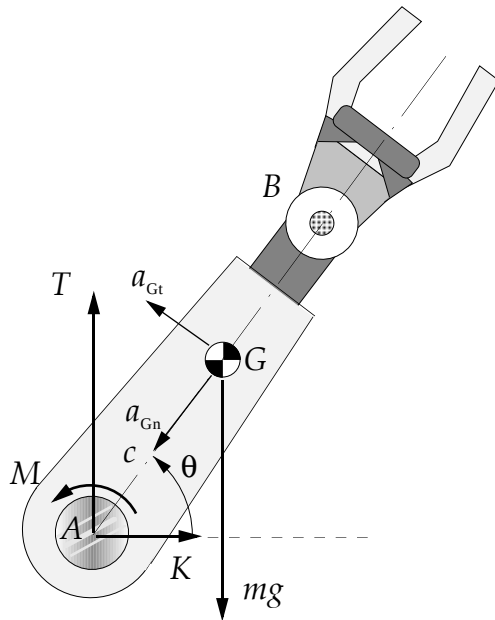
$$Vd - (h - b)(ma + mg \sin \beta) + (V + mg \cos \beta)c = 0 \quad (5)$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{V = \frac{m}{d + c} [(h - b)(a + g \sin \beta) - gc \cos \beta]}} \quad (6)$$

Anm.: Kraften V fås enklare med momentekvationen med avseende på punkten P , som är skärningspunkten mellan verkningslinjerna för krafterna H och N : $\mathbf{M}_P = \dot{\mathbf{H}}_P + \mathbf{r}_{PG} \times m\mathbf{a}_G$

$$\curvearrowright_P : V(c + d) + mg \cos \beta c - mg \sin \beta (h - b) = 0 + (h - b)ma$$

LP4.18



Armen AB roterar kring en fix axel vid A . Masscentrum G rör sig då i en cirkelbana med radien c så att accelerationen i det naturliga systemet kan skrivas

$$\mathbf{a}_G = c\ddot{\theta}\mathbf{e}_t + c\dot{\theta}^2\mathbf{e}_n \quad (1)$$

Kraftekvationen

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}_G \quad (2)$$

i komponentform blir då

$$\begin{aligned} \rightarrow : K &= m(-c\dot{\theta}^2 \cos\theta - c\ddot{\theta} \sin\theta) \\ \uparrow : T - mg &= m(-c\dot{\theta}^2 \sin\theta + c\ddot{\theta} \cos\theta) \end{aligned} \quad (3)$$

De sökta kraftkomponenterna är alltså

$$\begin{cases} K = m(-c\dot{\theta}^2 \cos\theta - c\ddot{\theta} \sin\theta) \\ T = mg + m(-c\dot{\theta}^2 \sin\theta + c\ddot{\theta} \cos\theta) \end{cases} \quad (4)$$

Momentekvationen kan skrivas

$$\mathbf{M}_A = \dot{\mathbf{H}}_G + \mathbf{r}_{AG} \times m\mathbf{a}_G \quad (5)$$

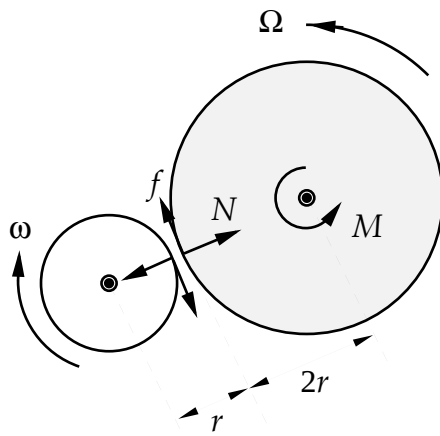
och z -komponenten blir

$$M - mgc \cos\theta = \frac{d}{dt}(I\dot{\theta}) + mc^2\ddot{\theta} \quad (6)$$

Det sökta kraftmomentet är då

$$\underline{\underline{M = mgc \cos\theta + (I + mc^2)\ddot{\theta}}} \quad (7)$$

LP 4.21



Frilägg hjulen och inför kontaktkraften mellan dem. Skriv upp momentekvationen för vardera hjulet med avseende på respektive rotationsaxel.

Tröghetsmomenten är mk^2 respektive $16mk^2$ för det lilla och stora hjulet.

Momentekvationen med avseende på en fix axel: $M_z = \dot{H}_z$ för det

stora hjulet:
$$M - 2rf = 16mk^2\dot{\Omega} \quad (1)$$

lilla hjulet:
$$rf = mk^2\dot{\omega} \quad (2)$$

Rullningsvillkoret är
$$2r\Omega = r\omega \quad (3)$$

$$\Rightarrow \omega = 2\Omega \quad (4)$$

Ekv (2) och (4) ger
$$rf = 2mk^2\dot{\Omega} \quad (5)$$

Insättning i (1) ger
$$M - 2rf = 8rf \quad (6)$$

$$M = 10rf \Rightarrow \underline{\underline{f = \frac{M}{10r}}} \quad (7)$$

LP 4.28

Förutom tyngdkraften mg finns det en kontaktkraft vid P . Snabbaste lösningen ges av momentekvationen $\mathbf{M}_P = \dot{\mathbf{H}}_{P\text{rel}} + \mathbf{r}_{PG} \times m\mathbf{a}_P$

$$\curvearrowright_P: -mg \cdot \frac{b}{2} = \frac{m(b^2 + h^2)}{3} \ddot{\theta} - \frac{h}{2} \cdot ma$$

Sätt $a = g/3$!

$$mg \cdot \left(\frac{h}{6} - \frac{b}{2} \right) = \frac{m(b^2 + h^2)}{3} \ddot{\theta}$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} = \frac{(h - 3b)g}{2(b^2 + h^2)}$$

Testa också en lösning med kraftekvationen $\mathbf{F} = m\mathbf{a}_G$ och momentekvationen $\mathbf{M}_G = \dot{\mathbf{H}}_G$!

LP 4.29

De yttre krafterna på rullen är trådkraften S , tyngdkraften mg samt en reaktionskraft vid axeln. Dessutom verkar friktionen vid axeln som motsvaras av kraftparsmomentet M_1 . På den hängande kroppen verkar trådkraften S och tyngdkraften m_1g .

Momentekvationen för trådrullen med avseende på centrum O , som är en fix punkt

$$\boxed{\mathbf{M}_O = \mathbf{H}_O} \Rightarrow \curvearrowright O : Sr - M_1 = I_G \cdot \ddot{\theta} \quad (1)$$

Kraftekvationen för den hängande kroppen

$$\boxed{\mathbf{F} = m\mathbf{a}_G} \Rightarrow \downarrow : m_1g - S = m_1\ddot{x} \quad (2)$$

De obekanta är S , $\ddot{x}$ och $\ddot{\theta}$. Vi behöver alltså en till ekvation. Den ges av kinematiken och motsvaras av rullningsvillkoret. Den hängande kroppens hastighet måste vara densamma som hastigheten i den punkt på rullen där tråden löper ut.

$$\dot{x} = r\dot{\theta} \Rightarrow \ddot{x} = r\ddot{\theta} \quad (3)$$

Dividera ekv (1) med r och addera sedan ekv (1) och (2)! Inför också det givna tröghetsmomentet $I_G = md^2$!

$$\Rightarrow m_1g - \frac{M_1}{r} = \frac{md^2}{r}\ddot{\theta} + m_1\ddot{x} \quad (4)$$

Om rullningsvillkoret insättes fås

$$m_1g - \frac{M_1}{r} = \left(\frac{md^2}{r^2} + m_1 \right) \ddot{x} \Rightarrow \ddot{x} = \frac{m_1gr^2 - M_1r}{m_1r^2 + md^2}$$

Denna acceleration är konstant. Vi kan bestämma hastighet som funktion av fallsträcka på samma sätt som vi gör för fritt fall.

Det är naturligtvis också möjligt att skriva upp momentekvationen med avseende på den fixa axeln för hela systemet. Då blir trådkraften en inre kraft och den hängande kroppen bidrar till rörelsemängdsmomentet:

$$\curvearrowright O : m_1gr - M_1 = \frac{d}{dt}(I_G\dot{\theta} + rm_1\dot{x})$$

Ekvationen överensstämmer med ekv (4)!

LP 4.41

Kontaktpunkten är momentancentrum så att om punkten O har farten v , så har kroppen vinkelhastigheten $\omega = v/R$ och stången hastigheten

$$(R + c)\omega = (R + c)v/R$$

Rörelsemängdsmomentet är i detta ögonblick

$$\mathbf{H}_O^{\text{tot}} = \mathbf{H}_O^{\text{cyl}} + \mathbf{H}_O^{\text{stång}}$$

O är cylinderns masscentrum, som kan kallas G :

$$\mathbf{H}_O^{\text{cyl}} = \mathbf{H}_G^{\text{cyl}} = \mathbf{H}_{G_{\text{rel}}}^{\text{cyl}}$$

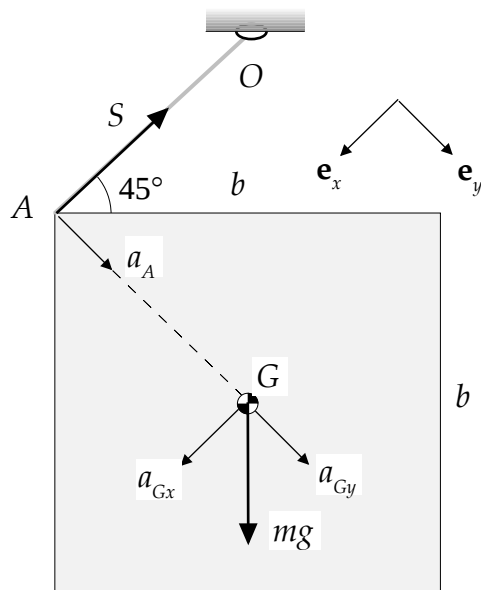
Det är alltså bara cylinderns rotation som bidrar till rörelsemängdsmomentet.

$$\left(\mathbf{H}_O^{\text{cyl}}\right)_z = I_O^{\text{cyl}} \omega = \frac{mR^2}{2} \cdot \frac{v}{R} = \frac{mRv}{2}$$

$$\left(\mathbf{H}_O^{\text{stång}}\right)_z = c \cdot \frac{m}{2} \cdot (R + c) \cdot \frac{v}{R}$$

$$\left(\mathbf{H}_O^{\text{tot}}\right)_z = c \cdot \frac{m}{2} \cdot (R + c) \cdot \frac{v}{R} + \frac{1}{2} mRv = \frac{mRv}{2} \left[\frac{c}{R} + \frac{c^2}{R^2} + 1 \right]$$

LP 4.42



Kroppen påverkas av trådkraften S och tyngdkraften mg . I det första ögonblicket efter trådbrottet har kroppen acceleration men ingen hastighet. Hörnet A startar en cirkelrörelse och har en acceleration i y -riktningen. Punkten G har en acceleration som ges av sambandsformeln, alltså samma acceleration som punkten A i y -riktningen och dessutom en acceleration i x -riktningen för att skivan börjar vrida sig.

Skivans vinkelacceleration bestäms av momentekvationen. Trådkraften kan sedan bestämmas med kraftekvationen.

Om skivans vinkelacceleration antas vara α , så är $a_{Gx} = \frac{b}{\sqrt{2}} \alpha$

Tröghetsmomentet med avseende på A fås med Steiners sats:

$$I_A = I_G + m \left(\frac{b}{\sqrt{2}} \right)^2 = \frac{mb^2}{6} + m \left(\frac{b}{\sqrt{2}} \right)^2 = \frac{2mb^2}{3} \quad (1)$$

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}_G \quad \mathbf{e}_x: \quad -S + \frac{mg}{\sqrt{2}} = ma_{Gx} \quad (2)$$

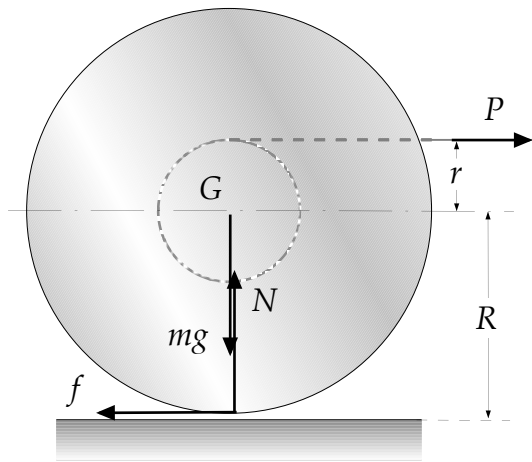
$$\mathbf{M}_G = \dot{\mathbf{H}}_G \quad (\curvearrowright A): \quad mg \cdot \frac{b}{2} = \frac{2mb^2}{3} \cdot \frac{a_{Gx}}{b/\sqrt{2}} \quad (3)$$

$$\text{Ekv (3) ger :} \quad a_{Gx} = \frac{3g}{4\sqrt{2}} \quad (4)$$

$$\text{Ekv (2) ger :} \quad S = \frac{mg}{\sqrt{2}} - m \frac{3g}{4\sqrt{2}}$$

$$\text{Resultatet är} \quad \underline{\underline{S = \frac{mg}{4\sqrt{2}}}}$$

LP 4.44



Frilägg trådrullen! Verkande krafter är dragkraften P , tyngdkraften mg och kontaktkraftens komponenter f och N . Men åt vilket håll är friktionskraften riktad? Antag först att planet är glatt. Om verkningslinjen för P då går nära masscentrum skulle trådrullen få en translation. Med friktion skulle då friktionskraften vara riktad åt vänster. Om verkningslinjen för P i stället går högt upp skulle trådrullen på ett glatt plan få en rotationsrörelse och vinkelhastigheten skulle kunna bli för stor jämfört med rullning utan glidning. Trådrullens kontaktpunkt skulle få en hastighet åt vänster. Friktionskraften skulle då vara riktad åt höger.

Vi antar rullning utan glidning och bestämmer f med dynamikens ekvationer. Antag en friktionskraft åt vänster. Ställ upp komponenterna av kraftekvationen och momentekvationen:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}_G \quad \rightarrow : P - f = m\ddot{x}_G \quad (1)$$

$$\uparrow : N - mg = 0 \quad (2)$$

$$\mathbf{M}_G = \dot{\mathbf{H}}_G \quad (\curvearrowright) : r \cdot P + R \cdot f = I_G \ddot{\theta} \quad (3)$$

$$\text{Rullningsvillkor:} \quad \ddot{x}_G = R\ddot{\theta} \quad (4)$$

Tröghetsmomentet är $I_G = md^2$. Dragkraften P är given.

Sätt in ekv (4) i ekv (1). Multiplicera ekv (1) med $-d^2/R$ och addera sedan ekvationerna (1) och (3). Man får:

$$P\left(r - \frac{d^2}{R}\right) + f\left(R + \frac{d^2}{R}\right) = 0$$

Resultatet är

$$f = \frac{d^2 - Rr}{R^2 + d^2} P$$

Friktionskraften f kan alltså bli negativ och då är den riktad åt höger.

LP 4.47

De yttre krafterna på hjulet är tyngdkraften mg , friktionskraften f , normalkraften N samt en kraft vid axeln från stången. Vi antar att denna kraft är horisontell. Då är normalkraften lika med tyngdkraften och friktionskraften är vid glidning

$$f = \mu N \quad \Rightarrow \quad f = \mu mg \quad (1)$$

Momentekvationen för hjulet med avseende på masscentrum G ,

$$\boxed{\mathbf{M}_G = \dot{\mathbf{H}}_G} \quad \Rightarrow \quad \curvearrowright_G : f \cdot r = I \cdot \ddot{\theta} \quad (2)$$

Från början är vinkelhastigheten noll. Hjulet slirar men har en vinkelacceleration ända tills det rullar utan att glida. Vinkelhastigheten ökar under denna tid från noll till det värde som ges av rullningsvillkoret:

$$v = r\dot{\theta}_1 \quad (3)$$

Tidsintegrering av ekvation (2) under det tidsintervall i vilket hjulet slirar ger

$$\mu mgr \cdot t_1 = I \cdot \dot{\theta}_1 - 0 \quad (4)$$

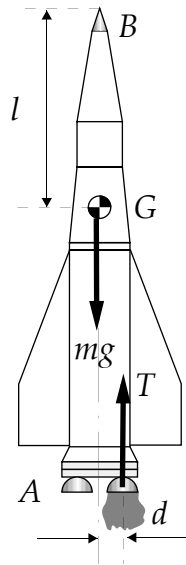
Men bilen går med konstant hastighet under denna tid. Förflyttningen för den och för hjulet är

$$d = vt_1 \quad (5)$$

Sätt nu in (3) och (5) i (4)!

$$\begin{aligned} \mu mgr \cdot \frac{d}{v} &= I \cdot \frac{v}{r} \\ \Rightarrow \quad \mu &= \frac{Iv^2}{mgdr^2} \end{aligned}$$

LP 4.50



Vi bestämmer först masscentrums acceleration med kraftekvationen

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}_G$$

och vinkelaccelerationen med momentekvationen med avseende på masscentrum

$$\mathbf{M}_G = \dot{\mathbf{H}}_G$$

Att bestämma accelerationen hos en annan punkt B blir sedan ett kinematiskt problem.

I komponentform fås ekvationerna

$$\rightarrow : 0 = m\ddot{x}_G \quad (1)$$

$$\uparrow : T - mg = m\ddot{y}_G \quad (2)$$

$$\curvearrowright_G : Td = I_G\ddot{\theta} \quad (3)$$

Accelerationen hos punkten B fås med sambandsformeln

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_G + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}_{GB} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{GB})$$

I komponentform fås

$$\rightarrow : a_{Bx} = \ddot{x}_G - l\ddot{\theta} + 0 \quad (4)$$

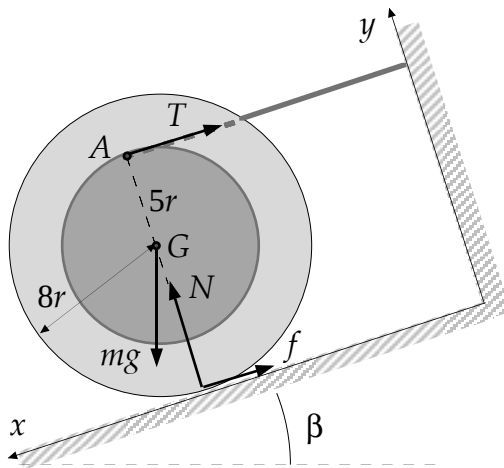
$$\uparrow : a_{By} = \ddot{y}_G + 0 - l\dot{\theta}^2 \quad (5)$$

I första ögonblicket är vinkelhastigheten $\dot{\theta} = 0$. Vinkelaccelerationen $\ddot{\theta}$ och masscentrums accelerationskomponenter $\ddot{x}_G$ och $\ddot{y}_G$ ges av ekvationerna (1) - (3). Insättning i (4) och (5) ger accelerationens komponenter

$$a_{Bx} = -\frac{Tld}{I_G}$$

$$a_{By} = \frac{T}{m} - g$$

Lösning 4.59



De yttre krafterna är tyngdkraft, kontaktkraft och trådkraft. Kontaktkraften delas upp i normalkraft och friktionskraft. Vi har alltså tre obekanta krafter och dessutom ska vi bestämma accelerationen.

Momentekvationen

$$\mathbf{M}_G = \dot{\mathbf{H}}_G$$

tillsammans med kraftekvationen

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}_G$$

ger i detta plana fall tre ekvationer:

$$5r T - 8r f = I_C \ddot{\theta} \quad (1)$$

$$mg \sin \beta - f - T = m\ddot{x}_G \quad (2)$$

$$N - mg \cos \beta = 0 \quad (3)$$

Kinematik: A är momentancentrum eftersom trådens ände saknar hastighet. Trådrullen ser i varje ögonblick ut att rotera kring A.

$$\dot{x}_G = 5r \dot{\theta} \quad \Rightarrow \quad \ddot{x}_G = 5r \ddot{\theta} \quad (4)$$

Glidning, dvs fullt utbildad friktion innebär att

$$f = \mu N \quad (5)$$

Dividera ekv (1) med $5r$ och addera ekv (2). På detta sätt elimineras T .

$$mg \sin \beta - \frac{13}{5} f = \frac{I_C}{5r} \ddot{\theta} + m\ddot{x}_G \quad (6)$$

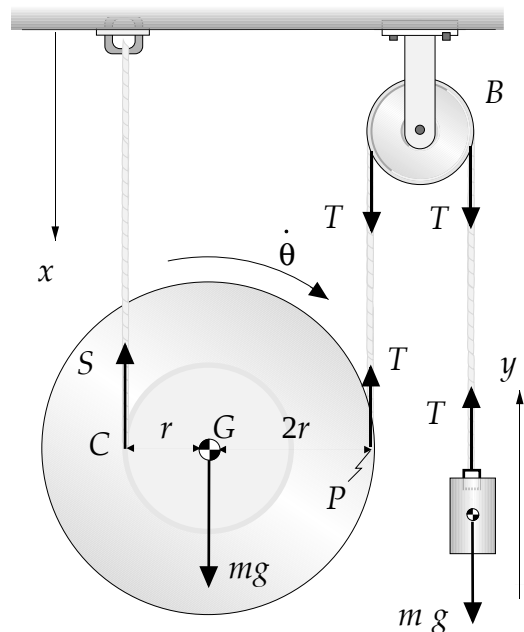
Insättning av ekv (3), (4) och (5) samt tröghetsmomentet för en cylinder ger

$$mg \sin \beta - \frac{13}{5} \mu mg \cos \beta = \frac{m(8r)^2}{2 \cdot 5r} \cdot \frac{\ddot{x}_G}{5r} + m\ddot{x}_G \quad (7)$$

$$g \sin \beta - \frac{13}{5} \mu g \cos \beta = \frac{114}{50} \ddot{x}_G \quad (8)$$

$$\underline{\underline{\ddot{x}_G = \frac{25g}{57} \left(\sin \beta - \frac{13}{5} \mu \cos \beta \right)}}$$

LP 4.63



Vinkelaccelerationen söks. Den kan bestämmas med hjälp av kraft- och momentekvationerna för systemets delar. Frilägg först kropparna och inför krafterna i figuren! Det är viktigt att inse att trådkraften T inte är lika med tyngden m_1g när systemet har acceleration!

Kraftekvationen $\mathbf{F} = m\mathbf{a}_G$ för rulle och tyngd ger ekvationerna

$$\downarrow : mg - S - T = m\ddot{x}_G \quad (1)$$

$$\uparrow : T - m_1g = m_1\ddot{y} \quad (2)$$

Momentekvationen $\mathbf{M}_G = \dot{\mathbf{H}}_G$ för rullen med avseende på masscentrum ger

$$\curvearrowright : Sr - T \cdot 2r = I\ddot{\theta} \quad (3)$$

Ekvationerna innehåller fem obekanta: S , T , $\ddot{x}$, $\ddot{\theta}$ och $\ddot{y}$. Vi måste nu utreda kinematiken och bestämma sambandet mellan accelerationerna. Eftersom den vänstra trådens vertikala del har hastigheten noll måste punkten C vara momentancentrum för rullen. Detta ger

$$\dot{x}_G = r\dot{\theta}; \quad \dot{x}_P = 3r\dot{\theta} \quad (4)$$

Tyngden måste ha samma fart som punkten P på rullen

$$\dot{y} = 3r\dot{\theta} \quad (5)$$

Tidsderivera nu sambanden (4) och (5) och sätt in i ekvationerna (1)-(3). Dividera ekvation (3) med r för att få ekvationer med lika dimension!

$$mg - S - T = mr\ddot{\theta} \quad (1')$$

$$T - m_1g = 3m_1r\ddot{\theta} \quad (2')$$

$$S - 2T = \frac{I}{r}\ddot{\theta} \quad (3')$$

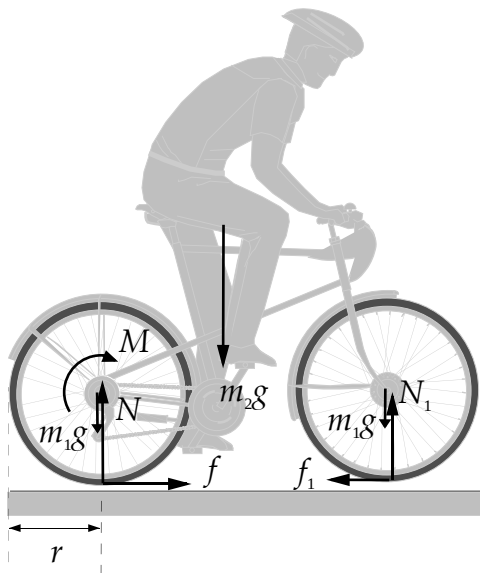
Eliminera trådkrafterna genom att multiplicera ekv (2') med 3 och addera alla tre ekvationerna!. Resultatet blir

$$mg - 3m_1g = \left(mr + \frac{I}{r} + 9m_1r \right) \ddot{\theta}$$

eller

$$\ddot{\theta} = \frac{(m - 3m_1)gr}{(m + 9m_1)r^2 + I}$$

LP 4.64



De yttre krafterna på hela systemet är tyngdkrafter och kontaktkrafter. Om bakhjulet friläggs så blir det givna kraftmomentet M ett yttre kraftmoment. Reaktionskraften på bakhjulets centrum från resten av cykeln blir också en yttre kraft men kan undvikas i räkningarna genom att utnyttja momentekvationen med avseende på just hjulets centrum.

Kraftekvationen $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ för hela systemet ger i rörelseriktningen

$$\text{Hela systemet:} \quad \rightarrow: f - f_1 = (m_2 + 2m_1)\ddot{x}_G \quad (1)$$

Momentekvationen $\mathbf{M}_G = \dot{\mathbf{H}}_G$ med avseende en axel genom varje hjuls masscentrum ger med positiv riktning medurs

$$\text{Framhjul:} \quad \curvearrowright: r f_1 = m_1 r^2 \ddot{\theta} \quad (2)$$

$$\text{Bakhjul:} \quad \curvearrowright: M - r f = m_1 r^2 \ddot{\theta} \quad (3)$$

$$\text{Rullningsvillkoret är} \quad \ddot{x}_G = r \ddot{\theta} \quad (4)$$

Kraften f_1 kan elimineras genom att sätta in ekv (2) i (1). Detta ger ett uttryck på kraften f . Om rullningsvillkoret också utnyttjas för att eliminera $\ddot{\theta}$, så ger en insättning i ekv (3)

$$M - r[(m_2 + 2m_1)\ddot{x}_G + m_1\ddot{x}_G] = m_1 r^2 \frac{\ddot{x}_G}{r} \quad (5)$$

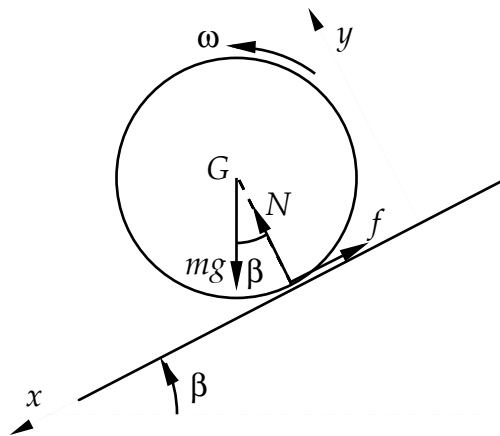
$$M = r(m_2 + 4m_1)\ddot{x}_G \quad (6)$$

$$\ddot{x}_G = \frac{M}{r(m_2 + 4m_1)} \quad (7)$$

Denna acceleration är konstant vilket efter tidsintegration ger resultatet

$$\underline{\underline{\dot{x}_G = \frac{M}{r(m_2 + 4m_1)} t}}$$

LP 4.66



Positiv riktning för ω och $\dot{\omega}$ ($\dot{\theta}$ och $\ddot{\theta}$) är markerad i figur. Kraftekvationen och momentekvationen med avseende på masscentrum G ger

$$\begin{cases} \mathbf{F} = m\mathbf{a}_G \\ \mathbf{M}_G = \dot{\mathbf{H}}_G \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_x = m\ddot{x}_G \\ F_y = m\ddot{y}_G \\ M_G = I_G\ddot{\theta} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} mg \sin \beta - f = m\ddot{x}_G & (1) \\ N - mg \cos \beta = m\ddot{y}_G & (2) \\ fr = I\ddot{\theta} & (3) \end{cases}$$

a) Antag först att μ är tillräckligt stort för att hjulet ska rulla utan att glida. Då ger kinematiken sambanden

$$\begin{cases} \ddot{y}_G = 0 & (4) \\ \ddot{x}_G = r\ddot{\theta} & (5) \end{cases}$$

Ekv (4) och (2) ger normalkraften $N = mg \cos \beta$ (6)

Ekv (3) och (5) i (1) ger $mg \sin \beta - \frac{I}{r^2} \ddot{x}_G = m\ddot{x}_G$ (7)

$$\ddot{x}_G = \frac{mr^2}{I + mr^2} g \sin \beta \quad (8)$$

b) Men är antagandet rullning utan glidning riktigt? Ekv (3) ger friktionskraften

$$f = \frac{I}{r^2} \ddot{x}_G \Rightarrow f = \frac{I}{I + mr^2} mg \sin \beta \quad (9)$$

och friktionsvillkoret $\frac{f}{N} < \mu$

betyder att $\mu > \frac{I}{I + mr^2} \tan \beta$ (10)

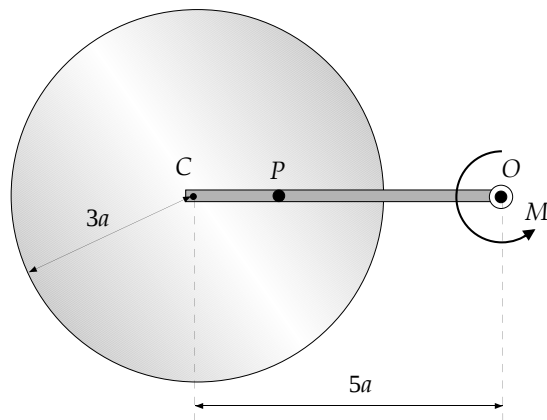
Om friktionstalet är mindre än detta värde inträffar glidning. Då är i stället friktionskraften

$$f = \mu N \Rightarrow f = \mu mg \cos \beta \quad (11)$$

och ekvation (1) ger

accelerationen $\ddot{x}_G = g(\sin \beta - \mu \cos \beta)$

Lösning 4.70



a) Med låsskruven nerskruvad mot cylindern roterar hela systemet cylinder plus stativ som en enda stel kropp kring axeln O (z -axeln).

Momentekvationens z -komponent

$$M_z = \dot{H}_z \quad (1)$$

ger

$$M = \frac{d}{dt}(I_O \dot{\theta}) \quad (2)$$

där I_O ges av Steiners sats för tröghetsmoment:

$$I_O = I_C + m(5a)^2 = \frac{m(3a)^2}{2} + 25ma^2 = \frac{59}{2}ma^2 \quad (3)$$

Insättning i momentekvationen (2) ger

$$M = \frac{59}{2}ma^2 \ddot{\theta} \quad (4)$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} = \frac{2M}{59ma^2} \quad (5)$$

b) Om låsskruven lossas har cylindern ingen vinkelacceleration eftersom inget kraftmoment verkar kring axeln O . Rörelsemängdsmomentet

$$\mathbf{H}_O = \mathbf{H}_C + \mathbf{r}_{OC} \times m\mathbf{v}_C \quad (6)$$

har en z -komponent som kan skrivas

$$H_O = \text{konst} + (5a)m(5a)\dot{\theta} \quad (7)$$

Konstanten kommer av att cylindern kan rotera kring sin egen axel med en konstant vinkelhastighet.

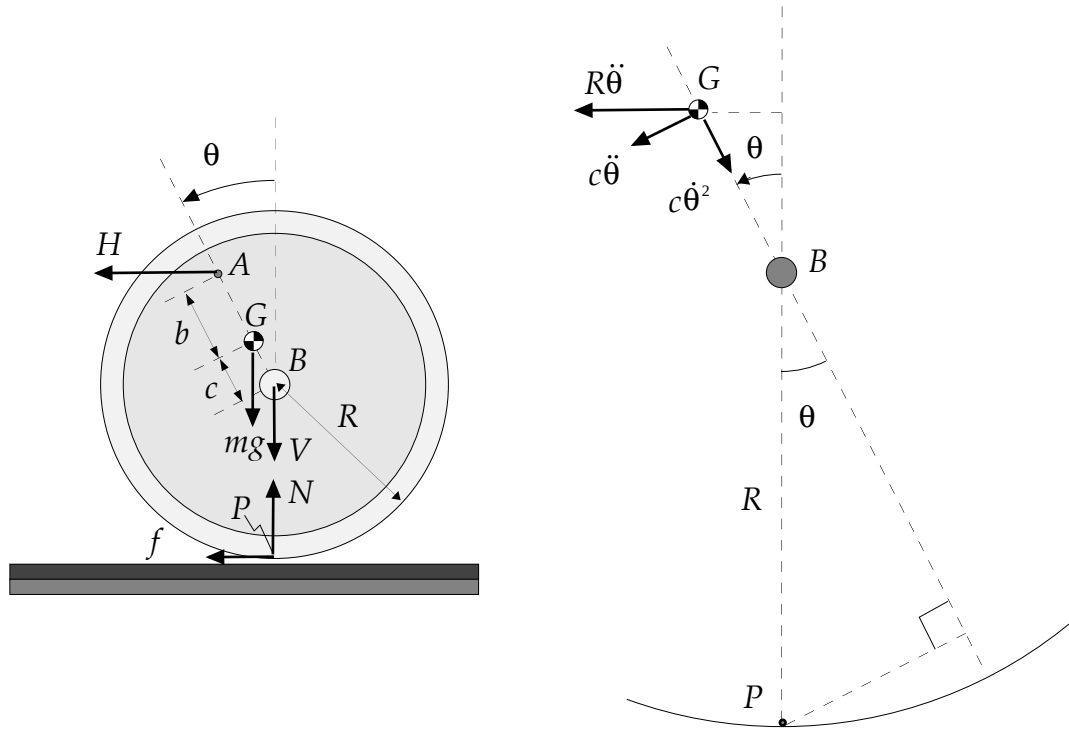
Momentekvationen

$$M = \frac{d}{dt}(\text{konst} + 25ma^2\dot{\theta}) \quad (8)$$

ger då resultatet

$$\ddot{\theta} = \frac{M}{25ma^2}$$

LP 4.74



Vi frilägger hjulet och inför kontaktkraftskomponenterna N och f i kontaktpunkten P . Dessa krafter kan elimineras direkt genom att välja momentekvationen med avseende på kontaktpunkten P :

$$\mathbf{M}_P = \dot{\mathbf{H}}_G + \mathbf{r}_{PG} \times m\mathbf{a}_G \quad (1)$$

Innan vi skriver z -komponenten av denna ekvation utreder vi kinematiken, speciellt masscentrums acceleration $\mathbf{a}_G$.

Enligt sambandsformeln består den av tre komponenter och kan skrivas

$$\mathbf{a}_G = \mathbf{a}_B + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{BG} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{BG}) \quad (2)$$

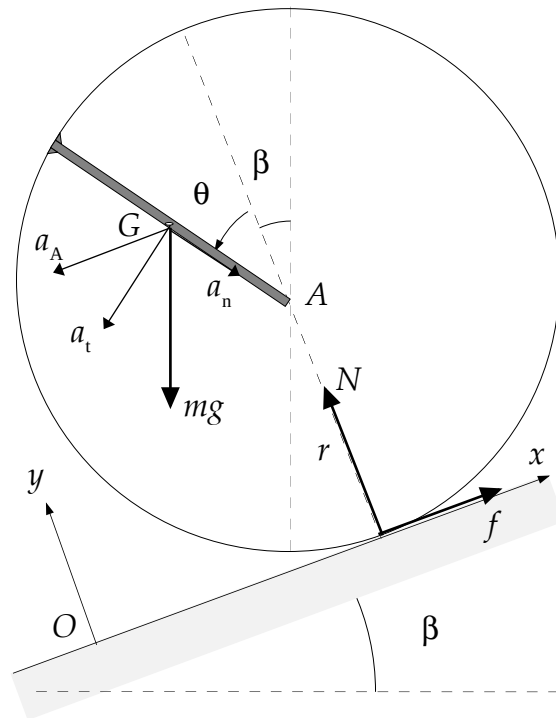
Dessa tre komponenter är utritade i den högra figuren och ger var och en ett bidrag till kryssprodukten i (1). z -komponenten av ekvationen (1) blir då

$$H[R + (b + c)\cos\theta] + mgc\sin\theta = I\ddot{\theta} + m[(c + R\cos\theta)c\ddot{\theta} + (R + c\cos\theta)R\ddot{\theta} - R\sin\theta c\dot{\theta}^2] \quad (3)$$

Vi löser ut vinkelaccelerationen och får resultatet

$$\ddot{\theta} = \frac{H[R + (b + c)\cos\theta] + mgc\sin\theta + mRc\sin\theta\omega^2}{I + m(R^2 + c^2 + 2Rc\cos\theta)}$$

LP 4.75



De enda yttre krafter som verkar är tyngdkraften och kontaktkraften. Den senare kan delas upp i friktionskraft och normalkraft. Kraftekvationen eller Eulers första lag

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}_G \quad (1)$$

bör då ge friktionskraften och normalkraften, om masscentrums acceleration $\mathbf{a}_G$ är känd. Denna består enligt sambandsformeln för accelerationer av accelerationen för centrumpunkten A plus accelerationskomposanterna som associeras med cirkelrörelsen kring A :

$$\mathbf{a}_G = \mathbf{a}_A + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}_{AG} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{AG}) \quad (2)$$

De tre termerna i högerledet är markerade i figuren och kallas a_A , a_t och a_n (tangential- respektive normalkomponenten).

Inför ett fixt koordinatsystem $Oxyz$ enligt figuren. Inför nu beteckningen $c = r/2$ för avståndet mellan A och G . Kroppens vinkelhastighet är $\boldsymbol{\omega} = \dot{\theta}\mathbf{e}_z$.

Om cirkelringen rullar på det lutande planet är kontaktpunkten i cirkelringen momentancentrum. Hastigheten för centrumpunkten A är då

$$\mathbf{v}_A = -r\dot{\theta}\mathbf{e}_x \quad (3)$$

Accelerationen blir

$$\mathbf{a}_A = -r\ddot{\theta}\mathbf{e}_x \quad (4)$$

Masscentrums acceleration (2) kan då skrivas

$$\mathbf{a}_G = -r\ddot{\theta}\mathbf{e}_x + c\ddot{\theta}\mathbf{e}_t + c\dot{\theta}^2\mathbf{e}_n \quad (5)$$

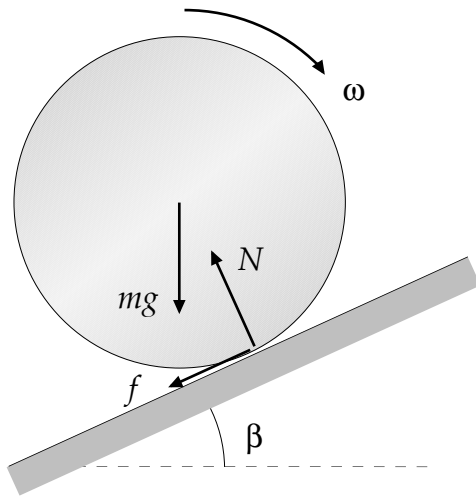
Kraftekvationens x - och y -komponenter blir

$$\begin{aligned} f - mg \sin \beta &= m(-r\ddot{\theta} - c\ddot{\theta} \cos \theta + c\dot{\theta}^2 \sin \theta) \\ N - mg \cos \beta &= m(-c\ddot{\theta} \sin \theta - c\dot{\theta}^2 \cos \theta) \end{aligned} \quad (6)$$

och resultatet följer omedelbart

$$\begin{aligned} f &= mg \sin \beta + mr \left[-\left(1 + \frac{1}{2} \cos \theta\right) \ddot{\theta} + \frac{1}{2} \sin \theta \dot{\theta}^2 \right] \\ N &= mg \cos \beta - m \frac{r}{2} (\sin \theta \ddot{\theta} + \cos \theta \dot{\theta}^2) \end{aligned}$$

LP4.78



De enda krafter som påverkar cylindern är tyngdkraft och kontaktkraft. Om normalkraften betecknas N så kan friktionskraften under den första delen av rörelsen, då cylindern glider, skrivas μN . Lagen om masscentrums rörelse $\mathbf{F} = m\mathbf{a}_G$ och momentekvationen med avseende på masscentrum $\mathbf{M}_G = \dot{\mathbf{H}}_G$ ger för den första delen av rörelsen:

$$\mu N - mg \sin \beta = m\ddot{x} \quad (1)$$

$$N - mg \cos \beta = 0 \quad (2)$$

$$-\mu N r = \frac{mr^2}{2} \ddot{\theta} \quad (3)$$

Accelerationen och vinkelaccelerationen är alltså konstanta:

$$\ddot{x} = (\mu \cos \beta - \sin \beta)g \quad (4)$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{2\mu g}{r} \cos \beta \quad (5)$$

Vid en viss tidpunkt $t = t_1$ inträffar rullning utan glidning. Då kan rullningsvillkoret $\dot{x} = r\dot{\theta}$ skrivas

$$(\mu \cos \beta - \sin \beta)g t_1 = -2\mu g t_1 \cos \beta + r\omega \quad (6)$$

$$t_1 = \frac{r\omega}{(3\mu \cos \beta - \sin \beta)g} \quad (7)$$

och motsvarande sträcka längs planet är (eftersom accelerationen är konstant)

$$d_1 = \frac{1}{2} \ddot{x} t_1^2 = \frac{r^2 \omega^2 (\mu \cos \beta - \sin \beta)}{2g (3\mu \cos \beta - \sin \beta)^2} \quad (8)$$

Efter denna tidpunkt gäller rullning utan glidning och då bevaras den mekaniska energin: $T_1 + V_1 = T_2 + V_2$, där $T_2 = 0$ i vändläget. Insättning ger

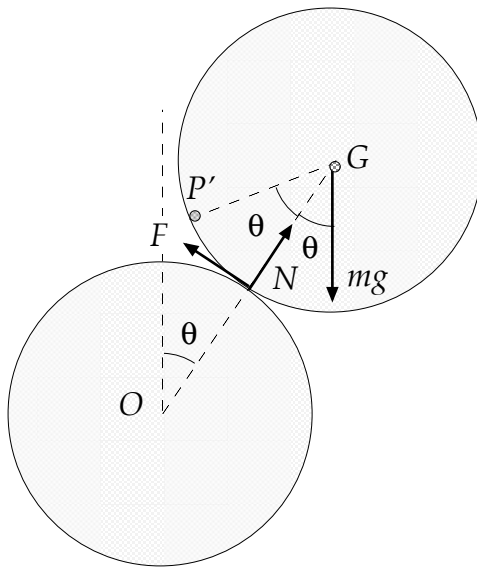
$$\frac{1}{2} \frac{3mr^2}{2} \dot{\theta}_1^2 = mgd_2 \sin \beta \quad (9)$$

$$d_2 = \frac{3r^2 \omega^2 (\mu \cos \beta - \sin \beta)^2}{4g \sin \beta (3\mu \cos \beta - \sin \beta)^2} \quad (10)$$

Total tillryggalagd sträcka längs planet blir då

$$d_1 + d_2 = \frac{r^2 \omega^2 (\mu \cos \beta - \sin \beta)}{4g \sin \beta (3\mu \cos \beta - \sin \beta)}$$

LP 4.88



Resultatet bör ges av friktionsvillkoret, varför uppgiften består i att bestämma friktions- och normalkraft. Rullningsvillkoret ger att klotets absoluta vinkelhastighet är $2\dot{\theta}$. Detta inses antingen direkt ur figuren, eftersom punkterna P och P' sammanföll vid tiden $t = 0$ eller också tecknas hastigheten för klotets centrum G på två sätt: cirkelrörelse kring O respektive med kontaktpunkten som momentancentrum. $2r\dot{\theta} = r\omega$

Momentekvationen med avseende masscentrum $\mathbf{M}_G = \dot{\mathbf{H}}_G$ har z -komponenten $M_z = \frac{d}{dt}(I_G\omega)$ vilket här blir $Fr = \frac{2}{5}mr^2 2\ddot{\theta}$ (1)

Lagen om masscentrums rörelse $\mathbf{F} = m\mathbf{a}_G$ i cylinderkoordinater ger, eftersom masscentrum beskriver en cirkelrörelse med radien $2r$ och vinkelhastigheten $\dot{\theta}$:

$$m(0 - 2r\dot{\theta}^2) = N - mg \cos \theta \quad (2)$$

$$m(2r\ddot{\theta} + 0) = mg \sin \theta - F \quad (3)$$

Om F elimineras ur (1) och (3) fås $\frac{14}{5}mr\ddot{\theta} = mg \sin \theta$ (4)

(vilket är momentekvationen med avseende på kontaktpunkten!)

och F kan med hjälp av (1) skrivas $F = \frac{2}{7}mg \sin \theta$ (5)

Bilda en förstaintegral till rörelseekvationen (4) och utnyttja begynnelsevillkoret!

$$\frac{14}{5}mr\ddot{\theta} = mg \sin \theta$$

$$\frac{1}{2} \frac{14}{5}mr(\dot{\theta}^2 - 0) = -mg(\cos \theta - 1)$$

$$mr\dot{\theta}^2 = \frac{5}{7}mg(1 - \cos \theta)$$

vilket insatt i ekv (2) ger normalkraften $N = mg(\frac{17}{7}\cos \theta - \frac{10}{7})$ (6)

Friktionsvillkoret $\frac{|\mathbf{F}|}{|\mathbf{N}|} \leq \mu$ ger nu för gränsfallet glidning

$$\frac{2 \sin \theta_1}{17 \cos \theta_1 - 10} = \mu$$

LP 4.95

Kraftmomentet och tyngdkraften gör arbeten så att den kinetiska energin ökar.

Lagen om arbetet $U = T - T_0$

ger
$$M\theta - mg \frac{b}{\sqrt{2}} \left[\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) - \sin\frac{\pi}{4} \right] = \frac{1}{2} \frac{2mb^2}{3} \dot{\theta}^2 \quad (1)$$

$$M\theta - mg \frac{b}{\sqrt{2}} \left[\sin\theta \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \cos\theta \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right] = \frac{mb^2}{3} \dot{\theta}^2 \quad (2)$$

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{3}{mb^2} \left[M\theta - mg \frac{b}{2} (\sin\theta + \cos\theta - 1) \right]}$$

LP 4.107

Betrakta det första läget! Masscentrum bestäms först. Låt origo ligga i hjulets centrum! Inför en vertikal y -axel!

$$y_G = \frac{m \cdot 0 + 2m \cdot 0 + m(r/2)}{4m} = \frac{r}{8} \quad (1)$$

Tröghetsmomentet bestäms med Steiners sats. Låt A vara kontaktpunkten!

$$I_O = mr^2 + 3 \frac{mr^2}{3} = 2mr^2 \quad (2)$$

$$I_G = 2mr^2 - 4m \left(\frac{r}{8} \right)^2 = \frac{31}{16} mr^2 \quad (3)$$

$$I_A = I_G + 4m \left(\frac{9r}{8} \right)^2 = \frac{31}{16} mr^2 + \frac{81}{16} mr^2 = 7mr^2 \quad (4)$$

a) Kinetiska energin

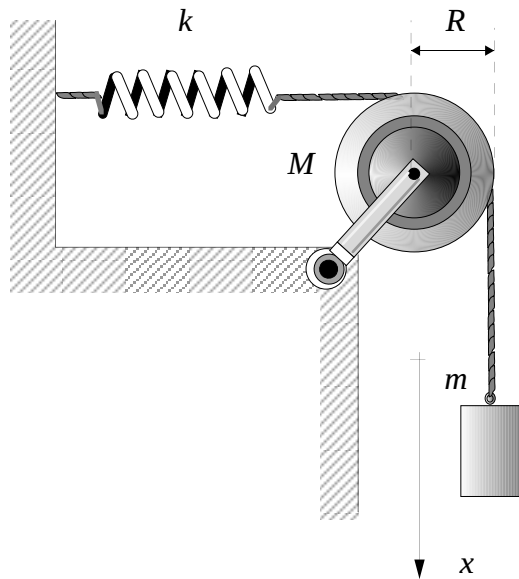
$$T = \frac{1}{2} I_A \omega_A^2 = \frac{7}{2} mr^2 \omega_A^2 \quad (5)$$

b) Låt B vara den nya kontaktpunkten!

$$I_B = I_G + 4m \cdot \frac{65}{64} r^2 = \frac{96}{16} mr^2 \quad (6)$$

Kinetiska energin
$$T = \frac{1}{2} I_B \omega_B^2 = 3mr^2 \omega_B^2$$

LP 4.142



Begynnelsevillkoret är

$$t = 0 \quad \begin{cases} x = 0 \\ \dot{x} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

eftersom rörelsen startar från vila då fjädern är oförlängd.

Eftersom tyngdkraften och fjäderkraften är konservativa bevaras den mekaniska energin:

$$T + V = T_0 + V_0 \quad (2)$$

$$\frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 - mgx + \frac{1}{2} kx^2 = 0 \quad (3)$$

Men $\dot{x} = R\omega$ och $I = cMR^2$.

Insättning i energiekvationen ger

$$\frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} cMR^2 \omega^2 - mgx + \frac{1}{2} kx^2 = 0 \quad (4)$$

$$\frac{1}{2} (m + cM) \dot{x}^2 = mgx - \frac{1}{2} kx^2 \quad (5)$$

$$\Rightarrow \dot{x} = \pm \sqrt{\frac{2mgx - kx^2}{m + cM}} \quad (6)$$

$$\text{Vändläge fås för } \dot{x} = 0 \quad \text{dvs för } x = 0 \text{ och } x = \underline{\underline{\frac{2mg}{k}}} \quad (7)$$

b) Om energiekvationen tidsderiveras fås

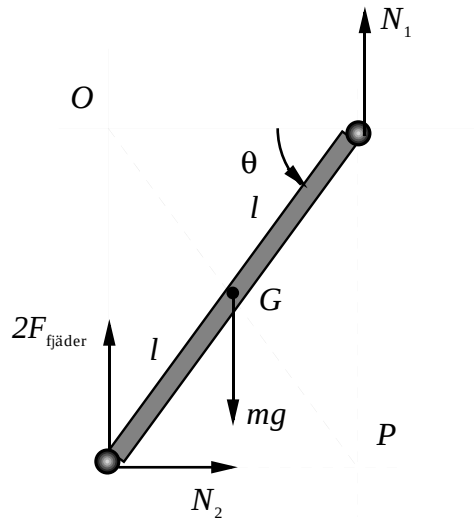
$$(m + cM) \dot{x} \ddot{x} = mg \dot{x} - kx \dot{x} \quad (8)$$

$$\Rightarrow (m + cM) \ddot{x} = mg - kx \quad (9)$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m + cM} x = \frac{mg}{m + cM} \quad (10)$$

vilket är den sökta rörelseekvationen.

LP4.143



I figuren är avståndet $l = 2a$

För ett godtyckligt läge θ är underkanten A's förflyttning

$$4a \sin \theta - a \quad (1)$$

och fjäderförlängningen

$$\frac{1}{2}(4a \sin \theta - a) \quad (2)$$

Den potentiella energin i varje fjäder är då

$$V_{fjäder} = \frac{1}{2}k \left[\frac{1}{2}(4a \sin \theta - a) \right]^2 \quad (3)$$

Punkten P är momentancentrum varför kinetiska energin kan skrivas

$$T = \frac{1}{2}I_P \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{m(4a)^2}{12} + m(2a)^2 \right) \dot{\theta}^2 = \frac{8}{3}ma^2 \dot{\theta}^2 \quad (4)$$

Lagen om den mekaniska energins bevarande

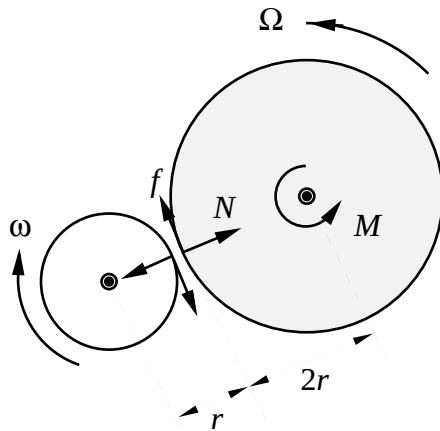
$$T + V = T_0 + V_0$$

ger då

$$\frac{8}{3}ma^2 \dot{\theta}^2 + k \frac{a^2}{4} (4 \sin \theta - 1)^2 - mg \left(2a \sin \theta - \frac{a}{2} \right) = 0 \quad (5)$$

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{3g}{8a} \left(2 \sin \theta - \frac{1}{2} \right) - \frac{3k}{32m} (4 \sin \theta - 1)^2}$$

LP 4.144



Antingen inför man kontaktkraften mellan hjulen och skriver upp momentekvationen för vardera hjulet med avseende på respektive rotationsaxel eller också betraktar man hela systemet och ställer upp lagen om effekten. Här väljs den senare metoden.

Den totala kinetiska energin är summan av det stora och lilla hjulets rotationsenergi. Effekten kan för varje kropp i plan rörelse allmänt skrivas

$$P = \mathbf{M}_G \cdot \boldsymbol{\omega} + \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}_G \quad (1)$$

Här gäller för vardera hjulet att masscentrums hastighet är noll. Dessutom är kontaktkrafternas (f och N i figuren) totala effekt noll vid rullning. Det beror på att vid kontaktstället är kontaktpunkternas hastigheter lika vid rullning, medan kontaktkrafterna är motsatt riktade.

Lagen om effekten $P = \dot{T}$ för hela systemet ger alltså

$$M\Omega = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} I^{\text{stora}} \Omega^2 + \frac{1}{2} I^{\text{lilla}} \omega^2 \right) \quad (2)$$

$$M\Omega = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \underset{I_{\text{stora}}}{4m_1 k_1^2} \Omega^2 + \frac{1}{2} \underset{I_{\text{lilla}}}{m k^2} \omega^2 \right) \quad (3)$$

$$\Rightarrow M\Omega = m k^2 (16\Omega\dot{\Omega} + \omega\dot{\omega}) \quad (4)$$

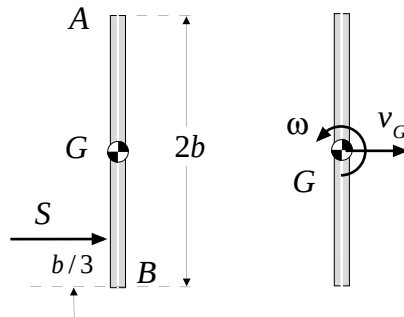
Rullningsvillkoret är

$$2r\Omega = r\omega \quad (5)$$

$$\Rightarrow M\Omega = m k^2 (16\Omega\dot{\Omega} + 4\Omega\dot{\Omega}) \quad (6)$$

$$M = m k^2 20\dot{\Omega} \Rightarrow \underline{\underline{\dot{\omega} = \frac{M}{10mk^2}}}$$

LP 4.181



För stöten gäller stötipulslagen

$$\mathbf{S} = m\mathbf{v}_{Ge} - m\mathbf{v}_{Gf}$$

och stötipulsmomentlagen

$$\mathbf{r} \times \mathbf{S} = \mathbf{H}_e - \mathbf{H}_f$$

Index e och f står för efter och före stöt. Komponentekvationerna blir

$$\rightarrow: S = mv_G \quad (1)$$

$$\curvearrowright_G: \frac{2b}{3} \cdot S = \frac{m(2b)^2}{12} \omega \quad (2)$$

Alltså är

$$v_G = \frac{S}{m} \quad (3)$$

$$\omega = \frac{2S}{mb} \quad (4)$$

Sambandsformeln för hastigheter ger nu hastigheten i A

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_G + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{GA} \quad (5)$$

Komponentekvationen blir

$$v_A = \frac{S}{m} - \left(\frac{2S}{mb} \right) \cdot b \quad (6)$$

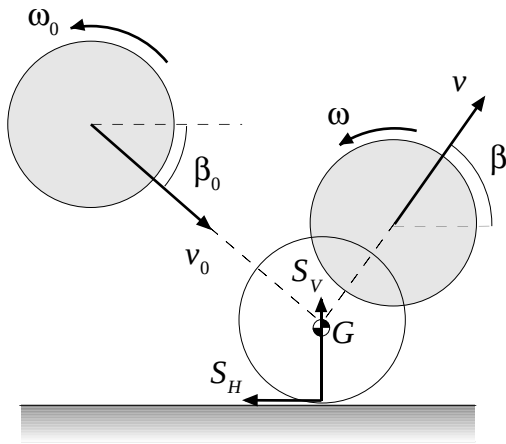
Resultatet är

$$v_A = -\frac{S}{m}$$

Hastigheten för A är

$$\frac{S}{m} \quad \text{och den är riktad åt vänster}$$

LP 4.186



För stöten gäller stötimpulslagen

$$\mathbf{S} = m\mathbf{v}_{Ge} - m\mathbf{v}_{Gf}$$

och stötimpulsmomentlagen

$$\mathbf{r} \times \mathbf{S} = \mathbf{H}_e - \mathbf{H}_f$$

Index e och f står för efter och före stöt. Komponentekvationerna blir

$$\uparrow : \quad S_V = mv \sin \beta - (-mv_0 \sin \beta_0) \quad (1)$$

$$\rightarrow : \quad -S_H = mv \cos \beta - mv_0 \cos \beta_0 \quad (2)$$

$$\curvearrowright G : \quad -R \cdot S_H = I\omega - I\omega_0 \quad (3)$$

Studskalet

$$e = -\frac{v \sin \beta - 0}{-v_0 \sin \beta_0 - 0} \quad (4)$$

Friktionsvillkoret ger

$$S_H = \mu S_V \quad (5)$$

Ekv (4) och (1) ger

$$\underline{\underline{S_V = mv_0 \sin \beta_0 (1 + e)}} \quad (6)$$

Då ger ekv (5)

$$\underline{\underline{S_H = \mu mv_0 \sin \beta_0 (1 + e)}} \quad (7)$$

Vi skriver ekv (2) och ekv (4) en gång till, med utnyttjande av (7):

$$v \sin \beta = e v_0 \sin \beta_0 \quad (8)$$

$$v \cos \beta = v_0 \cos \beta_0 - \mu v_0 \sin \beta_0 (1 + e) \quad (9)$$

Division ger

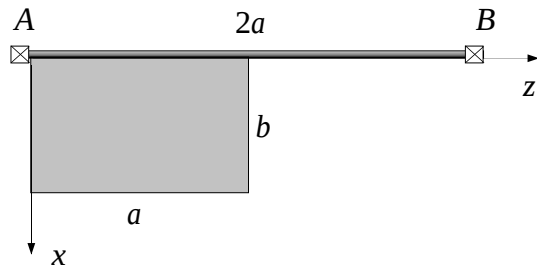
$$\tan \beta = \frac{e \sin \beta_0}{\cos \beta_0 - \mu \sin \beta_0 (1 + e)}$$

eller

$$\underline{\underline{\tan \beta = \frac{e \tan \beta_0}{1 - \mu \tan \beta_0 (1 + e)}}}$$

$$\tan \beta \rightarrow 0 \text{ om } \mu \tan \beta_0 (1 + e) \rightarrow 1$$

LP 4.193



Lösningen ges av Eulers andra lag

$$\mathbf{M}_A = \dot{\mathbf{H}}_A \quad (1)$$

där tidsderivatan kan beräknas enligt

$$\dot{\mathbf{H}}_A = \left(\dot{\mathbf{H}}_A \right)_{xyz} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{H}_A \quad (2)$$

där $Oxyz$ är ett koordinatsystem som är fixt i kroppen. Origo antas sammanfalla med lagret vid A .

Vinkelhastigheten är

$$\boldsymbol{\omega} = (0, 0, \omega) \quad (3)$$

I detta koordinatsystem som följer kroppens rörelse är rörelsemängdsmomentet med avseende på punkten A

$$\mathbf{H}_A = (-I_{xz}\omega, -I_{yz}\omega, I_{zz}\omega) \quad (4)$$

Eftersom vinkelhastigheten är konstant blir $\left(\dot{\mathbf{H}}_A \right)_{xyz} = \mathbf{0}$

Antag att kraften på kroppen i lagret A är $\mathbf{R}$. Eulers andra lag kan då skrivas (tyngdkraften försummas) enligt ekv (1) och (2)

$$\mathbf{r}_{AB} \times \mathbf{R} = \mathbf{0} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{H}_A \quad (5)$$

som i komponentform blir

$$\begin{cases} -R_y 2a = I_{yz}\omega^2 \\ R_x 2a = -I_{xz}\omega^2 \end{cases} \quad (6)$$

Tröghetsprodukten $I_{yz} = 0$ eftersom skivan ligger i xz -planet. Med Steiners sats för tröghetsprodukter fås vidare

$$I_{xz} = I_{xz}^G + m x_G z_G = 0 + m \frac{b}{2} \cdot \frac{a}{2} = \frac{mab}{4} \quad (7)$$

Insättning i ekv (6) ger då resultatet

$$\mathbf{R} = -\frac{mb}{8}\omega^2 \mathbf{e}_x$$