Språkstart Matematik Lärarguide

Jöran Petersson

Innehåll

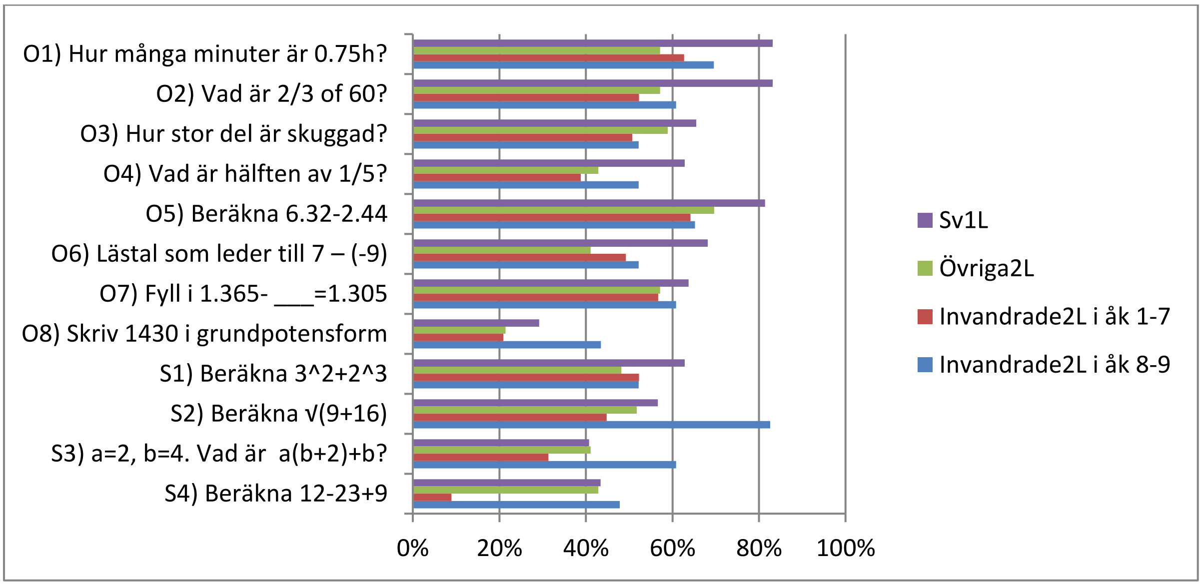
Projektledare Anna Karlberg och Birgitta Fröberg
Författare Jöran Petersson

Liber AB, 113 98 Stockholm
tfn 08-690 90 00
www.liber.se
kundservice tfn 08-690 93 30, fax 08-690 93 01
kundservice.liber@liber.se

Andraspråkare och skolmatematik

Forskning om andraspråkare och provresultat i matematik

Den dominerande bilden av andraspråkare i skolan är flyktingar från något krigsdrabbat område och att dessa presterar lägre än andra elevgrupper. Detta kan göra att vi glömmer bort att det är väldigt stor spridning inom gruppen andraspråkare. Bakom ett medelvärde finns förstås variation, och när det kommer till statistik om människor (och även djur) handlar det i regel om mycket stor variation. Ett exempel är påståendet att ”svenskar dricker drygt 3 koppar kaffe per dag”. Påståendet är naturligtvis ett genomsnitt eftersom några inte dricker kaffe alls och några dricker mer än 3 koppar kaffe per dag. Även i forskningsrapporter finns det en viss risk att få intrycket av andraspråkare som en enhetlig grupp eftersom elevunderlaget har delats in i de två grupperna förstaspråkare och andraspråkare. Medan forskning om stora elevgrupper kan se sådana skillnader mellan medelvärden, så möter vi, i egenskap av lärare, en klass i taget, och framförallt *individer* och vet att några andraspråkare har med sig en gedigen skolgång och starkt stöd hemifrån medan andra inte har detta. Det finns dock forskning som betonar variationen inom gruppen andraspråkare. Giannelli och Rapallini (2016) fann att invandrare från länder som presterar högt i TIMSS och PISA presterar *i genomsnitt* högre i sitt nya land än invandrare från länder som presterar lägre i TIMSS och PISA.



Poänggivande lösningsfrekvens på prov i årskurs 9 (Petersson, 2018).

Ett annat resultat är att det är skillnad på i vilket skolår eleverna har invandrat. På uppgiftsgruppen S1-S4 i diagrammet om aritmetisk syntax (prioritetsregler, distributiva lagen) presterade elever, som hade invandrat i årskurs 8-9 bättre än förstaspråkare trots att de som hade invandrat under årskurs 8-9 hade tydligt sämre kunskaper i svenska språket än de andra tre elevgrupperna (Petersson, 2018). På den andra uppgiftsgruppen (O1-O8 i diagrammet) presterade alla andraspråkare ungefär lika och sämre än förstaspråkare. Detta resultat påminner oss om att kunskaper i svenska och kunskaper i matematik är två olika saker. Däremot behövs det förstås kunskaper i svenska för att lära sig de andra skolämnena. En kommentar till diagrammet ovan är att andraspråkare och förstaspråkare för det mesta gör samma typer av fel, fast i genomsnitt i olika proportioner. De skillnader som däremot var specifika för andraspråkare var att förväxla orden ”antal” och ”andel” med varandra, vilket leder till att de på frågan ”Hur stor andel är skuggad?” istället svarar som om frågan vore ”Hur stort antal är skuggat?”. Ett annat svårt ord var ”hälften” (se Petersson & Norén, 2017).

Källor

Giannelli, G. C., & Rapallini, C. (2016). Immigrant student performance in math: Does it matter where you come from? *Economics of Education Review, 52*, 291-304. doi:10.1016/j.econedurev.2016.03.006

Petersson, J., & Norén, E. (2017). To halve a fraction : An issue for second language learners. *Education Inquiry, 8*(3), 173–191. https://doi.org/10.1080/20004508.2016.1275187

Petersson, J. (2018h; in press). Newly- and early-immigrated second-language students' knowledge of arithmetic syntax. *Nordic Studies in Mathematics Education,23* (3-4), 101-118.

Matematik och matematikspråk

Pimm (1987) är tydlig med att han inte påstår att matematik är ett språk. Däremot fann han att det faktiskt fungerar att analysera matematisk kommunikation med verktyg från språkforskning. Ett exempel på detta ges i Petersson (2014) där en förstaspråkare i svenska inte uppfattar övningsuppgiften ”En person kastar 2 mynt. Vad är sannolikheten för att få en krona?” på samma sätt som en statistiskt kunnig person brukar göra. Eleven tänker nämligen ordet ”kasta” som att ”kasta iväg” och ordet ”få” som att ”ta emot” eller ”få betalt”. Därmed blir övningsuppgiften tämligen obegriplig och eleven fortsätter ”Begriper inte frågan, tycker den är konstig!”.

Staats (2009) har i sitt arbete med andraspråkare undersökt etymologin hos matematiska ord. Hon fann att detta hjälpte eleverna att förstå den matematiska betydelsen av orden samtidigt som de lärde sig terminologin (se Petersson & Petersson, 2016). I detta arbete engagerade hon inte bara eleverna utan också deras föräldrar och äldre syskon. Matematiska ord skapas på främst tre olika sätt; translitterera, översätta samt metaforisk nyskapande. Det vanligaste är nog att translitterera. Det betyder att man importerar ett ord från ett språk till ett annat utan att översätta det. Ett exempel är ordet *ekvation*, som importerades till svenskan från latinet utan att översättas medan det översattes till ordet ”ligning” i danska och norska. Däremot har vi valt att översätta ordet olikhet och inte translitterera det till ”inekvation”.

Metaforisk nyskapande är ovanligt eftersom det främst förunnas dem som undersöker och uppfinner begreppet och på en del språk som är måna om att bevara rikedomen i sitt språk och samtidigt har skapat matematikterminologi ganska nyligen. Ett exempel är grönländskan där ordet vinkel har betydelsen ”fjällkrön” då krönet på ett fjäll har en tydlig vinkel. Fördelen med att nå tillbaka till ordets metaforiska rötter är att det för elevens begreppsbildning skapar en bild från sinnevärlden. Motsvarande metaforiska rot för ordet vinkel på somaliska är ordet ”geso” som på svenska betyder ”horn”, som ju är spetsigt. Ett annat exempel är det grekiska ordet polygon, som på grekiska har betydelsen ”mång-knäing” eftersom ett knä kan vinklas. En rik källa till etymologi för matematikord finns i Kiselman och Mouwitz (2008).

Källor

Kiselman, C.O. & Mouwitz, L. (2008). *Matematiktermer för skolan*. Göteborg: NCM. Som pdf på < www2.math.uu.se/~kiselman/termer12.pdf >.
Petersson, J. (2014). Homonymer och språkliga register. *Nämnaren 3*(41) s. 54-56.
Petersson, J. & Petersson, J. (2016). Språkväxling är mer än terminologiväxling. Det är idéutbyte. *Nämnaren 4*(43) s. 43-44.
Pimm, D. (1987). Speaking mathematically: communication in mathematics classrooms. London: Routledge & Kegan Paul.
Staats, S. (2009). The Somali mathematics vocabulary: A community perspective on mathematics and culture. In R. Barwell (Ed.), *Multilingualism in mathematics classrooms: Global perspectives*. (s. 48-72). Buffalo, N.Y.: Multilingual Matters.

Matematikläxor och andraspråkare

TIMSS rapporterar att svenska föräldrar i genomsnitt ägnar bara några minuter om dagen med läxhjälp, vilket är betydligt kortare än många andra länder (Petersson, Marschall, Sayers & Andrews, 2018; Petersson, Sayers & Andrews, 2018). Dessutom är läxorna i tidiga skolår ofta utformade som repetitionsläxor, där eleverna förutsätts att för det mesta klara arbetet utan föräldrarnas hjälp. I internationella studier visar det sig också föräldrars roll har ganska liten betydelse för elevernas studieresultat trots att föräldrar i andra länder tillbringar mer tid med sina barns läxarbete. Argumentet att ”läxor främjar ojämlikhet då föräldrar har olika utbildningsbakgrund” torde därför väga mycket lätt. En rimlig slutsats är att klokt utformade läxor kan fungera bra. Se även Max Strandbergs (2013) avhandling för fördjupad läsning.

Källor

Strandberg, M. (2013). *Läxor om och för kulturell mångfald med föräldrars livserfarenheter som resurs: några kritiska aspekter*. Doktorsavhandling. Stockholms universitet. su.diva-portal.org/smash/get/diva2:662241/FULLTEXT01.pdf

Petersson, J., Marschall, G., Sayers, J., & Andrews, P. (2018). Swedish year one teachers' perspectives on homework in children's learning of number: An ongoing controversy. *The 11th Swedish Mathematics Education Research Seminar, Madif 11*, Karlstad, January 23-24, 2018.

Petersson, J., Sayers, J., & Andrews, P. (2018). Forskning om läxor i matematik. *Nämnaren* 3(45) s. 13-16.

Talens egenskaper (s. 4-17)

Forskning om andraspråkare och tal

I stort sett hela världen använder positionssystem med talet 10 som bas (Chan, 2013). Däremot skiljer sig regelbundenheten i räkneorden. Exempelvis talet ”13” heter ju på svenska tre-ton medan det på kinesiska heter tio-tre. Hvenekilde (1991) tar upp räkneord för heltal, bråk med mer och diskuterar likheter och skillnader. Exempelvis blir en direktöversättning av ordet ”två tredjedelar” från engelska och persiska till svenska ”två tredje”, alltså utan ordledet ”-del”.

Det är viktigt att inte nöja sig med att kunna räkneorden på skolspråken. Till centrala matematiska ord räknas även ord för att jämföra antal, mängder och ordning, samt att tal ibland fungerar som namn. Även ord för lägen, riktningar och positioner (bakom, före, uppåt, ovanpå,...) hör hit och här finns möjligheter till samarbete med exempelvis skolämnet idrott. Det är förstås också centralt att kunna resonera matematiskt, varför ord som beskriver tals egenskaper, exempelvis ”udda” och ”rektangeltal” är viktiga för att framgångsrikt kunna kommunicera och resonera matematiskt enligt läroplanens mål.

Källor

Chan, E. (2013). *Numeral systems of the world's languages*. < https://mpi-lingweb.shh.mpg.de/numeral/ >.

Hvenekilde, A. (red.) (1991). Matte på ett språk vi förstår. Stockholm: Skriptor.

Aritmetik (s. 18-31)

Forskning om aritmetik

Naturligtvis vimlar det av forskning om att undervisa i aritmetik. Här fokuserar vi just uppställningar. Det är välkänt att subtraktion med positionsövergångar är en vanlig källa till felräkning. Även vid multiplikation av flersiffriga tal är vanliga räknefel att göra fel vad det gäller delprodukternas position. Detta gäller i stort sett oberoende av om man använder lodräta eller vågräta uppställningar. Delvis beror det på att dessa uppställningar fokuserar entalsaritmetik. Därmed är det lätt hänt att subtraktionen ”21-19” uppfattas som (20-10) + (9-1) eftersom eleverna ännu inte är vana att hantera addition med negativa tal som (20-10)+(1-9) motsvarar. En annan orsak är att dessa uppställningar endast använder numerisk representationsform och då i form av entalsaritmetik där talen inte betraktas som flersiffriga tal utan styckas upp i siffror. Exempelvis blir trean i talet 534 just siffran 3 och inte talet 30. Steinbring (1997) har, med subtraktion och multiplikation som exempel, konstaterat att det är svårare att skapa matematisk mening i sådana uppställningar jämfört med sådana som även använder matematiska figurer som representationsform. I Storbritannien har motsvarigheten till Skolverket beslutat att rekommendera den geometriska multiplikationsuppställning, som beskrivs i Språkstart matematik, se exempelvis Bolden, Barmby och Harries (2013). Det är därför som författaren i uppställningarna för subtraktion och multiplikation i Språkstart matematik (s. 22 & 26) tydligt påpekar nackdelarna med de förra uppställningarna och förordar de senare; hopp på tallinje respektive rutnätsmultiplikation. För just multiplikationsuppställningar beskrivs detta mer detaljerat i Nämnarenartikeln av Petersson (2016). Där beskrivs att rutnätsmultiplikation (till skillnad från talsortsvisa uppställningar) tydliggör multiplikationens egenskaper såsom kommutativitet, distributivitet och synliggör positionssystemets roll samt att rutnätsmultiplikation är lätt att generalisera till multiplikation av tal i andra baser samt senare skolårs multiplikation av bråk och polynom. Allt detta ger eleverna möjlighet till att inte bara räkna utan även resonera matematiskt. De ytterligare representationsformerna tillför förhoppningsvis även ett estetiskt värde. Allt detta är sådant som Lgr11 uppmuntrar till.

Matematikdidaktikern Duval (2006) tar detta med representationsformer ett steg längre. Han definierar förståelse som att elever växlar mellan representationsformer. Med denna definition kräver en ”traditionell uppställning” ingen förståelse, utan bygger främst på utantillkunskap eftersom den bara använder numerisk representationsform. Det stämmer tämligen väl överens med många lärares erfarenheter. Därmed krävs en hel del av det som behaviorismen kallar överinlärning, vilket riskerar göra matematiken långtråkig. För andraspråkare gäller även att det kan vara svårare att förstå en muntlig förklaring av hur en viss uppställning fungerar om endast numerisk representationsform används. Prediger, Clarkson och Bose (2016) har visat att det ger bättre resultat i flerspråkiga klasser genom att presentera matematik med flera representationsformer.

Källor

Bolden, D.S., Barmby, P., & Harries, T. (2013). A representational approach to developing primary ITT students' confidence in their mathematics. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 44:*1.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61*(1-2), 103-131. doi:10.1007/s10649-006-0400-z

Petersson, J. (2016). Multiplikation i rutnät. *Nämnaren 2*(43) s. 24-28.

Prediger, S., Clarkson, P., & Bose, A. (2016). Purposefully relating multilingual registers: Building theory and teaching strategies for bilingual learners based on an integration of three traditions. In R. Barwell, P. Clarkson, A. Halai, M. Kazima, J. Moschkovich, N. Planas, . . . M. Villavicencio Ubillús (Eds.), *Math-ematics education and language diversity : The 21st ICMI study* (1st ed. 2016. ed., pp. 193-215). Heidelberg: Springer.

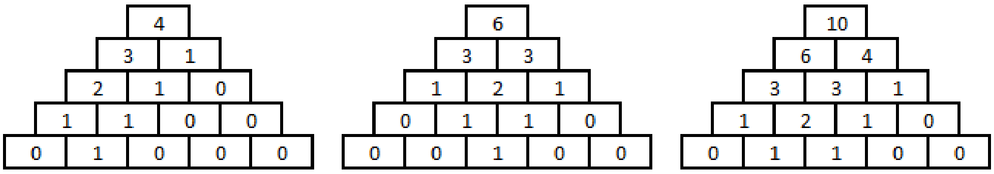
Steinbring, H. (1997). Epistemological investigation of classroom interaction in elementary mathematics teaching. *Educational Studies in Mathematics 32*(1)49-92.

En laboration om talpyramiders egenskaper

Denna laboration passar bra till uppslagen om addition s. 18-19 och multiplikation s. 24-27.

Genomför laborationen

Gör en talpyramid! Regeln för en adderande talpyramid är att talet i en ruta är summan av de två talen i rutorna närmast under, dvs. att talen är talkamrater (talkompisar) som exempelvis 10=6+4 i figuren nedan.



- Välj (rita) en pyramid med ett bestämt antal våningar.
- Sätt 1 i en av rutorna i nedersta raden (nollor i övriga). Beräkna resten av pyramiden.
- Sätt 1 i en annan av rutorna i nedersta raden i en annan pyramid (nollor i övriga). Beräkna resten av pyramiden.
- Jämför de två pyramidernas utseende. Jämför särskilt toppvärdena.
- Sätt 1 i två av rutorna i nedersta raden i en tredje pyramid. Beräkna resten av pyramiden.
- Jämför de tre pyramidernas utseende. Jämför särskilt toppvärdena.

Analysera resultatet

Försök generalisera resultatet!

- Pröva dessa steg för en annan höjd på de tre pyramiderna. Gissa först värden. Försök hitta ett mönster.
- Pröva dessa steg för andra tal än ettor. Gissa först toppvärdet innan du beräknar det. Försök hitta ett mönster.
- Byt addition mot multiplikation och se vad som händer. Då får man ha ettor överallt i bottenraderna utom på ett ställe där man har exempelvis talet ”2”.

Arbete med talpyramider ger gott om tillfällen till att träna huvudräkning utan att huvudräkning är det egentliga syftet (Klungeland, 2007; Petersson, 2018). Syftet är snarare att undervisa om systematiskt matematiskt arbete, dvs. läroplanens resonemang och samtidigt möta såväl fakta som förhoppningsvis en estetisk upplevelse.

Det systematiska arbetet är här att variera en sak i taget och jämföra resultaten. Även arbetssättet går att variera som arbete i smågrupper för nybörjare i aktuellt matematikinnehåll eller som enskilt arbete för elever som behöver utmaning eller som fördjupande läxa för elever som klarar att arbeta självständigt i aktuellt matematikinnehåll.

Källor

Klungeland, K. (2007). Talpyramider. *Nämnaren 1*(34) s. 30-33.
Petersson, J. (2018). Klassens matematikproblem – talpyramider. *LMNT-nytt 2018:1*. (Föreningen LMNT - Lärare i Matematik, Naturvetenskap och Teknik).

Samband, geometri och mätning (s. 32-57)

Forskning om problemlösning med andraspråksperspektiv

Det kan tyckas udda att under ett avsnitt om geometri och mätning ta upp problemlösning. Men just geometri som källa till problemlösning har fördelen att inte vara fullt så beroende av naturligt språk (läst, skrivet och talat) för att kommunicera matematiska resonemang och idéer men desto mer uppmuntra ritat, men likafullt matematiskt, resonemang.
I aritmetik är numeriska värden och vanligt språk de dominerande representationsformerna. En orsak till att flera elever trivs med lektioner i geometri kan vara att det är ett område som traditionellt har större variation i representationsformer genom att även ha med både geometriska figurer och handlingar i form av gester och praktiskt arbete med mätningar. I kursplanen för matematik i Lgr11 uttrycks detta som målet att ”...ge eleverna möjlighet att uppleva estetiska värden i möten med matematiska mönster, former och samband.”. Detta mål passar utmärkt att arbeta med i form av laborationer där eleverna får möjlighet att arbeta med två andra av målen i Lgr11, nämligen ”... utvecklar kunskaper för att kunna formulera och lösa problem...” och ” utvecklar förmågan att ... föra matematiska resonemang”. I forskningslitteraturen beklagar sig en del forskare att det är lätt hänt att problemlösning främst blir en sysselsättning för en liten grupp tämligen kunniga elever. Ännu fler forskare i matematikdidaktik förordar problemlösning som något som *alla* elever regelbundet bör arbeta med just av de anledningar som är kunskapsmål i läroplanen.

Petersson och Norén (2017) fann att elever som hade invandrat i tidiga skolår hade sämre kunskaper i proportionalitet än förstaspråkare och sent invandrade elever och detsamma gäller algebra (Petersson, under tryckning). Det finns naturliga skäl till det. Elever som invandrar i tidiga skolår ska lägga den viktiga grunden i matematik på sitt andraspråk samtidigt som de lär sig språket. Det är en tuff utmaning. Samtidigt är det välkänt att om man har kommit efter tidigt i skolgången, så krävs det mycket hårt arbete att komma ifatt. Så mycket större anledning att ge dem tillfällen att utveckla sin kunskap om proportionalitet på ett sätt där viktiga delar av det matematiska resonemanget går att kommunicera även med figurer och gester.

En del elever kan få intrycket att matematiken främst handlar om att få rätt svar på en avgränsad fråga. I exempelvis geometri kan vi mäta ett antal godtyckliga vinklar för att öva just på att mäta. Det ger ett fokus på proceduren att mäta. Det uppmuntrar dock knappast till reflektion över begreppets egenskaper. Men vi kan göra mycket mer. Vi kan skapa didaktiska situationer, som låter eleverna exempelvis mäta på vinklar men samtidigt ger dem möjligheten att upptäcka och generalisera samband såsom vinkelsumma med mer.

Här är några förslag som ger eleverna tillfällen till att utveckla detta och samtidigt arbeta med dels flera representationsformer och dels flera matematiska områden såsom tal, samband, diagram i olika form, tabeller och geometri.

Arbetssättet i dessa laborationer är huvudsakligen att:

- Presentera arbetsgången med ett specifikt exempel.
- Klassen får arbeta vidare med andra exempel och försöka se ett mönster i data.
- Eleverna kan behöva frågor som utmanar dem att generalisera resultatet till en regel eller metod för hur de kan bestämma talföljden.

Just detta arbetssätt syftar till läroplanens mål att dels tillägna sig ett undersökande arbetssätt och dels lära sig ställa frågor som leder till att generalisera den ursprungliga frågan och under detta arbete uppleva estetiska värden.

Källor

Petersson, J., & Norén, E. (2017). To halve a fraction : An issue for second language learners. *Education Inquiry, 8*(3), 173–191. https://doi.org/10.1080/20004508.2016.1275187

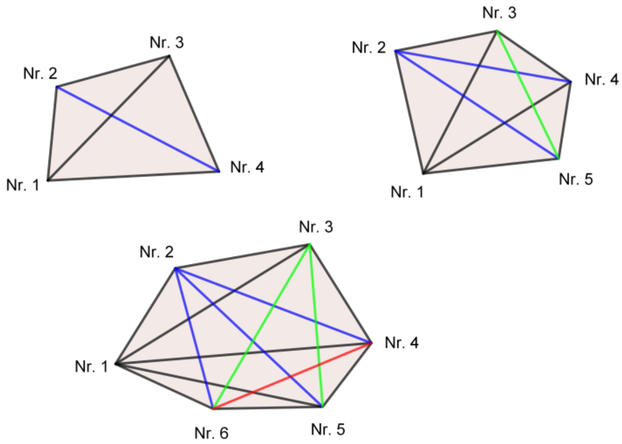
Petersson, J. (2018). Second language students' achievement in linear expressions and time since immigration. In E. Norén, H. Palmér & A. Cooke (Eds.), *NORMA 17 – Nordic Research in Mathematics Education.* (pp. 179-187). Skrifter från SMDF, nr 12 Göteborg: Svensk förening för matematikdidaktisk forskning. ISBN 978-91-984024-1-4. http://urn.kb.se/resolve?urn=urn:nbn:se:su:diva-159970

En laboration om antalet diagonaler i polygoner

Denna laboration passar bra till uppslaget ”Några begrepp i geometrin”, s. 38-39.

Genomför laborationen

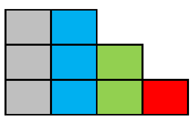
- Rita en 6-hörning.
- Skriv nummer på hörnen (Nr1, Nr2,...).
- Från hörn Nr 1 ritar du diagonaler i en färg (till exempel svart).
- Från hörn Nr 2 ritar du diagonaler i en annan färg (till exempel blå).



- Gör en tabell över resultatet (numerisk representationsform). Visa gärna antalet nya diagonaler i tabellen med samma färg som diagonalerna i de geometriska figurerna.

Hörn nummer	Nr 1	Nr 2	Nr 3	Nr 4	Nr 5	Nr 6
Antal nya diagonaler som tal	3	3	2	1	0	0

- Gör ett stapeldiagram med klossar över resultatet (konkret representationsform). Använd exempelvis centikuber, Cuisenairestavar eller annat materiel som regelbundet används i matematikundervisningen.



Eleverna kan beräkna sexhörningens totala antal diagonaler med något av sätten på uppslaget ”Mer om mönster i talföljder och geometriska mönster” på s. 36-37.

- Nästa steg är att hitta talmönstret i antalet diagonaler för en 4-hörning, 5-hörning, 7-hörning, 8-hörning och 9-hörning.

Analysera resultatet

När eleverna ser formen på diagrammet i klossarna för några olika polygoner, kommer de snart att se ett mönster i form av en trappa med de två sista stegen på samma höjd. När de har insett det, kanske de kan generalisera det till antalet diagonaler för en godtycklig konvex polygon genom att använda något av sätten på uppslaget ”Mer om mönster i talföljder och geometriska mönster” på s. 36-37.

För att utmana eleverna att generalisera sina resultat kan man utmana dem med dessa frågor:

- Hur många diagonaler finns det i en 10-hörning?
  I en 20-hörning? I en 100-hörning?

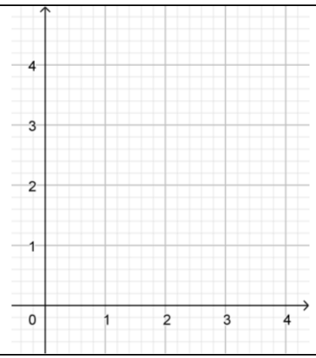
En laboration om cirkelns omkrets

Denna laboration passar bra till uppslaget ”Omkrets”, s. 40-41.

Genomför laborationen

- Mät diameter och omkrets på cirkelrunda saker.
- Gör en tabell och ett diagram som på uppslaget ”Mönster i talföljder och geometriska mönster” på s. 34-35.
- Det är lämpligt att avrunda kvoten omkrets/diameter till heltal.

Tabell		
diameter	omkrets	Räkna ut $\frac{omkrets}{diameter}$



Analysera resultatet

Vilket talmönster ser eleverna i kolumnen? Hur ser diagrammet ut? När de har insett det, kanske de kan generalisera kvoten till andra cirklar. För att utmana eleverna att generalisera sina resultat kan man utmana dem med denna och liknande frågor:

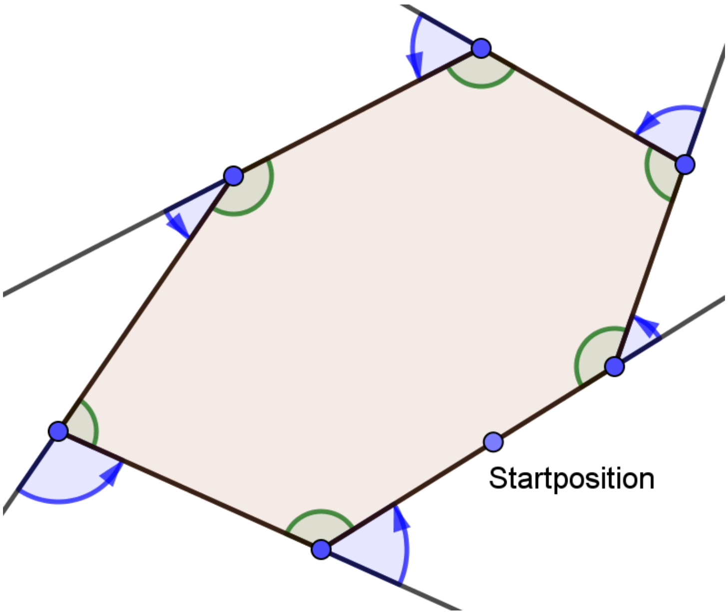
- Jordens omkrets är ungefär 40 000 km. Vad tror du att jordens diameter är?

En laboration om vinkelsumma i polygoner

Denna laboration passar bra till uppslaget ”Vinklar”, s. 42-43.

Genomför laborationen

Lämpligen görs den som en helklasslaboration. Laborationen kan göras utomhus (rita en polygon på skolgården) eller inomhus (tejpa en polygon på klassrummets golv). Fördelar med denna laboration är att det är ett matematiskt bevis, dels är ett generellt bevis för alla polygoner samtidigt som det kräver förkunskaper om i stort sett bara (1) ordet polygon, (2) Vinkelmått = antal halva varv (alltså inte grader) och (3) Kunna räkna antalet hörn i en polygon. Se gärna filmen ” Polygoners vinkelsumma” på < http://www.lektion.se/lessons/lesson.php?id=30835 >.



I denna figur konstaterar vi följande:

1. I varje hörn är blå + grön vinkel exakt ett halvt varv.
2. För en n-hörning blir de markerade vinklarna exakt n halva varv tillsammans. Om polygonen inte är konvex blir det dock något knepigare.
3. Konstatera att yttervinklarna tillsammans är exakt ett varv (två halva varv). Det kan man göra på följande sätt: Tänkt dig att du promenerar ”dit näsan pekar” ett varv runt området med start och mål i startpositionen. Du inser att näsan har roterat exakt ett varv.
4. Nu kan vi sammanfatta: Innervinklarna = n halva varv minus två halva varv från yttervinklarna. Alltså blir n-hörningens vinkelsumma (n – 2) halva varv.

Källor

Petersson, J. (2018) Vinkelsumma hos polygoner på olika sätt < http://www.lektion.se/lessons/lesson.php?id=30835 >.

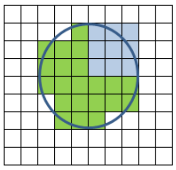
En laboration om cirkelns area

Denna laboration passar bra till uppslagen om area, s. 46-49.

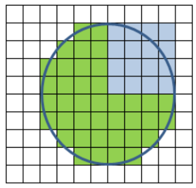
Genomför laborationen

- Rita cirklar på ett rutpapper.
- Mät cirklarnas area ungefärligt genom att tesselera dem med småkvadrater.
- Gör en tabell och ett diagram som på uppslaget ”Mönster i talföljder och geometriska mönster” på s. 34-35.
- Det är lämpligt att avrunda kvoten cirkelns area/kvadratens area till heltal.

Vi ser att cirkelns area är ungefär 28 rutor.
Vi ser att kvadratens area är 9 rutor.

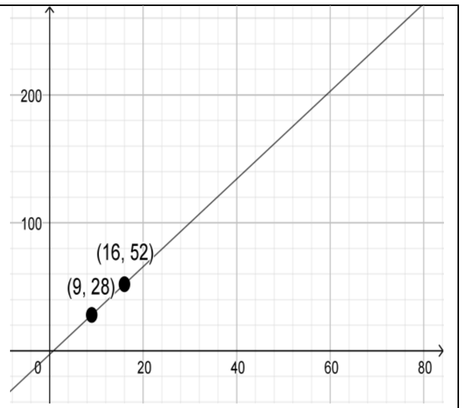


Vi ser att cirkelns area är ungefär 52 rutor.
Vi ser att kvadratens area är 16 rutor.



Gör en tabell och ett diagram som i *proportionella samband*.
(Du kan avrunda kvoten $\frac{cirkelns\ area}{kvadratens\ area}$ till heltal).

Tabell			
Diameter	Cirkelns area≈	Kvadratens area=	Räkna ut $\frac{cirkelns\ area}{kvadratens\ area}$
6	28	9	$\frac{28}{9} \approx 3$
8	52	16	$\frac{52}{16} \approx 3$
10			
12			



Analysera resultatet

Vilket talmönster ser eleverna i kolumnen? Hur ser diagrammet ut? När de har insett det, kanske de kan generalisera kvoten till andra cirklar.

En laboration om massa och volym

Denna laboration passar bra till uppslagen om massa och volym, (s. 52-55 i Språkstart matematik).

Genomför laborationen

- Du behöver en våg, en stor mätcylinder, två potatisar, kniv och skärbräda.

Förberedelse

1. Skär potatisen i bitar.
2. Häll 100 ml vatten i mätcylindern.
3. Ställ mätcylindern på vågen.
4. Sätt på vågen. (Det blir enklare att mäta om vågen ställs så att den visar ”0 gram”).

Foto: Jöran Petersson

Gör mätningar:

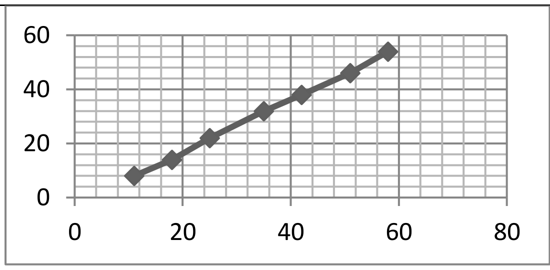
5. Lägg i en bit potatis.
6. Skriv i tabell och diagram ned hur många gram vågen visar.
7. Skriv i tabell och diagram ned hur många ml (milliliter) mätcylindern visar.
8. Gör om (repetera) steg 5, 6 och 7 med en bit potatis åt gången tills du är klar.

Tabell

antal bitar	vikt (g)	volym (ml)
1	11	8
2	18	14
3	25	22
4	35	32
5	42	38
6	51	46
7	58	54

Generaliserande utmaning:

9. Titta på diagrammet. Gissa hur mycket 100 ml potatis väger och hur mycket 500 ml potatis väger.



Analysera resultatet

Här är det svårt att se ett talmönster i tabellen, men när vi ritar diagrammet så syns sambandet mycket tydligare. Det går alldeles utmärkt att använda datorn för att rita diagrammet.

Sannolikhet och statistik (s. 58-63)

Forskning om statistikdidaktik med andraspråksperspektiv

TIMSS (liksom PISA) är en stor internationell studie i vilken elever i de deltagande länderna dels får göra ett prov och dels får fylla i en enkät om sin egen bakgrund och om sin egen skolgång. Resultatrapporter går att hitta och ladda ned från < https://timssandpirls.bc.edu/ >. I dessa kan man läsa vad elever i olika länder kan i olika kunskapsområden i matematiken. TIMSS har ett prov för årskurs 4, ett för årskurs 8 och ett för gymnasiet. TIMSS delar in matematikens kunskapsområden i tal, algebra (ej årskurs 4), geometri och statistik. Ett av resultaten från TIMSS är att åk8-elever i de nordiska länderna har sin starka sida i statistik och forskaren Olsen (2006) har kallat det för en Nordisk kunskapsprofil. En förklaring till detta kan vara skillnader mellan olika länders läroplaner.

Går vi tillbaka ett par decennier i svenska läroplaner så var statistik något som hörde högstadiet till. Sverige införde beskrivande statistik men inte sannolikhetslära i sin första läroplan Lgr62. I Lgr69 ingick sannolikhetslära i årskurs 7-9 medan det i Lgr11 ingår i årskurs 1-3. I läroböcker från dessa läroplaner handlade avsnittet ”tabeller” i tidiga skolår dock inte om statistik utan om tidtabeller för tåg och bussar. Wu och Zhang (2006) skriver att den kinesiska läroplanen inte tog med sannolikhetslära förrän 1999 och att en del länder inte har med sannolikhetslära eftersom det förknippas med dobbel och spel, vilket är förbjudet eller åtminstone opassande i en del religioner. Tja, inte bara religioner utan när nätspel blev vanliga och såväl spelarna som deras anhöriga drabbades, så ändrades även Sveriges lag för att begränsa möjligheter till nätspel. Sannolikhetslärans ursprung var visserligen att en hasardspelare frågade matematikerna Fermat och Pascal om råd och de båda matematikernas brevväxling (samt Cardanos tidigare arbete) blev ursprunget till detta. Men i dag används sannolikhetsläran till statistisk försöksplanering och väderprognoser m.m. Därför kan det vara lämpligt att variera sammanhangen från vilka man hämtar exempel till sannolikhetsläran. Ett exempel på forskning om elever och kombinatorik är av Lyn D. English (1991), som lät barn i åldrarna drygt fyra till elva år lösa följande kombinatoriska problem: Med hur många färgkombinationer kan klippdockor i form av nallar ska kläs i tröja (2 färger) och byxa (3 färger)? Eleverna prövade sig fram till en lösning med olika sökstrategier. En slumpmässig strategi var att välja kombinationer utan att ta hänsyn till tidigare val och därmed kunde dubbletter förekomma. En systematisk strategi var att variera färg på ett plagg i taget. Däremellan fanns mer eller mindre systematiska varianter. Det intressanta i studiens resultat är att i alla åldrar fanns strategier på hela skalan från slumpmässiga val till systematiskt sökning, men förstås dominerade slumpmässigt prövande i yngre åldrar och systematiskt sökning i senare åldrar. Exempelvis förekom systematiska sökstrategier bland sjuåringar och slumpmässig prövning bland elvaåringar. Det går alltså inte att tillämpa Piagets stadieteori strikt, istället är eleverna individer med stor spridning i kompetens inom varje åldersgrupp.

I många andra länder infördes statistik i läroplanen ganska nyligen och ännu inte i särskilt stor omfattning. Detta går att avläsa både i TIMSS (Mullis, Martin, Foy, & Arora, 2012) och när man jämför förstaspråkares och andraspråkares resultat på nationella prov i årskurs 9 (Petersson, 2017a). Det är rimligt att anta att det finns flera förklaringar till att andraspråkare i årskurs 9 i genomsnitt har lägre resultat på statistikdelen. Delvis är provuppgifter i statistik oftare språkligt mer komplicerade än andra uppgiftstyper men också att elever som har invandrat i senare skolår har följt en läroplan som skiljer sig från den svenska läroplanen vad det gäller statistikområdet.

Som lärare bör vi tänka på att svensk läroplan tar upp enkel kombinatorik och statistik redan i skolår 1-3. Det är inte säkert att så ännu är fallet i läroplaner i exempelvis mellersta östern och därför är det viktigt att inte glömma bort det statistikområdet när man undervisar nyanlända oavsett åldersgrupp.

De statistiska mått som läroplanen tar upp är lägesmått och spridningsmått. Det går att representera dessa både grafiskt i diagram och numeriskt med tal. Litteratur i statistikdidaktik brukar ta upp att det finns ganska få förklaringsmodeller av begreppet median. Den mest kända är förstås att det motsvarar talet i mitten, när man har ordnat dem i storleksordning. En variant på detta är en ”medianmaskin”, som Kerstin Vännman beskriver i Nämnaren (Vännman, 1980). En trevlig variant på medianmaskin finns i (Lesser, Wagler, & Abormegah, 2012). Elevers uppfattning av begreppet *median* beskrivs lite mer detaljerat i Petersson (2017b), som fann att några elever har uppfattat ordet ”mitten” som mitt emellan de två yttersta talen i listan och andra elever förväxlade ordet ”median” med ordet ”medelvärde” då dessa ord är mycket lika varandra på exempelvis spanska.

Källor

English, L. D. (1991). Young children's combinatoric strategies. Educational Studies in Mathematics, 22(5), 451-474. doi:10.1007/BF00367908

Mullis, I. V. S., Martin, M. O., Foy, P., & Arora, A. (2012). *TIMSS 2011 international results in mathematics*. Chestnut Hill, MA, USA: TIMSS & PIRLS International Study Center, Lynch School of Education, Boston College.

Lesser, L. M., Wagler, A. E. & Abormegah, P. (2014) Finding a Happy Median: Another Balance Representation for Measures of Center, *Journal of Statistics Education, 3*(22), DOI: 10.1080/10691898.2014.11889714

Olsen, R. V. (2006). A Nordic profile of mathematics achievement: Myth or reality? *Northern Lights on PISA 2003: A Reflection from the Nordic Countries*, 33-45.

Wu, M., & Zhang, D. (2006). Overview of curricular in the West and East. In F. K. S. Leung, K. Graf & F. J. Lopez-Real (Eds.), *Mathematics education in different cultural traditions-a comparative study of East Asia and the West : The 13th ICMI study* (pp. 181-193). New York, PA: Springer.

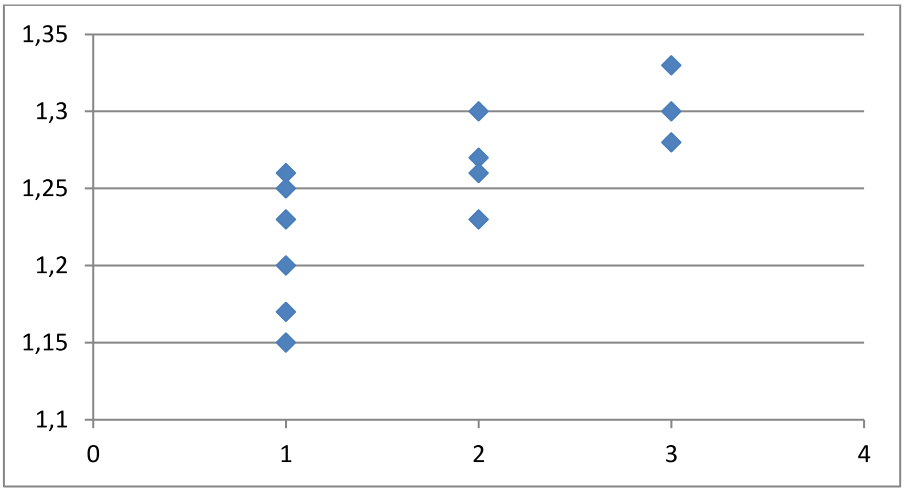
Petersson, J. (2017a). First- and second-language students' achievement in mathematical content knowledge areas. *Nomad 22*(2), 33-50.
Petersson, J. (2017b). Students determining the median for different data sets: A spectrum of responses. *The 10th Swedish Mathematics Education Research Seminar, Madif 10*, Karlstad, January 26-27, 2016 (p. 145). < http://urn.kb.se/resolve?urn=urn:nbn:se:su:diva-139220 >
Vännman, K. (1980). EDA – detektivarbete bland siffror med papper, penna och linjal. *Nämnaren 4*/1980, s. 42-52.

En laboration om beskrivande statistik

Denna laboration passar bra till uppslagen om statistik, s. 58-61.

Genomför laborationen

- Du behöver en vägg eller några stora papper att tejpa på väggen samt post-it-lappar eller liknande. En variant är att ha post-it-lappar i en färg för pojkar och en annan färg för flickor.
- Laborationen består i att göra ett väggdiagram över längd (eller skostorlek) och årskurs.
- Alternativ: Stapeldiagram för vilken månad eleverna är födda i eller antal syskon.



- Varje årskurs får en kolumn i diagrammet.
- Eleverna får bjuda in så många klasser de önskar och be dem en åt gången ställa sig mot väggen och sätta dit varsin post-it-lapp för längden.

Analysera resultatet

När eleverna ser diagrammet, kan de diskutera flera statistiska mått.

- Lägesmått; typvärde, medelvärde, median.
- Spridningsmått; enklast är skillnad mellan största och minsta värde i respektive kolumn.
- Trender; ungefär hur mycket längre blir barnen för varje årskurs.
- Genusskillnader; om detta undersöks, så kan man se att pojkar *i genomsnitt* är längre än flickor med undantag för 12-årsåldern medan spridningen (variationen) inom varje kön är så stor att flera pojkar mycket väl kan vara kortare än flera flickor. Detta skapar medvetande om att det finns en stor variation runt ett lägesmått.

En laboration om kombinatorik

Denna laboration passar bra till uppslaget om kombinatorik och sannolikhet, (s. 62-63 i Språkstart matematik)

Genomför laborationen

- Laborationen består i att undersöka hur många olika färgkombinationer det går att klä sig i med 3 olika enfärgade tröjor (exempelvis 1 gul, 1 röd och 1 blå tröja) och 2 olika enfärgade byxor. Utvidga sedan laborationen med ytterligare antal färger och låt eleverna bokföra sina resultat i en tabell.
- Material: Du behöver ett antal (fler än antalet möjliga kombinationer) likadana klippdockor, exempelvis i form av nallebjörnar samt klippkläder i form av tröjor i 2 färger och byxa i 3 färger (lika många tröjor respektive byxor som antalet nallebjörnar). Ett enklare val av material är att använda färdigt plockmaterial, exempelvis jämförbjörnar, och representera färgkombinationen av tröja + byxa med två ihopsatta centikuber.

Antal olika tröjor	Antal olika byxor	Antal olika färgkombinationer
3	2	6
3	3	9
4	3	12
etc.		
n	m	$n \cdot m$

Analysera resultatet

Ur tabellen bör eleverna kunna dra slutsatsen att det finns $n \cdot m$ stycken färgkombinationer där n=antalet olika tröjor och m=antalet olika byxor. Som lärare är det viktigt att observera och med eleverna diskutera hur deras sökstrategier ser ut.