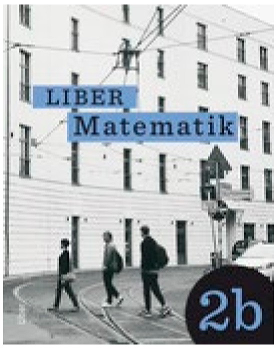
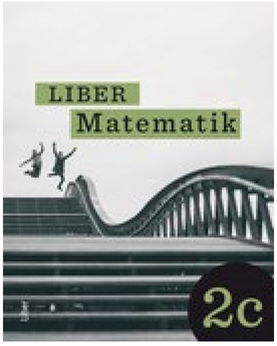




Uppdatering till Liber Matematik 1b, 1c, 2b och 2c

Tyvärr förekommer tryckfel i första upplagan. Vi beklagar detta. I denna fil finns korrigeringar och för 1b och 1c även nya versioner av facit.

Errata, första tryckningen

Liber AB

13 september 2023

Liber Matematik 1b ISBN 47-14077-0

sida	*plats*	*nuvarande*	*ändras till*
3	Exempel 2	==	=
24	1302	2101	1301
29	1320	l.	l/mil
39	2 a)	$35 \cdot 37$	$3^5 \cdot 3^7$
39	2 c)	$43 \cdot 23$	$4^3 \cdot 2^3$
39	5 c)	$(-1)7$	$(-1)^7$
54	2205	är sanna?	är säkert sanna?
68	2511	$\frac{n-1^2}{n+1}$	$\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2$
68	2513	2413	2513
106	3122	den årliga	den genomsnittliga årliga
143	13	1 800	1 750
153	4205	fem	sex
154	4207	$-1 - x - 2,$	$-1 \leq x \leq 2$
154	4207	$2 < x - 5.$	$2 < x \leq 5.$
162	Funktionens värdemängd	$-2 \leq f(x) \leq 9$	$-3 \leq f(x) \leq 9$

sida	*plats*	*nuvarande*	*ändras till*
164	4302	säljer	köper
165	4304 b)	mängden purjolök	antalet purjolökar
166	figur	Medlemsavgivt	Medlemsavgift
168	marginal	$\frac{y}{x}$	$\frac{\Delta y}{\Delta x}$
168	höger om marginalanteckning	$\frac{y}{x}$	$\frac{\Delta y}{\Delta x}$
168	näst nedersta rad	$\frac{y}{x}$	$\frac{\Delta y}{\Delta x}$
169	rad 4	$\frac{y}{x}$	$\frac{\Delta y}{\Delta x}$
169	rad 6	$\frac{y}{x}$	$\frac{\Delta y}{\Delta x}$
170	grön ruta	$\frac{y}{x}$	$\frac{\Delta y}{\Delta x}$
171	rad 8	$\frac{y}{x}$	$\frac{\Delta y}{\Delta x}$
171	rad 15	$\frac{y}{x}$	$\frac{\Delta y}{\Delta x}$
171	rad 20	$\frac{y}{x}$	$\frac{\Delta y}{\Delta x}$
179	rad 4	$ax + by + c$	$ax + by + c = 0$
179	rad 5	konstanter. 0.	konstater.
192	Exempel 1	$\dfrac{27405^{1/10}}{20000}$	$\left(\dfrac{27405}{20000}\right)^{1/10}$
196	4502	med tre	med två
199	rad 1	$\dfrac{T}{t}$	$\dfrac{\Delta T}{\Delta t}$

sida	*plats*	*nuvarande*	*ändras till*
200	4523	ökar?	ökar då
234	5108	frågade både	frågade lika många
246	högerkolumn, sex ställen	$\pm$	$-$
276	1116 c)	0,3	-3
276	1116 d)	-4	-1
276	1118	2,4622	2,4662
276	1217 b)	$9a^3/2b$	$9a^3/(2b)$
278	1275 d)	0,2293	0,22934
278	1276 b)	6	3
278	1276 d)	$\dfrac{1}{5}$	$\dfrac{1}{25}$
278	1277	0,987	$-1{,}384$
280	26	$x = 4$	$X = 4$
281	2 a)	312	3^{12}
281	2 b)	45	4^5
281	2 c)	29	2^9
281	6 a)	10^5	10^4

sida	*plats*	*nuvarande*	*ändras till*
282	2125	$x = 3$	3
282	2129	$x = 1/4$	$x = -1/4$
283	2146 c)	$x_2 = 44$	$x_2 = 4$
283	2147 c)	$x = \frac{1}{13}$	$x_1 = -\frac{1}{13}$, $x_2 = \frac{1}{13}$
283	2151 a)	$x = -0{,}102$	$x = -0{,}108$
283	2405 c)	$x > -2$	$x \geq -2$
283	2412 b)	$-3 \quad z < -1$	$-3 \leq z < -1$
283	2415 b)	y	x
284	2422 a)	$6\,000 + 400x$	$5\,000 + 550x$
284	2503 b)	s	t
286	uppgift märkt 11	11	8
287	uppgift märkt 6	6	16
287	uppgift märkt 7	7	17
287	uppgift märkt 8	8	18
290	3204 b)	12 591	17 591
290	3217 c)	1 084	1 083

sida	*plats*	*nuvarande*	*ändras till*
292	3330	$\frac{28}{64}$	$\frac{41}{64}$
294	46 b)	0,18	0,018
298	4314	$b:\ x = 2$	$b:\ x = 0$
299	4325	$k = \frac{y}{x}$	$k = \frac{\Delta y}{\Delta x}$
299	4328	$k = \frac{y}{x}$	$k = \frac{\Delta y}{\Delta x}$
299	4334	$a = 26$ kr	26 kr
302	4437	y	$g(x)$
309	5102 c)	4 st	$2/15 \approx 13\,\%$
309	5102 d)	$2/15 \approx 13\,\%$	25 % fler
309	5108 a)	36	90
311	5304	50 %	25 %

Liber Matematik 1c ISBN 47-14080-0

sida	*plats*	*nuvarande*	*ändras till*
3	Exempel 2	==	=
24	1302	2101	1301
29	1320	l.	l/mil
39	2 a)	$35 \cdot 37$	$3^5 \cdot 3^7$
39	2 c)	$43 \cdot 23$	$4^3 \cdot 2^3$
39	5 c)	$(-1)7$	$(-1)^7$
49	2135	Ställ upp en ekvation och	Ställ upp en ekvation och beräkna hur många dagar i månaden Eva i så fall måste cykla till jobbet, som minst, för att detta ska bli billigare för henne. Räkna med att det är 20 arbetsdagar i månaden.
54	2205	är sanna?	är säkert sanna?
68	2513	2413	2513

sida	*plats*	*nuvarande*	*ändras till*
139	13	1 800	1 750
149	4205	fem	sex
158	Funktionens värdemängd	$-2 \leq f(x) \leq 9$	$-3 \leq f(x) \leq 9$
160	4302	säljer	köper
161	4304 b)	mängden purjolök	antalet purjolökar
162	figur	Medlemsavgivt	Medlemsavgift
175	rad 4	$ax + by + c$	$ax + by + c = 0$
175	rad 5	konstanter. 0.	konstater.
192	4502	med tre	med två
230	5108	frågade både	frågade lika många
309	1116 c)	0,3	-3
309	1116 d)	-4	-1
311	1276 b)	6	3
311	1276 d)	5	25
314	2 a)	312	3^{12}
314	2 b)	45	4^5
314	2 c)	29	2^9
314	6 a)	10^5	10^4

sida	*plats*	*nuvarande*	*ändras till*
315	2125	$x = 3$	3
316	2146 c)	$x_2 = 44$	$x_2 = 4$
316	2147 c)	$x = \dfrac{1}{13}$	$x_1 = -\dfrac{1}{13}$, $x_2 = \dfrac{1}{13}$
316	2151 a)	$x = -0{,}102$	$x = -0{,}108$
316	2202 b)	$>$	$<$
316	2405 c)	$x > -2$	$x \geq -2$
316	2412 b)	$-3 \quad z < -1$	$-3 \leq z < -1$
316	2415 b)	y	x
317	2422 a)	$6\,000 + 400x$	$5\,000 + 550x$
317	2503 b)	s	t
319	uppgift märkt 11	11	8
320	uppgift märkt 6	6	16
320	uppgift märkt 7	7	17
320	uppgift märkt 8	8	18
323	3204 b)	12 591	17 591
323	3208 b)	991	992
323	3217 c)	1 084	1 083

sida	*plats*	*nuvarande*	*ändras till*
325	3330	$\frac{28}{64}$	$\frac{41}{64}$
327	46 b)	0,18	0,018
331	4314	$b:\ x = 2$	$b:\ x = 0$
335	4437	y	$g(x)$
336	4504 a)	$x = 0{,}5$	$x = 0{,}50$
336	4504 b)	$x = -1$	$x = -1{,}00$
336	4504 b)	$x = 3$	$x = 3{,}00$
336	4504 d)	$x = 0$	$x = 0{,}00$
342	5102 c)	4 st	$2/15 \approx 13\,\%$
342	5102 d)	$2/15 \approx 13\,\%$	25 % fler
342	5108 a)	36	90
344	5304	50 %	25 %
349	6223	$2x - y - 3 = 0$	$2x + y - 3 = 0$
350	18 b)	$\tan 667{,}5°$	$\tan 67{,}5°$
351	6	31 cm^2	32 cm^2

Liber Matematik 2b ISBN 47-14079-4

sida	*plats*	*nuvarande*	*ändras till*
19	Linjära funktioner	vars graf är är en rät linje	vars graf är en rät linje
19	1230 a)	$(2, -3)$	$(2, -1)$
21	I GeoGebra kan du	genom att först skriva	genom att skriva
22	Exempel 1	$x + y + 234$	$x + y = 234$
44	2	koordinater$(-2, -3)$	koordinater $(-2, -3)$
56	Exempel 3 b)	$18x^3 - 84x^2y + 98y^2$	$18x^3 - 84x^2y + 98xy^2$
103	Exempel 3 b)	$\approx 50\,945$	$\approx 50\,956$
115	Exempel 2	$x \cdot \lg 1{,}024^x$	$x \cdot \lg 1{,}024$
116	3323	finns det	finnas
152	4313	x ökar åt vänster	x ökar åt höger
198	5119 b)	15	14
198	5119 b)	8	6
212	Exempel 2 b)	7 rätt.	8 rätt.
212	Exempel 2 b)	15,8 %	15,9 %
216	5210	Vad beräknas med	Vad beräknas på en kalkylator med
222	Exempel 4	en mängd data är 1, 2, 4	en mängd data är 1, 5, 9
222	Exempel 4	$\frac{1+2+4}{3} = 3{,}5$	$\frac{1+5+9}{3} = 5$

sida 222 Exempel 4 nuvarande

$$\frac{(1-3{,}5)(2-4)+(2-3{,}5)(3-4)+(4-3{,}5)(7-4)}{3} = \frac{5+1{,}5+1{,}5}{3} = \frac{8}{3} \approx 2{,}67$$

ändras till

$$\frac{(1-5)(2-4)+(5-5)(3-4)+(9-5)(7-4)}{3} = \frac{8+0+12}{3} = \frac{20}{3} \approx 6{,}67$$

sida	*plats*	*nuvarande*	*ändras till*
228	5303 c)	$y(x) = 47$	$y(x) = -47$
249	<u>SIDAN 159</u>	<u>159</u>	<u>157</u>
250	Ekvationssystem 6.	4,55	4,54
253	1101	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{33}$
253	1210	$a \cdot 32$	$a \cdot 3^2$
254	1229 c)	1 4	$\frac{1}{4}$
255	1234	$y = -\frac{8x+23}{3}$	$y = -\frac{8x-23}{3}$
256	1311	$\frac{4}{3} = -\frac{-2}{p} \Longrightarrow p = -1{,}5$	$\frac{4}{3} = \frac{-2}{p} \Leftrightarrow p = -1{,}5$
261	2117	$==$	$=$
267	39	$(12, 0)$	$(10, 0)$
269	3103	$x = 3$	$x_1 = -3,\ x_2 = 3$

sida	*plats*	*nuvarande*	*ändras till*
273	39 b)	hela den nuvarande texten	$0{,}3^{\frac{x}{40}} = 0{,}05 \Rightarrow x \approx 99{,}5$.
			Svar: Cirka 100 år
283	17	$a = \dfrac{1+b}{2}$	$b = \dfrac{2+a}{2}$
284	24	4324	4429
287	5125 b)	$0+1+2+3+4+5 = 15$	$0+1+2+3+4 = 10$
289	5302	$y = 0{,}63y + 8{,}2$	$y = 0{,}63x + 8{,}2$
296	89	89 SPL/TT	88 SPL/TT

Liber Matematik 2c ISBN 47-14078-7

sida	*plats*	*nuvarande*	*ändras till*
8-53	paginering	8-53	2-47
25	Linjära funktioner	vars graf är är en rät linje	vars graf är en rät linje
25	1230 a)	$(2, -3)$	$(2, -1)$
26	I GeoGebra kan du	genom att först skriva	genom att skriva
28	Exempel 1	$x + y + 234$	$x + y = 234$
50	2	koordinater$(-2, -3)$	koordinater $(-2, -3)$
62	Exempel 3 b)	$18x^3 - 84x^2y + 84y2$	$18x^3 - 84x^2y + 98xy^2$
127	Exempel 3 b)	50 945	50 956
180	4313	ökar åt vänster	ökar åt höger
228	5119 b)	15	14
228	5119 b)	8	6
242	Exempel 2 b)	7 rätt.	8 rätt.
242	Exempel 2 b)	15,8 %	15,9 %
216	5210	Vad beräknas med	Vad beräknas på en kalkylator med
222	Exempel 4	en mängd data är $1,\ 2,\ 4$	en mängd data är $1,\ 5,\ 9$
222	Exempel 4	$\frac{1+2+4}{3} = 3{,}5$	$\frac{1+5+9}{3} = 5$

sida 222 Exempel 4 nuvarande

$\frac{(1-3{,}5)(2-4)+(2-3{,}5)(3-4)+(4-3{,}5)(7-4)}{3} = \frac{5+1{,}5+1{,}5}{3} = \frac{8}{3} \approx$
2,67

ändras till

$\frac{(1-5)(2-4)+(5-5)(3-4)+(9-5)(7-4)}{3} = \frac{8+0+12}{3} = \frac{20}{3} \approx 6{,}67$

sida	*plats*	*nuvarande*	*ändras till*
258	5303 c)	$y(x) = 47$	$y(x) = -47$
280	SIDAN 153		*Infogas:*
			$a = c,\ b = d,\ e = g,\ h = f,$
			de är vertikalvinklar.
			$a = e,\ b = f,\ d = h,\ c = g,$
			de är likbelägna vinklar.
288	Kapitel 1, 6.	4,55 liter	4,54 liter
289	1234	$y = -\frac{8x+23}{3}$	$y = -\frac{8x-23}{3}$
293	1210	$a \cdot 32$	$a \cdot 3^2$
294	1229 c)	1 4	$\frac{1}{4}$
296	1311	$\frac{4}{3} = -\frac{-2}{p} \Longrightarrow p = -1{,}5$	$\frac{4}{3} = \frac{-2}{p} \Leftrightarrow p = -1{,}5$
301	2117	$==$	$=$
309	39	$(12, 0)$	$(10, 0)$
311	3103	$x = 3$	$x_1 = -3,\ x_2 = 3$

sida	*plats*	*nuvarande*	*ändras till*
316	40 b)	hela den nuvarande texten	$0{,}3^{\frac{x}{40}} = 0{,}05 \Rightarrow x \approx 99{,}5$.
			Svar: Cirka 100 år
326	17	$a = \dfrac{1+b}{2}$	$b = \dfrac{2+a}{2}$
327	24	4324	4429
332	5302	$y = 0{,}63y + 8{,}2$	$y = 0{,}63x + 8{,}2$

FACIT 1b

Svar kontrollfrågor

Kapitel 1

S. 8

1 Basen är 5, exponenten är 3

2 $3^0 = 1$

3 a) addera exponenterna
b) subtrahera exponenterna
c) multiplicera exponenterna

S. 13

1 För att på ett kortare sätt kunna beskriva stora eller små tal

2 Mellan 1 och 10

S. 22

a) Koefficienter: 12 och –6. Variabler: x och y. Variabeltermer: $12x$ och $-6y$. Konstantterm: +27.
b) Koefficienter: –1 och –8. Variabler: a och b. Variabeltermer: $-a$ och $-8b$. Konstantterm: 151.

S. 25

a) $4x - x^2$
b) $5a + ab$

S. 28

a) $5 \cdot 3 + 5 \cdot 4 = 35$
b) $6 \cdot 14 - 6 \cdot 8 = 84 - 48 = 36$

Kapitel 2

S. 55

a) $\Leftarrow$
b) $\Leftarrow$ och $\Rightarrow$
c) $\Rightarrow$
Om $x^2 = 25$ behöver det inte innebära att $x = 5$. Det är också möjligt att $x = -5$.

S. 56

a) ja
b) nej

S. 57

a) ändligt
b) oändligt många
c) ja, $\frac{98}{100}$
d) nej

S. 58

1. a) $x = 7$.
b) Ett enda: 7.

2. a) $x > 7$.
b) Oändligt många. Alla värden i intervallet $]7, \infty[$.

S. 65

Den fasta kostnaden är 800 kronor, och den rörliga kostnaden är 90 kronor för varje x.

S. 80

$a_7 = 39$

Kapitel 3

S. 100

1 a) En ökning av ett värde

b) En minskning av ett värde

2 a) Ökning med 10 %

b) Minskning med 3 %

S. 123

a) ”Klave” och ”Krona”

b) De fyra möjliga utfallen är ”Krona, Krona”, ”Krona, Klave”, ”Klave, Krona” och ”Klave, Klave”. En händelse kan bestå av ett eller flera av dessa.

S. 124

a) 7

b) 3

c) $P(\text{jämnt}) = \frac{3}{7}$

S. 127

De är oberoende händelser. Vad tärningen i andra kastet visar påverkas inte av vad tärningen i första kastet visar.

S. 129

$P(\text{krona, krona}) = \frac{1}{4}$

$P(\text{krona, klave}) = \frac{1}{4}$

$P(\text{klave, krona}) = \frac{1}{4}$

$P(\text{klave, klave}) = \frac{1}{4}$

Kapitel 4

S. 152

Efter tio sekunder börjar vattnet rinna över. Även om hinken står kvar under flödet, är vattendjupet i den fortsatt 20 cm. Ekvationen $f(t) = 2t$ kan inte längre gälla.

- x
- $g(x)$
- $-1 \leq x \leq 1$
- $-3 \leq g(x) \leq 3$

S. 163

a) $y = 3x$ och $y = -4x$

b) a och b, de går genom origo.

S. 167

a: $m = 3$

b: $m = -2$

c: $m = 1$

S. 169

a: $k = 3$

b: $k = 1$

c: $k = -1$

S. 176

Lutningen
$k = (20 - 6) / (9 - 2) =$
$= 14 / 7 = 2$

$y = 2x + m$. Vi sätter in punkten $(2, 6)$: $6 = 2 \cdot 2 + m \quad m = 2$

Linjens ekvation är $y = 2x + 2$

S. 182

$k = -\frac{1}{4}$

S. 186

$y = 3$ är en linjär funktion med en horisontell, rät linje som graf. På formen $y = kx + m$ är $k = 0$ och $m = 3$.

$y = 2\sqrt{x} - 1$ är inte en linjär funktion. Den oberoende variabeln x är uppöojd till något annat än 1, här 0,5. Grafen utgör inte en rät linje.

S. 192

a) $c(x)$

b) $a(x)$ och $d(x)$

c) $b(x)$ är ett linjärt samband och $e(x)$ är en potensfunktion.

Kapitel 5

S. 247

Förändringarna är signifikanta för C, KD, L, S och SD.

Med digitala verktyg

Kapitel 2

Att lösa ekvationer med symbolhanterande verktyg

1. a) $x = 7/3$

b) $x = 333/37 = 9$

2. a) $p = 1{,}8$

b) $n = 10/3 \approx 3{,}33$

c) $r = -30{,}5$

3. a) $x = \pm\sqrt{8} = \pm 2\sqrt{2}$

b) $x = \pm\frac{5}{2} = \pm 2{,}5$

c) Inga reella lösningar

d) $x = -3$ e) $x = 4$

4. a) $r = \frac{10}{2\pi}\text{ m} \approx 1{,}59\text{ m}$

b) $r = \frac{4{,}27}{2\pi}\text{ cm} \approx 0{,}68\text{ cm}$

5. a) $r = \sqrt{\frac{20}{\pi}}\text{ m} \approx 2{,}52\text{ m}$

b) $r = \sqrt{\frac{9{,}6}{\pi}}\text{ cm} \approx 1{,}75\text{ cm}$

6. a) $x = \frac{y-5}{3}$

b) $t = \pm\sqrt{z-4}$

c) $r = \frac{5}{3}s^2 - 20$

7. a) $y = \frac{3x-7}{2} = 10$

b) $y = \pm\sqrt{2x-12} = \pm\sqrt{6}$

c) $y = \frac{4x^3}{3} = 972$

8. $t = 16$. Svar: 16 s

9. $I = \frac{P^{1/3}}{0{,}62} \approx 3{,}59$. Svar: 3,59 A

10. a) $q = \sqrt{201} \approx 14{,}18$

b) $z = \frac{-q^2-1}{q^2-1} = -13/5$

Kapitel 3

Kalkylera i Excel – annuitetslån

A	B	C	D	E	F	G
Lånesumma	50 000					
Ränta	2,50%					
Perioder	4					
Period	Ing balans	Ränta	Amortering	Utg balans	Betalning	BETALNING
1	50 000	1 250	12 041	37 959	13 291	13 291
2	37 959	949	12 342	25 617	13 291	13 291
3	25 617	640	12 650	12 967	13 291	13 291
4	12 967	324	12 967	0	13 291	13 291
Total		3 164	50 000		53 164	53 164

Kapitel 4

Funktioner i GeoGebra

1. a) $f(-1) = -2$
b) $f(4) = 18$
c) $f(1/4) = 3$
d) $f(2/3) = 14/3$

2. a) $f(2x) = 4x^2 - 3$
b) $f(x^2) = x^4 - 3$
c) $f(a + 1) = a^2 + 2a - 2$
d) $f(3a - 4) = 9a^2 - 24a + 13$

3. a) $x = 3/5$
b) $x = 3/5$
c) $x = -4{,}6/1{,}7 \approx -2{,}70588$
d) $x = \pm 3$

4. a) $2x + 4 = 1 - 3x$, $x = -3/5$
b) $5x + 3 = 1$, $x = -2/5$
c) $-5x + 5 = 1$, $x = -4/5$
d) $-x^2 + 5 = 1$, $x = \pm 2$

5. a) $f(g(x)) = 6x + 4$
b) $g(f(x)) = 6x + 2$

6. a) $f(g(x)) = 2x^2 - 3$
b) $g(f(x)) = (2x - 3)^2 =$
$= 4x^2 - 12x + 9$
c) $f(f(x)) = 2(2x - 3) - 3 =$
$= 4x - 9$
d) $g(g(x)) = x^4$

7. $f(f(f(x))) = x^{27}$

8. a) $f(f(x)) = 1/(1/x) = x$ och $g(x/2) = x$
b) $g(1/x) = 2/x$ och $2 \cdot f(x) = 2/x$

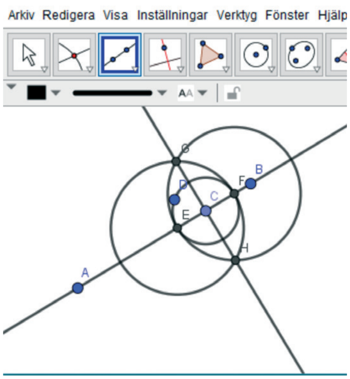
9.

Ekvation	a) Antal lösningar	b) Lösningar
$f(x) = 0$	2	$x = \pm 3$
$g(x) = 0$	1	$x = 7$
$f(g(x)) = 0$	2	$x = 4$ och $x = 10$
$g(f(x)) = 0$	2	$x = \pm 4$
$f(f(x)) = 0$	4	$x = \pm 2\sqrt{3}$ och $x = \pm\sqrt{6}$
$g(g(x)) = 0$	1	$x = 0$

Passare och linjal – geometri i GeoGebra

Del II: *Konstruera en normal genom en given punkt*

Markera skärningspunkterna mellan cirkeln och linjen. Konstruera en ny cirkel, med medelpunkt i den ena av dessa skärningspunkter och randen genom den andra. Konstruera ytterligare en cirkel på motsvarande sätt utifrån den andra skärningspunkten. Markera skärningspunkterna mellan de två nya cirklarna. Dra en linje genom dessa skärningspunkter. Se figur.



Kapitel 5

Sjukamp i GeoGebra

1. De yngsta kvinnorna var födda år 1995. Äldst var Jennifer Oeser, född 1983.

2. Summan av spjutresultaten är 927,55 m.

4. Två tävlanden sparang på mellan 13,3 och 13,4 sekunder. Typvärdet var 13,56 s.

Facit

Kapitel 1

1101 a) 7 b) 9
c) 100 d) 0,5

1102 a) 1,41 b) 3,61
c) 4,50 d) 10,82

1103 8 cm

1104 44 cm

1105 a) 26,83 cm
b) 38,16 cm
c) 26,00 cm
d) 42,80 cm

1106 Varje kvadrat är 64 cm^2, så en sida är 8 cm. Omkretsen är 64 cm.

1107 38,8 cm

1108 Nej. $\sqrt{13} \approx 3{,}61$ och
$\sqrt{9} + \sqrt{4} = 3 + 2 = 5$

1109 a) $7 / 5 = 1{,}4$
b) $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$
c) 2
d) $8 - 4 = 4$

1110 a) 3 b) $\sqrt{3}$
c) 4 d) 1,2

1111 a) $a = 8$ b) $a = 5$
c) $a = 16$ d) $a = 6$

1112 Hon har tänkt rätt.
$\sqrt{64} + \sqrt{25} = 8 + 5 = 13$

1113 T.ex. $\sqrt{2} + \sqrt{3} \approx 3{,}146$
men $\sqrt{2+3} = \sqrt{5} \approx 2{,}236$
och $\sqrt{9} + \sqrt{25} = 8$ men
$\sqrt{9+25} = \sqrt{34} \approx 5{,}831$

1114 Skriv om nämnaren som $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$ och förkorta:
$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

1115 a) $3 \cdot 3 + 4 \cdot 4 = 9 + 16 = 25$
$= 5 \cdot 5$
b) $8 \cdot 8 + 15 \cdot 15 =$
$= 64 + 225 = 289.$
$\sqrt{289} = 17$. Det tredje talet är 17.
c) $20 \cdot 20 = 400$ och
$29 \cdot 29 = 841$
$841 - 400 = 441$
$\sqrt{441} = 21$. Det tredje talet är 21.

1116 a) 2 b) 10
c) -3 d) -1

1117 a) 0,3 b) -4
c) 5 d) 2

1118 a) 2,4662 b) 4,6416
c) 2,7257 d) $-4{,}2543$

1119 a) 400 b) 18
c) -100 d) -2

1201 a) $3a^3$ b) x^2

1202 a) 3^5 b) 3^5

1203 a) 5^9 b) a^5

1204 a) 5^3 b) a^5

1205 a) 4^2 b) $4^{-2} = \frac{1}{4^2}$

1206 a) $2b$ b) $2a^{-3} = \frac{2}{a^3}$

1207 a) 1 b) 1

1208 a) 3 b) $5^{-2} = \frac{1}{5^2}$

1209 a) $2 \cdot 5 = 10$
b) $5 \cdot 3 \cdot 2^2 = 15 \cdot 4 = 60$

1210 a) $3^2 = 9$
b) $(2 \cdot 0{,}5)^8 = 1^8 = 1$

1211 a) $\frac{1^2}{4^2} = \frac{1}{16}$
b) $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2^3}{3^3} = \frac{8}{27}$

1212 a) $\frac{9}{16}$
b) $\left(\frac{6}{1{,}5}\right)^3 = 4^3 = 64$

1213 a) 11^2 b) $\left(\frac{x}{y}\right)^{20}$

1214 a) 5^6 b) 5^{-6}

1215 a) $25x^2$ b) $8y^3$

1216 a) 80 b) 1/3

1217 a) $8y^3x^6$ b) $9a^3/(2b)$

1218 a) $\frac{(5x)^3}{5x} = (5x)^2 = 25x^2$
b) $\frac{(n^2)^3 \cdot (n^2)^2}{n^9} = \frac{n^6 \cdot n^4}{n^9} =$
$= \frac{n^{10}}{n^9} = n$

1219 a) $\frac{2^3}{2^{-1}} \cdot \frac{5^{-2}}{5^{-1}} = 2^4 \cdot 5^{-1} = \frac{2^4}{5^1}$
b) $5^4 \cdot 4 = 5^4 \cdot 2^2$

1220 a) x^{-6x} b) y^6

1221 Exponenten blir
$(-1) - (-3) = 2.$

1222 a) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2} = \frac{1^{-2}}{4^{-2}} = \frac{1}{4^{-2}} = 4^2$

b) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \frac{2^{-2}}{3^{-2}} = \frac{\frac{1}{2^2}}{\frac{1}{3^2}} = \cdot$

$= \frac{1}{2^2} \cdot \frac{3^2}{1} = \left(\frac{3}{2}\right)^2$

1223 a) $\frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$

b) $3^{-2} + \frac{1}{3^2} + \frac{9^{-1}}{7^{-1}} =$

$= \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{7}{9} = \frac{2}{9} + \frac{7}{9} = 1$

1224 1

1225 a) -1 b) 1

1226 a) $27x^3y^6z^9$

b) $9x^2 \cdot (-8x^3) = -72x^5$

1227 a) $x = 3$

b) $4x = 4$, $x = 1$

1228 a) $\frac{1}{4} \cdot 2^4 = \frac{1}{2^2} \cdot 2^4 = 2^2$

b) $\frac{1}{4} \cdot 2^{-4} = \frac{1}{2^2} \cdot \frac{1}{2^4} =$

$= \frac{1}{2^6} = 2^{-6}$

1229 a) $3 + 1 / 5 = 3{,}2$

b) $3^2 \cdot (1/9) = 1$

1230 a) 2^{12} b) 2^{81}

1231 $4^{\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}} = 4^{\frac{2}{1}} = 4^2 = 16$

1232 Genom ett exempel: $\frac{a^5}{a^5} = 1$, ett tal delat med samma tal har värdet 1.

Med potensreglerna:

$\frac{a^5}{a^5} = a^{5-5} = a^0$. Alltså måste a^0 ha värdet 1, oavsett vad a har för värde om $a \neq 0$.

1233 a) $n = 9$

b) $n = 1$ eftersom $4^n = (2^2)^n = 2^{2n}$

1234 a) $8^3 = (2^3)^3 = 2^9$ och $4^n = (2^2)^n = 2^{2n}$. $2n = 9$, så $n = 4{,}5$.

b) $3^4 \cdot 3^{-3} = 3^1$, och $9^{0{,}5n} = (3^2)^{0{,}5n} = 3^n$. Alltså är $n = 1$.

1235 a) $6^{20} = (6^2)^{10} = 36^{10}$, alltså är $k = 10$

b) $8^5 = (2 \cdot 4)^5 = 2^5 \cdot 4^5$, alltså är $k = 5$

1236 a) $(4x \cdot 2{,}5)^3 = (10x)^3 = 1\,000x^3$

b) $\frac{(2x)^3 \cdot (2{,}5x)^3}{5x^6} =$

$= \frac{(5x^2)^3}{5x^6} = 25$

1237 a) Nämnaren är $12 + 24 = 36 = 6^2$. Kvoten blir $6^{0-2} = 6^{-2}$.

b) Täljaren är $9 \cdot 4 - 2 \cdot (-32) - 19 = 36 + 64 - 19 = 81 = 3^4$. Kvoten blir 3^3.

1238 a) Högerledet är $5 \cdot 5^{10} = 5^{11}$. $n = 11$.

b) Nämnaren är $4 \cdot 4^{10} = 4^{11}$.

Täljaren är $16^n = (4^2)^n = 4^{2n}$.

Kvotens värde är då $4^{2n-11} = 4^5$. $2n - 11 = 5$ om $2n = 16$ och $n = 8$.

1239 a) $2^2 = 4$, $2^4 = 16$. Medelvärdet är $(16 + 4) / 2 = 10$.

b) Skriv båda talen med basen 3. $9^6 = (3^2)^6 = 3^{12}$. 3^{15} är alltså störst.

1240 $8^x = (2^3)^x = 2^{3x}$

$2^{-3x} = \frac{1}{2^{3x}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$

1241 a) Om radien fördubblas till $2r$ blir formeln $4\pi \cdot (2r)^2 = 4\pi \cdot 4r^2 = 4 \cdot 4\pi r^2$. Arean blir 4 gånger så stor.

b) Samma resonemang som i *a)* ger att volymen blir 8 gånger så stor.

1242 Efter 6 minuter finns hälften kvar. Efter 12 minuter finns $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2^2}$ kvar.

Efter x halveringar finns $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{2^x}$ kvar. Om $x = 10$ är $\frac{1}{2^x} = \frac{1}{2^{10}} = \frac{1}{1024} \approx \frac{1}{1000}$

1243 a) $1{,}25 \cdot 10^2$ b) $4 \cdot 10^3$

1244 a) $2{,}5 \cdot 10^{-1}$ b) $4 \cdot 10^{-3}$

1245 a) $7{,}8 \cdot 10^4$ b) $1{,}57 \cdot 10^{-7}$

1246 a) $7{,}5 \cdot 10^{11}$ b) $9 \cdot 10^{-3}$

1247 a) 2 300 000 000

b) 0,000 000 72

1248 a) $7{,}2 \cdot 10^8$ b) $1{,}6 \cdot 10^{11}$

1249 a) $7{,}7 \cdot 10^3$ b) $2{,}5 \cdot 10^4$

1250 $3 \cdot 10^{13}$

1251 $1{,}5 \cdot 10^3$

1252 a) $4 \cdot 10^3$ b) $1{,}6 \cdot 10^6$

1253 $5{,}2 \cdot 10^9$ kg

1254 $2 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0 + 5 \cdot 10^{-1}$

1255 $(1{,}496 \cdot 10^{11}) / (2{,}998 \cdot 10^8)$ s $\approx 4{,}99 \cdot 10^2$ s ≈ 500 s

1256 $9{,}45 \cdot 10^{15}$ m

1257 2 046 kr

1258 a) $a = 5$, $b = 3$, $c = 1$, $d = -2$

b) $a = 2$, $b = -3$, $c = 4$, $d = 4$

1259 $5{,}05 \cdot 10^4$

1260 $n = 2$

1261 a) 3 km b) 2,5 hg
c) 7 µm d) 1,2 cm

1262 50 ml

1263 50 pm = $5{,}0 \cdot 10^{-11}$ m

1264 a) $2{,}5 \cdot 10^8$ bytes
b) $1{,}5 \cdot 10^{10}$ bytes

1265 0,02 mm = 20 µm

1266 $1 \cdot 10^8$ st

1267 a) $1{,}1 \cdot 10^{13}$ Wh
b) $4{,}4 \cdot 10^5$ Wh/person =
= 440 kWh/person

1268 9,5 mg. Antalet personer som blir stungna är 9 500.

1269 a) 5 b) 3
c) 3 d) $\frac{1}{2}$

1270 a) 100 b) 30
c) $\frac{1}{8}$ d) $\frac{27}{125}$

1271 a) 4 b) 27
c) 9 d) 36

1272 a) $\frac{1}{4}$ b) 10
c) $\frac{1}{125}$ d) $\frac{1}{30}$

1273 a) 343 b) $\frac{1}{400}$ c) 125

1274 $x = 5$ eller $x = 1$

1275 a) 1,9129 b) −7,1969
c) 4,9363 d) 0,22934

1276 a) $\frac{1}{5}$ b) 3
c) $\frac{1}{32}$ d) $\frac{1}{25}$

1277 −1,384

1278 a) Ett värde. $x = -\frac{9}{2}$
b) Två värden. $x = \frac{3}{4}$ eller $x = \frac{13}{4}$

1301 a) 12 och 4 är koefficienter, x och y är variabler, $12x$ och $4y$ är variabeltermer, 8 är konstantterm
b) 2 och 5 är koefficienter, a och b är variabler, $2a$ och $5b$ är variabeltermer
c) 19 och −11 är koefficienter, s och t är variabler, $19s$ och $-11t$ är variabeltermer, −7 är konstantterm
d) 50 och 1 är koefficienter, x och y är variabler, $50 / x$ och y är variabeltermer

1302 a) 64 b) 45
c) 93 d) 33

1303 a) $y + 6$ b) $a - 12$
c) $4x$ d) $6z + 3$

1304 a) $800 + n \cdot 35$
b) $800 + 20 \cdot 35 = 1\,500$ kr

1305 a) 300 kr är en fast årskostnad
b) $8 \cdot 45 + 300 = 660$ kr, totala årskostnaden för att hyra 45 filmer är 660 kr.

1306 a) Den stora rektangeln har arean $2x \cdot 3y$, den lilla rektangeln har arean $x \cdot 2y$. Arean av det färgade området är skillnaden mellan stora rektangelns area och lilla rektangelns area. $6xy - 2xy = 4xy$

1307 $a \cdot b$ kr = ab kr

1308 a) $650 + 2{,}5x$ kr
b) Om 3/10 får dras av som skatt återstår 7/10 av kostnaden.
$0{,}7(650 + 2{,}5x)$ kr =
= $455 + 1{,}75x$ kr

1309 a) $3x + 2y$
b) $x \cdot x + x \cdot 1{,}5x / 2 = 1{,}75x^2$

1310 a) Totala priset för det som Vanja och Hildur handlar
b) skillnaden i pris mellan det Vanja handlar för och det Hildur handlar för
c) medelvärdet av det som Vanja och Hildur handlar för
d) Vanja handlar för 3 kr mindre än vad Hildur handlar för.

1311 a) $3x + 3$ b) $1{,}3y - 2{,}5$
c) $0{,}8y$ d) $-0{,}1s - 0{,}1t$

1312 a) $3x + 6$
b) $a + 2b - 5$
c) $-4s + 11t + 5$
d) $7xy - y - 4$

1313 a) $8xy + x + 6y + 3$
b) $9ab - 7a - 16$

1314 a) $7s - 7t - 3$, uttryckets värde är −52

1315 Anta att åkband för barn kostar x kr. För vuxna blir det då $(2x + 8)$ kr och för tonåringar $(2x - 22)$ kr.
a) $(2x + 8 + x + 2x - 22)$ kr =
= $(5x - 14)$ kr
b) $(5 \cdot 80 - 14)$ kr = 386 kr
c) $\frac{5x - 14}{3}$ kr

1316 a) $x + (y + 1) + (y + 3) +$
$+ (2x - 3) + (2y - 3) +$
$+ (x + 2) + (y + 2) =$
$= 4x + 5y + 2$
b) $(2x - 3) + (2y - 3) +$
$+ (x + 2) + (y + 2) -$
$- (x + (y + 1) + (y + 3)) =$
$= 2x + y - 6$

1317 Pear j–phone 8 s, pris a kr

Dony Excitera 18, pris $(a + 300)$ kr

Damsung Universe 8 t, pris $(2a - 700)$ kr

a) priset för 2 st Donytelefoner

b) priset för 1 Pear och 1 Damsungtelefon

c) prisskillnaden mellan 1 Damsung och 1 Donytelefon

d) priset per månad för 1 Dony och 1 Damsungtelefon

1318 a) $28x + 35$

b) $12a + 18b$

c) $15x - 40$

d) $-12s + 15t$

1319 a) $48y$

b) $11a + b + 2$

c) $101t - 33s + 24$

d) $39x - 75y + 89$

1320 Anta att en motorcykel förbrukar x l/mil. En bil förbrukar då $(3x - 0{,}2)$ l/mil. En buss förbrukar $2 \cdot (3x - 0{,}2)$ l/mil.

a) $(x + 2(3x - 0{,}2) +$
$+ 3 \cdot 2(3x - 0{,}2))$ l/mil $=$
$= (25x - 1{,}6)$ l/mil

b) $25 \cdot 0{,}3 - 1{,}6 = 5{,}9$ l/mil. Detta är förbrukningen för 1 motorcykel, 2 bilar och 3 bussar om en motorcykel förbrukar 0,3 l/mil.

1321 a) Totala åldern för Vanessa och trillingarna

b) Skillnaden i ålder mellan storebror och Vanessa

c) $\dfrac{a + 3(a + 2) + (a + 9)}{5}$

d) $a + 3$, 12 år. De fem personernas medelålder är 12 år. Vanessa är 9 år, trillingarna är 11 år och storebror är 18 år.

1322 a) $xy + 4x - 2y - 8$

b) $6x - 8xy + 15 - 20y$

c) $79 + 3ab - 27a$

d) $-60 + 6st - 10s + 65t$

1323 Suheyla har 17 stycken parenteser $(x - y)$ och ska subtrahera 16 stycken parenteser $(x - y)$. Kvar har hon 1 parentes $(x - y)$.

$22 - 19 = 3$

1324 a) $(20 - 1)(20 + 1) = 399$

b) $(30 - 2)(30 + 2) = 896$

c) $(40 - 3)(40 + 3) = 1\,591$

d) $(20 + 0{,}7)(20 - 0{,}7) =$
$= 399{,}51$

1325 a) $(x + y)(x^2 + 2xy + y^2) =$
$= \ldots = x^3 + 3x^2y + 3xy^2$
$+ y^3$

b) $(a - b)(a^2 + 2ab + b^2) =$
$= \ldots = a^3 + a^2b - ab^2 - b^3$

1326 $xy - bh$

1327 a) Anta att varje platta har sidan x dm. Gräsmattans sida är 200 dm. Det ryms $\dfrac{200}{x}$ plattor längs gräsmattans sida. Det är 4 sidor och 2 rader med plattor. Dessutom är det 4 hörn med 4 plattor i varje hörn:

$$2 \cdot 4 \cdot \frac{200}{x} + 4 \cdot 4 = \frac{1600}{x} + 16$$

b) Arean =

$$x^2\left(\frac{1600}{x} + 16\right)\text{dm}^2 =$$

$= (1\,600x + 16x^2)$ dm^2

1328 a) $4(x + 3)$ b) $3(y + 3)$

c) $3(5 - a)$ d) $9(2t - 3)$

1329 a) $3(4x - 5y)$

b) $3(3a + 7b)$

c) $4(6s - 7t)$

d) $11(3x + 5y)$

1330 a) $7x(2y + 3z)$

b) $12(x^2 + 2x - 1)$

c) $17b(2a - 1)$

d) $6(t^2 + 5t - 3)$

1331 a) $\dfrac{3x}{2}$ b) $\dfrac{3x}{4}$

c) $\dfrac{a}{6}$ d) $\dfrac{17b}{35}$

1332 a) $\dfrac{4x + 1}{3}$

b) $3{,}5y + 0{,}5$

c) $0{,}25x$

d) $0{,}8x + 0{,}5$

1333 a) $\dfrac{4x + 7}{3}$ b) $\dfrac{4x + 5}{12}$

c) $\dfrac{4x - 9}{5}$ d) $\dfrac{x + 16}{6}$

1334 a) $2xy(x - 3)$

b) $7ab(1 + 6b)$

c) $7st(2t - 5s + 4)$

d) $7(xy^2 + 2xy + 3)$

1335 a) $7xy$

b) $(3b^2 + 4b + 5)$

c) $(a - 2d + 4)$

d) $9x$

1336 $13y(2x^2y - 3x^2 + 1)$

1337 a) $12a^3b^4 - 21a^4b^6 + 6a^3b^2$

b) $84x^2y^8 + 3$

c) $-5st^2 - 36s^4t^2$

d) 0

1338 a) $25x^2 - 9y^2$

b) $6x^3 - 4x^2 + 15xy - 10y$

c) $6a^4b^2 - 9a^5 - 10b^5 + 15ab^3$

d) $9x^2y^2 - 12xy^3 + 35x^3y^3 -$
$- 48x^2y^4$

1339 a) $7x^3y(4y^3 - 3)$

b) $14a^4b^3(ab + 2a - 3b)$

1340 a) $\dfrac{2x+y}{5}$ b) $\dfrac{5b}{2a-3}$

c) $\dfrac{5x}{12y}$ d) $\dfrac{3x-2y}{2x+4y}$

1341 a) $\dfrac{1}{1-a}$

b) $\dfrac{a-ab}{a+b}$

c) $\dfrac{2x^2+2}{(x+1)(x-1)}$

d) $\dfrac{2x^2-2xy-y^2}{x}$

1342 $n = 0$: $(-1)^0 \cdot 2 \cdot 0 = 0$

$n = 1$: $(-1)^1 \cdot 2 \cdot 1 = -2$

$n = 2$: $(-1)^2 \cdot 2 \cdot 2 = 4$

$n = 3$: $(-1)^3 \cdot 2 \cdot 3 = -6$

$n = 4$: $(-1)^4 \cdot 2 \cdot 4 = 8$

Om n är jämnt blir uttrycket positivt, om n är udda blir uttrycket negativt.

Bortsett från tecknet så ökar siffervärdet hela tiden med 2

1343 a) 2^n b) $3n \cdot (-1)^n$

1344 a) Rektangeln: bas $3a$, höjd $3a + b$, area $3a(3a + b)$

Triangeln: bas $b \cdot a$, höjd $2a - b$, area $\dfrac{ba(2a-b)}{2}$

Summan:

$3a(3a+b) + \dfrac{ba(2a-b)}{2} =$

$= 9a^2 + 3ab + \dfrac{2a^2b - b^2a}{2} =$

$= 9a^2 + 3ab + a^2b - \dfrac{b^2a}{2}$

Uttrycket har värdet $9 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5 \cdot 2 +$ $+ 5^2 \cdot 2 - (2^2 \cdot 5 / 2) = 295$ (areaenheter).

BLANDADE UPPGIFTER

1 a) $\dfrac{7}{3}$ b) $\dfrac{5}{8}$

c) $\dfrac{2}{13}$ d) $\dfrac{11}{11} = 1$

2 a) $2^{10} = 1024$

b) $2^6 = 64$

3 a) $9y^2$

b) $1 - 1 - (-1) = 1$

4 a) $x + 1$ b) $9x - 15$

c) $6x - 4$ d) $5{,}9x + 9$

5 a) -2 b) 13

c) 13 d) 10

6 a) -45 b) 1/3

c) $-3\dfrac{1}{3}$ d) 14

7 $3ab + a^2b^2$, värdet är 10

8 a) 2^{-4} b) x^4

9 a) 20 b) 14

c) 13 d) 20

10 a) $4{,}15 \cdot 10^{-1}$

b) $2{,}1 \cdot 10^{-5}$

11 a) 730 000

b) 100 300

12 a) $6(3y - 1)$ b) $3(3 + 4t)$

c) $6a(a - 1)$ d) $4(3 + x)$

13 a) $5 \cdot 10^{14}$ W

b) $2{,}2 \cdot 10^{-7}$ m

14 6 av 24 = $\dfrac{6}{24} = \dfrac{1}{4}$

15 a) $\sqrt{2}$ b) 3

c) $\dfrac{1}{\sqrt{6}}$ d) 2

16 125 gram

17 Summans värde är 2, så t.ex. $\dfrac{4}{3} + \dfrac{2}{3} = 2$

18 a) $8 = 2^3$, så $8^5 = (2^3)^5 = 2^{15}$

b) $16 = 2^4$, så $16^3 = (2^4)^3 = 2^{12}$

19 a) $200 - 3 \cdot 23 - 6 \cdot 18$

b) $200 - (3 \cdot 23 + 6 \cdot 18)$

20 T.ex. $1{,}0 \cdot 10^{-3}$

21 $a = 17$

22 $\dfrac{2}{9}$

23 a) $n^2 = 81 \cdot 10^{16} = 8{,}1 \cdot 10^{17}$

b) $\sqrt{n} = 3 \cdot 10^4$

24 a) 2^7 b) 2^7

25 a) $2^{50} = (2^2)^{25} = 4^{25}$

b) $3^{60} = (3^4)^{15} = 81^{15}$

26 $X = 4$

27 a) $2^{40} = (2^2)^{20} = 4^{20} > 3^{20}$

b) $4^{250} = (2^2)^{250} = 2^{500}$,
$8^{150} = (2^3)^{150} = 2^{450}$.
Alltså 4^{250} störst.

28 a) $3xy(x - 2)$

b) $12x(x - 2)$

c) $3ab(3b + 1 - 2ab)$

d) $3(3xy - 1)$

29 $x(x + 50) = x^2 + 50x$

30 a) 5^{2x-2} b) 5^{2x^2}

31 a) 6^{k-1} b) 2^{-2n}

32 a) Kostnaden för en mobil och en surfplatta.

b) Kostnaden för 3 mobiler och 2 surfplattor.

c) Skillnaden i kostnad mellan en surfplatta och en mobil.

d) Vad man får tillbaka på 9 000 kr om man köper en mobil och en surfplatta.

33 MGN = 198. $\dfrac{86}{198}$ är störst.

34 Välj t.ex. $a = 16$ och $b = 9$.
$\sqrt{a} - \sqrt{b} = 4 - 3 = 1$
$\sqrt{16-9} = \sqrt{7} \neq 1$

35 $(a \cdot b)^3$ betyder
$(a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdot (a \cdot b) =$
$= a \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b \cdot b = a^3 \cdot b^3$

36 a) $\dfrac{3x^2 - 7x - 8}{6x}$

b) $-2x + 15 - \dfrac{25}{x}$

37 a) $\dfrac{2}{x^2 - 1}$

b) $\dfrac{8x^2 - 8x}{(x^2 - 4)(x - 4)}$

38 a) $y(4xy^2 - 1)$

b) $\dfrac{y^2}{2x}$

39 a) $a < 500$
b) $a < 2\,000$

40 a) $\dfrac{x^6}{y^{-10}} = x^6 y^{10}$

b) $\dfrac{3x^2 y}{x^4} \Big/ \dfrac{x^4}{y^{-2}} =$

$= \dfrac{3x^2 y}{x^4} \cdot \dfrac{y^{-2}}{x^4} = \dfrac{3x^2 y^{-1}}{x^8} =$

$= \dfrac{3x^2 y^{-1}}{x^8} = \dfrac{3y^{-1}}{x^6} = \dfrac{3}{x^6 y}$

41 a) $1 - \dfrac{1}{3} - \left(\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5}\right) =$

$= 1 - \dfrac{5}{15} - \dfrac{8}{15} = \dfrac{2}{15}$

b) 90 höns har $90 \cdot 2{,}4 =$
$= 216$ m^2. Om 2 / 15 är
216 m^2 är hela ladugården
15/15, som motsvarar
$(15 \cdot 216) / 2$ m^2 $= 1\,620$ m^2.

42 Om ett tal ska kunna vara både en kvadrat och en kub till ett heltal a, måste talet vara $(a^2)^3 = a^6$. $1^6 = 1$ och $2^6 = 64$ uppfyller detta, liksom $3^6 = 729$. $4^6 =$ 4096 är för stort. 729 är det enda talet mellan 100 och 1 000 som uppfyller villkoret.

43 Mitt emellan talen ligger deras medelvärde:
$(1{,}0 \cdot 10^3 + 1{,}0 \cdot 10^5) / 2 =$
$= 101\,000 / 2 = 50\,500 =$
$= 5{,}05 \cdot 10^4$

44 a) $n = -7$ b) $n = 5$

45 $a = 3$

46 Skriv om talen så att de har samma exponent. Alla exponenter är delbara med 3.
$2^{15} = (2^5)^3 = 32^3$,
$3^{12} = (3^4)^3 = 81^3$,
$4^9 = (4^3)^3 = 64^3$,
$5^6 = (5^2)^3 = 25^3$
Sortera baserna i storleksordning: 7^3, 25^3, 32^3, 64^3, 81^3
Det vill säga: 7^3, 5^6, 2^{15}, 4^9, 3^{12}

KAPITELTEST

1 a) 0,5 b) −10
c) 2 d) 12

2 a) 3^{12} b) 4^5
c) 2^9 d) 3^{-7}

3 a) 78 b) $\dfrac{1}{25}$

4 11

5 a) 216 b) $-\dfrac{1}{4}$

c) −1 d) $\dfrac{2}{3}$

6 a) $3{,}5 \cdot 10^4$
b) $2{,}07 \cdot 10^{-3}$
c) $4{,}10005 \cdot 10^7$

7 a) $7{,}5 \cdot 10^{13}$ Wh
b) $4{,}5 \cdot 10^{-8}$
c) $2{,}3 \cdot 10^{10}$ B

8 a) $\dfrac{11}{5}$ b) 6 c) 3

9 a) $2t + 3$ b) $\dfrac{t}{2}$ c) $14 - t$

10 a) $18x - 2y + 3$
b) $6a - 2ab - 4b$
c) $-5n - 6$
d) $2a$

11 3

12 a) 71,868 b) 2,633

13 1 hg

14 a) $8 \cdot 10^{-6}$ m
b) $4{,}8 \cdot 10^{13}$ st

Kapitel 2

2101 2 röda och 3 gula

2102 1 hg

2103 Anna och Ida väger tillsammans 32 kg. Om tvillingarna väger lika mycket kan var och en av dem maximalt väga 16 kg. För att tvillingarna ska väga mindre än 32 kg måste de alltså väga något mindre än 16 kg var.

2104 a) VL = 5
b) HL = 5
c) ja
d) VL = 4, HL = 1
VL ≠ HL $x = 1$ är alltså inte en rot till ekvationen

2105 $n = 3$

2106 a) $x = 20$
b) $x = 1$
c) $x = 42$
d) $x = 27$

2107 a) $x = 20$
b) $x = 11$
c) $y = 2$
d) $v = 1\frac{6}{7}$

2108 a) $x = 0$ b) $x = -0{,}6$
c) $x = 3\frac{1}{3}$ d) $x = 3$

2109 a) $y = -20$ b) $x = -36$
c) $x = 10$ d) $x = 30$

2110 a) $x = 3$ b) $x = 12$
c) $x = 9$ d) $x = -7$

2111 a) $y = 24$ b) $a = 0{,}4$
c) $r = -0{,}5$ d) $y = 22{,}5$

2112 a) $r = 7$ b) $y = -70$
c) $a = 1$ d) $x = 2$

2113 a) $x = 2{,}5$ b) $x = -1{,}2$

2114 a) $n = 2$ b) $x = 2$

2115 a) $s = 13 / 18$ b) $s = 0{,}4$

2116 a) $x = -0{,}5$ b) $a = 4{,}5$

2117 a) $n = -1 / 3$ b) $n = 2{,}5$

2118 a) $y = 10$ b) $x = 4$

2119 a) $a = 2$ b) $n = 242$

2120 a) $x = 90$
b) $x = \frac{96}{13} = 7\frac{5}{13}$

2121 a) $x = 0{,}5$ b) $x = -0{,}4$

2122 a) 6 cm och 9 cm
b) 54 cm^2

2123 $(x - 3)^2 = 16$
Jan: $(7 - 3)^2 = 4^2 = 16$
Bo: $(-1 - 3)^2 = (-4)^2 = 16$
Båda har räknat rätt

2124 $a = 4$

2125 3

2126 Anta att själva flaskan kostar x kr
$x + (10 + x) = 12$
$2x + 10 = 12$
$x = 1$ kr

2127 Liftkort för barn kostar x kr, för vuxna $2x$ kr. $2 \cdot 2x + 3x =$ $= 3\,500$, $x = 500$. Svar: 500 kr

2128 Eva har gjort misstaget att ändra ekvationen till ett uttryck genom att byta likhetstecknet mot ett plustecken

2129 Andreas har felaktigt skrivit $+ 8x$ istället för $- 8x$, och sedan fått $x = 4$ i stället för $x = -1 / 4$.

2130 Thomas har glömt minustecknet i sista ledet. Han skulle ha skrivit $x = -1 / 4$.

2131 Karins försäljningspris är $500\,000 \cdot 1{,}2 = 600\,000$ kr
Anta att Olle köpte sin lägenhet för x kr
$600\,000 = 0{,}8\,x \Rightarrow$
$x = 750\,000$ kr

2132 Ella 3 000 kr, Pia 2 000 kr och Omar 1 600 kr

2133 Elin 7, Amy 10 och Lisa 20 kakor

2134 Del I 680 m^2, del II 340 m^2, del III 180 m^2

2135 Om Eva åker bil:
$20 \cdot 70 = 1\,400$ kr
Eva åker buss och cyklar:
Anta att hon cyklar x dagar, och åker buss $(20 - x)$ dagar.
$40(20 - x) + 60 \cdot 20 < 1\,400$
$\Rightarrow x > 15$. Eva måste cykla i minst 16 dagar.

2136 $x = 3$

2137 $a = 8$

2138 a) $x = -1\frac{2}{3}$
b) $x = -1$

2139 $x = 1/2$

2140 $x = -3{,}6$

2141 $\frac{1}{x^2 + x} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x + 1}$
MGN = $x(x+1)$
$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{a(x+1)}{x(x+1)} + \frac{b \cdot x}{x(x+1)}$
$1 = ax + a + bx$
Jämför VL och HL. Siffertermerna och x– termerna ska vara lika i båda leden
$\Rightarrow 1 = a$.
$0 = ax + bx$
$a = 1$ och $b = -1$

2142 Vi skriver båda bråken på den gemensamma nämnaren $x(2x+3)$:

$$\frac{2}{x} + \frac{1}{2x+3} =$$

$$= \frac{2(2x+3)}{x(2x+3)} + \frac{1 \cdot x}{x(2x+3)} =$$

$$= \frac{2(2x+3)+x}{x(2x+3)} = \frac{4x+6+x}{2x^2+3x} =$$

$$= \frac{5x+6}{2x^2+3x}$$

VSV

2143 Anta att rektangelns andra sida är x. Cirkelns omkrets är $2\pi r$, rektangelns omkrets är $2(x+r)$. $2\pi r = 2(x+r) \Rightarrow$ $x = r(\pi - 1)$

2144 a) $x_1 = -3, x_2 = 3$
b) $x = -5$
c) $x = 0$
d) $x = -1$

2145 a) $y = 0{,}1$
b) $y_1 = -0{,}4, y_2 = 0{,}4$
c) $y_1 = -2, y_2 = 2$
d) $y = 6$

2146 a) $x = 0$
b) $y = 3$
c) $x_1 = -4, x_2 = 4$
d) $y = -20$

2147 a) $x = 11$
b) $y = -0{,}03$
c) $x_1 = -1/13, \ x_2 = 1/13$
d) $y = \frac{1}{3}$

2148 a) $x = 7$
b) $x_1 = -1, x_2 = 9$
c) $y = -\frac{11}{4}$
d) $y_1 = 2, y_2 = 5$

2149 a) $x = 27$
b) $y = \frac{1}{16}$
c) $x = 125$
d) $y_1 = -3, y_2 = -1, y_3 = 1,$ $y_4 = 3$

2150 a) $x_1 = -3{,}16, x_2 = 3{,}16$
b) $y = 4{,}29$
c) $h_1 = 0{,}00, h_2 = 1{,}31$

2151 a) $x = -0{,}108$
b) $y_1 = -2{,}901, y_2 = -2{,}502,$ $y_3 = 2{,}502, y_4 = 2{,}901$
c) $a = 5219{,}964$

2201 De är negativa.

2202 a) $<$ b) $<$ c) $>$
d) $>$ e) $>$

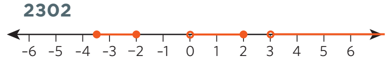
2203 a) $\geq$ b) $\geq$
c) $\leq$ d) $\leq$

2204 c)

2205 a) och b)

2301 a) c) och d)

2302



2303 7

2304 Ja, talet 9

2305]−1, 1[

2306]−∞, ∞[

2307 [0, 1[och]1, 2]

2401 a)]−∞, 2[
b)]0, ∞[

2402 a)]−∞, 0]
b) [π, ∞[

2403 a) $x > 3$ b) $x < 6$
c) $x < 12$ d) $x \geq 27$

2404 a) $x \leq 11$ b) $x > 8$
c) $x < 110$ d) $x \geq 6$

2405 a) $x < 4$ b) $x < -1$
c) $x \geq -2$ d) $x \geq \frac{7}{4}$

2406 a) $x < 5$ b) $x > -2$
c) $x \geq 3$ d) $x \geq 3$

2407 $x > \frac{16}{5} \Rightarrow$ Det minsta heltalet är 4.

2408 6 och 8

2409 Insättning ger $-1 < 0$

2410 $x = 2$, $x = 3$ och $x = 4$.

2411 a) $a = 2$
b) $a = 5$
c) Det finns inget sådant värde på a. Villkoret går inte att uppfylla.

2412 a) $2 < x < 10$
b) $-3 \leq z < -1$
c) $-\pi < y < \pi$

2413 a) $-3 \leq x \leq -2$
b) Det finns inga värden för x som uppfyller båda olikheterna.
c) Båda olikheterna uppfylls då $x > -2$.

2414 a)]−0,1, −0,01[
b) [−1, 1]
c) $\left]\frac{2}{5}, \frac{3}{7}\right]$

2415 a) $\frac{5}{3} < x < 2$
b) $-5 \leq x \leq 2$

2416 a) $-2 < x \leq 3$
b) $0 < y < 1$

2417 $-2 < x < 2$

2418 $x < -8$ eller $x > 8$

2419 $n \geq 110$. Minst 110 kunder.

2420 $n > 16$. Efter 17 månader har Nora mer än 10 000 kr på kontot.

2421 Mindre än 200 minuter.

2422 a) Låt antalet kör-lektioner vara x: $B(x) = 6\,000 + 400x$ och $K(x) = 5\,000 + 550x$

b) $6\,000 + 400x > 5\,000 + 550x \Leftrightarrow x < \frac{20}{3}$. 6 lektioner

2501 a) $y = 1$ b) $y = -3$

c) $y = -8$ d) $y = -2\frac{1}{3}$

2502 $x = 0{,}5y + 2{,}5$

b) $x = 4 - 0{,}125y$

c) $x = 3T - 600$

d) $x = \frac{250 - 5v}{4}$

2503 a) $s = 4{,}48$ b) $t \approx 3{,}39$

2504 a) 32 °F b) 212 °F

c) −18 °C d) 38 °C

2505 a) 12 cm^2 b) 5 cm^2

c) 6 cm d) 5,5 cm

2506 a) 400 kr

b) 80 öre

c) grundavgift, till exempel kostnad för abonnemanget

d) $x \leq 250$, dvs. högst 250 min.

2507 a) $N \approx 6450$ bakterier

b) ungefär 47 timmar

2508 a) T beroende, t oberoende

b) 40 °C

2509 a) $x = \frac{2a}{t - b}$

b) $b = p(1 - a) - 1$

c) $m = \frac{2W}{v^2}$

d) $r = \pm\sqrt{\frac{A}{\pi(1 - b)}}$. Vi kan bortse från den negativa lösningen eftersom radien är en sträcka.

2510 a) $n = \frac{1 + z^2}{1 - z^2}$

b) $T = (t - 2)^2 + 10$

c) $n = \left(\frac{1 + \frac{2}{b} - 2a}{4}\right)^{\frac{2}{3}}$

d) $V = \frac{1}{q^{\frac{3}{2}} - 1}$

2511 $n = 1{,}5$. Börja med att dra roten ur vänsterledet och högerledet.

2512 a) $x = \pm\sqrt{\frac{A + 4}{2}}$ ja, det är möjligt

b) Nej, du behöver kunna lösa en andragrads-ekvation

c) $x = \left(\frac{C}{1000}\right)^{\frac{1}{1{,}04}}$ ja, det är möjligt

d) Nej, än så länge har vi inte löst exponentialekvationer, där exponenten är obekant.

2513 $a = 1 + \frac{1}{b - 1}$. Subtrahera 1 från båda leden.

$a - 1 = \frac{1}{b - 1}$. Båda leden multipliceras med $(b - 1)$.

$(a - 1)(b - 1) = 1$. Båda leden divideras med $a - 1$.

$b - 1 = \frac{1}{a - 1}$

$b = 1 + \frac{1}{a - 1}$. VSV

2514 a) $s = x + 25$

b) $s = y - 12$

c) $s = 20x$

d) $s = 3t - 5$

2515 a) $K(x) = 4\,200 + 800x$

b) $K(12) = 4\,200 + 800 \cdot 12 = 13\,800$, dvs. 13 800 kr

2516 a) Ljusets längd från början

b) 12 timmar

c) $L(x) = 18 - 1{,}4x$

2517 a) $K = 2x$

b) $K = x + y + z$

c) $K = 0{,}2x + 3{,}2y + 1{,}2z$

2518 a) 3 300 kr

b) $y = 1\,200 + 300x$

2519 a) $A = E + 8$

b) $A = 2E$

c) $E = A / 2 + 10$

d) $A - 5 = E + 12$, det vill säga $A = E + 17$

2520 a) y är alltid 3 mer än x.

b) $x = y - 3$

c) $y = x + 3$

2521 MoveIt: $2\,000 + 750 \cdot 5 = 5\,750$

CarryOn: $1\,400 + 900 \cdot 5 = 5\,900$

MoveIt blir billigast

2522 a) 25 st

b) $y = 25 - n$

c) Formeln är rimlig när Martin äter som mest 25 bitar. För fler än 25 bitar ger formeln ett negativt svar på hur många bitar som finns kvar.

2523 a) $A = 160 - 8h$

b) $160 - 8h \geq 0 \quad h \leq 20$

Antal höns måste vara mindre än eller som mest 20, annars gäller inte modellen. Om h är större än 20 blir det fria utrymmet negativt.

2524 a) $T = 225 - 10t$

b) Modellen gäller till dess att plåten har samma temperatur som rummet.

2525 $O = 2x + 2(x - 40) = 4x - 80$

b) $4x - 80 \leq 400 \Rightarrow x \leq 120$. Långsidan kan vara högst 120 m

2526 a) $120 \cdot 60 - 6x^2$

b) $3x \leq 60 \Rightarrow x \leq 20$. Tärningens sida kan vara högst 20 cm

2527 a) $h \geq 0 \Rightarrow 100 - 4{,}91t^2 \geq 0$

$\Rightarrow t \leq \dfrac{10}{\sqrt{4{,}91}} \approx 4{,}51$

b) Om huset står på kanten av en klippa så kan bollen falla längre ner än till marknivån. Huset har en höjd som mäts från marken, så $h = 0$ när bollen fallit lika långt som huset är högt. Om bollen kan falla längre kan fallsträckan bli längre än husets höjd, och då kan h även ha negativa värden.

2528 a) $T = 21 - 21 \cdot 2^{-2} \approx 16 \Rightarrow$ 16° C

b) Temperaturen stiger enligt formeln hela tiden och närmar sig mer och mer 21° C. Med matematiska symboler kan man skriva: $t \to \infty \Rightarrow T \to 21$. Oändlighetssymbolen ∞ används här för att beskriva att det har gått mycket lång tid.

2529 a) Ja, det är en aritmetisk talföljd, differensen är konstant.

b) $a_7 = 14$

c) $a_n = 2 + 2(n - 1) = 2n$

2530 a) Ja, det är en aritmetisk talföljd, differensen är konstant.

b) $a_9 = -11$

c) $a_n = 13 - 3(n - 1) =$
$= 16 - 3n$

2531 a) 7 b) 11

c) 72 d) 420

2532 7 11 15 19 23

2533 $a_n = 2 + 3(n - 1) = -1 + 3n$

2534 $a_n = 24{,}8 - 1{,}8n$

2535 a) $\dfrac{10000(1 + 10000)}{2} =$

$= 50005000$

b) $\dfrac{100(92 - 304)}{2} = -10600$

Talserien är $96 - 4n$, det första talet är 92 och det hundrade talet är -304.

2536 a) Differensen mellan talen är $8 / 2 = 4$

$a_5 = 11$

$a_7 = 11 + 2 \cdot 4 = 19$

b) $\dfrac{8(-5 + 23)}{2} = 72$

Talseriens första tal är $a_1 = -5$ och det åttonde talet är $a_8 = 23$.

2537 Kalla talseriens första tal för x, och det sjätte talet för $8x$.

Talseriens tredje tal är $38 = x + 2 \cdot d$, där d är differensen mellan två på varandra följande tal.

Det sjätte talet går att uttrycka som $8x = x + 5 \cdot d$, det första talet plus fem differenser.

Vi löser ut differensen d:
$d = 1{,}4x$

Ersätt differensen i vår första ekvation med $1{,}4x$:

$38 = x + 2 \cdot 1{,}4x$

Ekvationen har lösningen $x = 10$, vilket ger differensen 14.

Talen är alltså 10, 24, 38, 52, 66 och 80.

2538 $\dfrac{a_5}{a_1} = \dfrac{7}{4} \cdot a_{10} = 180$

Kalla det femte talet för $7x$ och det andra talet för $4x$.

Mellan det andra och det femte talet i den aritmetiska talföljden är det 3 differenser.

Det femte talet $7x = 4x + 3d$, där d är differensen. Det innebär att $3x = 3d$ och $x = d$.

Det tionde talet är det femte talet plus 5 differenser:
$180 = 7x + 5d = 7x + 5x =$
$= 12x$.

Lösningen är
$x = 180 / 12 = 15$, vilket också är differensen i talserien.

Det andra talet är $4x = 60$, så det första talet är $60 - 15 = 45$.

De fem första talen är 45, 60, 75, 90 och 105.

2539 a) 243

b) 1

c) $a_n = a_0 \cdot 3^n = 3^n$

2540 a) 3

b) $a_n = a_0 \cdot 2^n = 3 \cdot 2^n$

2541 a) $a_4 = 3 \cdot 1{,}5^3 = 10{,}125$

b) $a_n = 2 \cdot 1{,}5^n$

2542 $a_n = 0{,}1 \cdot 10^n$

2543 a) $\dfrac{1}{4} \Big/ \dfrac{1}{2} = 0{,}5$

$\dfrac{1}{8} \Big/ \dfrac{1}{4} = 0{,}5$

$\dfrac{1}{16} \Big/ \dfrac{1}{8} = 0{,}5$

Kvoten är hela tiden 0,5, alltså är talföljden geometrisk.

b) $a_n = a_0 \cdot k^n = 1 \cdot 0{,}5^n =$
$= 0{,}5^n$

2544 a) 1 2 4 8 16

b) $1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 31$ och $2^5 - 1 = 32 - 1 = 31$.

c) $2^8 - 1 = 255$

2545 a) $a_3 = a_2 \cdot k = a_1 \cdot k^2$
$6 = 4 \cdot k^2 \Rightarrow k = \sqrt{1{,}5}$

b) $a_7 = a_1 \cdot k^6$
$a_7 = 4 \cdot (\sqrt{1{,}5})^6 = 13{,}5$

2546 a) 200 400 800 1 600 3 200 6 400

b) Geometrisk med kvoten $k = 2$. Kvoten är konstant.

c) $a_n = a_0 \cdot k^n = 100 \cdot 2^n$

d) $100 \cdot 2^n = 100\,000$

Dividera båda sidor med 100:

$2^n = 1000$

Vid början av den tionde timmen gäller $2^{10} = 1024$, dvs. efter knappt 9 timmar.

2547 a) 90 45 22,5 11,25 5,625 2,8125

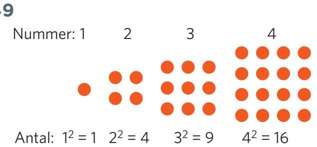
b) Geometrisk med kvoten $k = 0{,}5$. Kvoten är konstant.

c) $a_n = a_0 \cdot 0{,}5^n = 180 \cdot 0{,}5^n$

d) Temperaturen närmar sig men blir aldrig 0 grader. Ju större n blir desto mindre blir talet a_n, men det kan aldrig få värdet 0.

2548 $k = -1$, $a_0 = -1$, $a_1 = a_0 \cdot k$
$a_n = a_0 \cdot k^n = -1 \cdot (-1)^n = (-1)^{n+1}$

2549



2550 Illustrera med rektanglar som har arean $1 \cdot 4$, $2 \cdot 5$, $3 \cdot 6$, $4 \cdot 7$ och så vidare.

Det n:te talet är $n(n + 3) = n^2 + 3n$

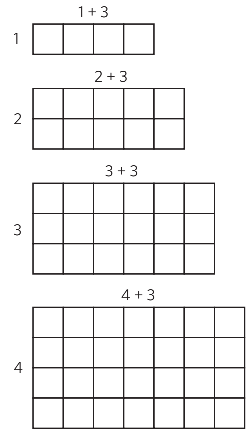
2551 $a_n = n^2$

2552 $a_n = 2n^2$

2553 $a_n = n(n + 2) = n^2 + 2n$

2554 a) $a_5 = 5^2 + 3 \cdot 5 = 40$

b)



2555 $a_n = n^3$

2556 $a_n = n^n$

2557 $a_n = 2n^2 - 1$

2558 $a_n = 0{,}5n^2 + 0{,}5n$

2559 $a_n = n \cdot (-1)^{n-1}$

2560 a) $a_n = \dfrac{n}{n+1}$

b) $\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{4}{5} \cdot \ldots \cdot \dfrac{n}{n+1} =$

$= \dfrac{1}{n+1}$ eftersom nämnaren i det första bråket förkortas med täljaren i nästa bråk. Och så vidare tills allt förkortats utom täljaren i det första bråket och nämnaren i det sista bråket.

c) $\dfrac{1}{2} + \dfrac{n}{n+1} = \dfrac{n+1+2n}{2(n+1)} =$

$= \dfrac{3n+1}{2n+2}$ VSV

2561 a) $\dfrac{n^2}{2n-1}$

b) $\dfrac{n^2}{2n-1} - 1 =$

$= \dfrac{n^2 - (2n-1)}{2n-1} =$

$= \dfrac{n^2 - 2n + 1}{2n-1} = \dfrac{(n-1)^2}{2n-1}$

VSV

BLANDADE UPPGIFTER

1 a) $x = 8$ b) $x = -10$

2 a) $y = -2x + 7$

b) $y = x - 4$

3 a) $VL = \dfrac{5}{3}$

b) HL = 3

c) VL = 2 HL = 4 nej, $x = 2$ är inte en rot till ekvationen

d) VL = 1 HL = 1 ja, $x = 1$ är en lösning till ekvationen

4 a) $x < -4$ b) $x > 4$

c) $x > 2$ d) $x < -7$

5 a) $v = -3{,}5$ b) $u = -3{,}5$

6 a) $x = \dfrac{1}{2}$ b) $x = -15$

c) $z = 12$ d) $x = -9$

7 a) $x = 8$ b) $x = 0{,}6$

c) $x = -1{,}5$ d) $x = 10$

8 a) $x = 32$ b) $v = 3$

9 a) 6 b) 5

10 a) −2 b) 1

11 a) $y = 6x$

b) 4 tim 20 min

12 a) aritmetisk, differensen konstant

b) $a_{10} = 25$

c) $a_n = 3n - 5$

13 Abebe 10 kr, Brita 15 kr, Carl 25 kr

14 $a_n = 0{,}7 + 0{,}3n$

15 a) $K = 20 + 15x$

b) 395 kr

c) 38 km

16 a) 9 chokladbitar

b) 6 chokladbitar

17 a) $(420 - 14t)$ liter

b) 14 liter/min

c) kl 19.47

18 a) $(25 + 6{,}50x)$ kr

b) 9 gurkor

19 år 2009

20 a) $x > -19{,}5$ b) $x > 0{,}8$

c) $x \leq -15$ d) $x \leq 1$

21 a) $y = 21{,}6$ b) $x = \dfrac{5}{13}$

22 a) $x = 2$ b) $x = 2$

23 a) $-3 \;\; 2 \;\; -1 \;\; 0 \;\; 1 \;\; -2 \;\; 3 \;\; -4 \;\; 5$

b) $a_n = (4 - n)(-1)^n \ldots$

24 20 kr

25 cirka 6 500 fåglar

26 $r = \sqrt[3]{\dfrac{3V}{4\pi}} = \sqrt[3]{\dfrac{3}{4\pi}}\ \text{m} \approx$

$\approx 0{,}62$ m = 6,2 dm

27 17 flickor från början

28 a) $x = 6$ b) $x = 7$

29 a) T.ex. $3b + 3a + 3m + 2p$

b) Minst 16 kr 40 öre, mest 21 kr 50 öre

30 $1\,500 + 14{,}5x \leq 2\,900$

$x \leq 96{,}6$

31 14 l.e. ≤ omkretsen < 24 l.e.

32 $\dfrac{7x + 2}{2} = 3{,}5x + 24$

$7x + 2 = 2(3{,}5x + 24)$

$7x + 2 = 7x + 48$ x tar ut varandra

VL = 2 HL = 48

ekvationen har ingen lösning

33 a) $z = \sqrt[3]{\dfrac{3x - 3y}{x}}$

b) $z = \left(\dfrac{V \cdot \pi}{4}\right)^4 + 1$

34 $a_n = 81 - n^2$

35 $\dfrac{3x^2}{x^2} < \dfrac{2x^3}{x^2}$

$3 < 2x$, $x > 1{,}5$

Dvs. 2, 3, 4, …

36 a) Vi undersöker vilka alternativ som finns:

Kort sida: 1 cm.
Lång sida ≤ 9 cm.

Kort sida: 2 cm.
Lång sida ≤ 8 cm.

Kort sida: 3 cm.
Lång sida ≤ 7 cm

Kort sida: 4 cm.
Lång sida ≤ 6 cm

Om den korta sidan är x är långsidan $\leq 10 - x$.

b) Den kortaste omkretsen är 4 cm, om båda sidorna har längden 1 cm, och den längsta är 20 cm.

4 cm ≤ omkrets ≤ 20 cm.

37 a) Om a har ett annat värde än 1 kan b väljas fritt, t.ex. $a = 2$, $b = 6$. Då har ekvationen lösningen $x = 10 / 3$.

b) T.ex. $a = 1$ och $b = 3$. Ekvationen blir då $3x + 15 = 3x + 10$, som saknar lösning.

c) Om $a = 1$ och $b = 2$ blir vänsterledet $3x + 10$ och högerledet $3x + 10$. Vänsterledet har samma värde som högerledet oavsett vad x har för värde. Då finns det oändligt många lösningar.

38 $2x + 5 = \dfrac{16x + 40}{8}$;

$\text{HL} = \dfrac{16x}{8} + \dfrac{40}{8} = 2x + 5$

VL = HL för alla x, alltså oändligt antal lösningar då det inte spelar någon roll vad x har för värde.

39

$a_n = n^2$	$a_n = 2^n$
$a_1 = 1$	$a_1 = 2$
$a_2 = 4$	$a_2 = 4$
$a_3 = 9$	$a_3 = 8$
$a_4 = 16$	$a_4 = 16$
$a_5 = 25$	$a_5 = 32$
$a_6 = 36$	$a_6 = 64$

a) Ekvationen har lösningarna $x = 2$ och $x = 4$.

b) Nej, det kan inte finnas några fler lösningar. Värdet av 2^x växer snabbare än värdet av x^2 när x ökar förbi $x = 4$.

40 Rektangelns area $3x \cdot 2y$, triangelns area $\dfrac{2x \cdot 1{,}5y}{2}$.

$\dfrac{\dfrac{2x \cdot 1{,}5y}{2}}{3x \cdot 2y} = \dfrac{1{,}5}{6} = \dfrac{1}{4}$.

Triangelns area är 1/4 av rektangelns area

41 Arean av området är $x(x + 4)$ m², och omkretsen är $2x + 2(x + 4) = 80$ m. Den kortaste sidan kan, på grund av omkretsen, maximalt vara 18 m. Då blir arean $18 \cdot (18 + 4)$ m² = 396 m², dvs. för stor om arean maximalt får vara 200 m².
Om Anna väljer att göra kortsidan 17 m blir arean $17 \cdot 21$ m² = 357 m².

Vi ska hitta ett heltal x som gör att $x(x + 4)$ får ett värde så nära 200 som möjligt. Vi testar oss fram med räknaren och hittar $x = 12$, som ger arean $12 \cdot 16\ m^2 = 192\ m^2$. Värdet $x = 13$ ger arean $13 \cdot 17\ m^2 =$ $= 221\ m^2$, som är för stort.

KAPITELTEST

1 a) $x > \frac{7}{5}$ b) $x \geq -\frac{5}{2}$

2 b)

3 a) aritmetisk

b) $a_n = 43 - 3n$

4 a) $z = \frac{3x - 5}{2}$

b) $z = \frac{3x - 2k}{x}$

c) $z = \frac{(x + 1)^3}{3}$

d) $z = \frac{2x - 1}{3 - 4x}$

5 a) 75 b) $a_n = 2a^2 + 3$

6 $x = 9$

7 $x \leq -15$

8 Ellen äter x av hela kakan (1):

$$x + \frac{x}{2} + \frac{x}{2} + \frac{1}{6} = 1$$

Ekvationen har lösningen $x = \frac{5}{12}$. Ellen äter 5/12, Lisa äter 5/24 och Vilgot äter 9/24.

9 $a = 27$

10 a) $K = 2{,}50 + x \cdot 10{,}90$

b) $x \leq 6$ i formeln. (Även $x > 0$, vilket är självklart)

c) Han behöver köpa 3 plastkassar. Kostnaden blir $(3 \cdot 2{,}50 + 16 \cdot 10{,}90)$ kr $=$ $= 181{,}90$ kr.

11 a) Mårten cyklar 1 km på 5 minuter. På en minut hinner Mårten 0,2 km. $s = 0{,}2t$.

b) $38 = 0{,}2t$ har lösningen $t = 190$ minuter $= 3$ h 10 minuter.

12 Kalla mängden deg för D. Då är $D = 580 - 20n$

b) Hon kan bara baka tills degen är slut, det vill säga tills $D = 0$. Det gör att det finns en begränsning i hur många kakor hon kan baka. Antalet kakor $n \leq 29$ stycken.

13 a) $T(20) =$ $= (70 + 2^{-0{,}08 \cdot 20} + 23)\ °C \approx$ $\approx 46\ °C$

b) $t = 0$ ger $T(0) = 93\ °C$

c) Efter mycket lång tid, då t har ett stort värde, kommer temperaturen att närma sig 23 °C. Faktorn $2^{-0{,}08 \cdot t}$ kommer att bli mindre och mindre, och så småningom återstår bara termen 23 i uttrycket. Det är alltså rumstemperaturen.

DISKUTERA, RESONERA OCH MODELLERA

S. 79

Kvadrater

- Man måste dra 7 streck för figur 2 och 10 streck för figur 3. För varje extra kvadrat som bildas måste man dra tre streck till.
- Antalet streck som behövs för n figurer är alltså $a_n = 1 + 3n$, där n är figurnumret. $n = 1, 2, 3, \ldots$
- För figur 20 krävs alltså $1 + 3 \cdot 20 = 61$ streck.
- Med 100 streck: $1 + 3n = 100$, $n = 33$ kvadrater i rad.

Prickar

- För figur 4 krävs 4 extra prickar, alltså totalt 14 prickar.
- För varje figur ökar antalet prickar med 4. Antalet prickar som behövs för figur nummer n är alltså $a_n = 4n - 2$, där n är figurnumret. $n = 1, 2, 3, \ldots$
- Figur nummer 50 kräver alltså $4 \cdot 50 - 2 = 198$ prickar.
- Med 90 prickar: $90 = 4n - 2$, $n = 23$. Figur nummer 23 kan ritas.

S. 88

- Talföljden 3, 6, 9, 12, 15, … är $a_n = a_{n-1} + 3$ där $a_1 = 3$. $n = 2, 3, 4, \ldots$
- Om $a_1 = b$ och differensen är d är talföljden $a_n = a_{n-1} + d$, $a_1 = b$. $n = 2, 3, 4, \ldots$
- I talföljden 1, 2, 4, 8, … är varje tal dubbelt så stort som det föregående talet. Alltså är $a_n = 2 \cdot a_{n-1}$, $a_1 = 1$. $n = 2, 3, 4, \ldots$
- Talföljden 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, … är $a_n = a_{n-1} + n$. Till det föregående talet läggs det aktuella talets nummer i följden. $a_1 = 1$, $n = 2, 3, 4, \ldots$
- I Fibonaccis följd är ett tal summan av de två föregående talen, från och med det tredje talet. Det behövs alltså två starttal, och talföljden kan beskrivas med $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ och $a_1 = 1$ samt $a_2 = 1$. Talnumret $n \geq 3$.
- Om det andra talet i en talserie är 4 och det fjärde talet är 16, kan talföljden till exempel vara aritmetisk med differensen 6: $a_n = a_{n-1} + 6$, $a_1 = -2$. $n = 2, 3, 4, \ldots$ Talföljden kan också vara geometrisk: $a_n = 2 \cdot a_{n-1}$, $a_1 = 2$, $n = 2, 3, 4, \ldots$

Kapitel 3

3101 a) 1,01 b) 0,85
c) 2,00 d) 0,50

3102 a) ökning med 8 %
b) minskning med 25 %
c) minskning med 0,5 %
d) ökning med 100 %

3103 18 450 kr

3104 135 kr

3105 a) 1,15 b) 15 %

3106 a) 0,80 b) 20 %

3107 37,5 %

3108 15 811 kr

3109 725 kr

3110 ca 4,2 %

3111 ca 59 %

3112 a) 675 kr b) 33 %

3113 a) 800 000 kr
b) Inköp: 1 400 000 kr
Försäljning: 1 440 000 kr
Vinst: ca 2,86 %
c) Skatt: 22 % av 120 000 kr = 26 400 kr. Då återstår 13 600 kr av vinsten, vilket motsvarar 0,97 % av inköpsvärdet.

3114 14,44 %

3115 Om datorn kostar 10 000 kr utan moms kostar den 12 500 kr med moms. När hon köper datorn får hon betala 12 500 kr. Av det värdet är 2 500/12 500 moms, det vill säga 20 %.

3116 Hanna: 299 / 4 = 74,75 kr/GB. Girma: 33,25 kr/GB. Hannas kostnad är 41,50 kr mer per GB vilket är ca 125 % mer än vad Girma betalar.

3117 Om en sida ökar med 20 % multipliceras dess längd med 1,20. Om en sida minskar med 20 % multipliceras sidans längd med 0,80. Totalt blir arean $1{,}20 \cdot 0{,}80 = 0{,}96$ gånger så stor. Arean minskar alltså med fyra procent, och Hanna har rätt.

3118 Totala förändringsfaktorn ska vara 1,00. Förändringen $1{,}10 \cdot 0{,}90 \cdot x = 1{,}00$ där x är förändringsfaktorn för den tredje sidan. Lösningen är $x \approx 1{,}01$, det vill säga sidans längd ska ökas med ungefär 1 %.

3119 Om radien ökar med 5 % blir volymen

$$\frac{4\pi(1{,}05r)^3}{3} = \frac{4\pi r^3 \cdot 1{,}05^3}{3} \approx$$

$$\approx \frac{4\pi r^3}{3} \cdot 1{,}158$$

Volymen har alltså ökat med ca 15,8 %.

3120 $1{,}02^3 \approx 1{,}061$, det vill säga en ökning med 6,1 %.

3121 a) 3 700 / 2 700 ≈ 1,37, en ökning med 37 %
b) $1{,}37^{1/8} \approx 1{,}04$, en ökning med ca 4 % per år.

3122 Total förändringsfaktor på 10 år: 1,32. Ökning per år: $1{,}32^{1/10} \approx 1{,}028$, alltså ca 2,8 % per år.

3123 a) $0{,}75 \cdot 1{,}30 = 0{,}975$
b) $0{,}975 \cdot 1900 \approx 1850$ kr

3124 a) Förändringsfaktorn är 4 / 2 000 = 0,002 på 50 år. Per år blir minskningen $0{,}002^{1/50} \approx 0{,}883$ vilket motsvarar en minskning med 11,7 % per år.
b) Förändringsfaktorn ska då vara 2 000 / 4 = 500 på 50 år. På ett år blir förändringsfaktorn då $500^{1/50} \approx 1{,}132$ det vill säga en ökning med 13,2 % per år.

3125 a) Priset ökade med 100 %.
b) Fördubbling innebär en förändringsfaktor 2,00.
c) $2{,}00^{1/20} \approx 1{,}035$ alltså ca 3,5 % per år.
d) På två år ökade priset $1{,}035^2 = 1{,}071$, det vill säga med 7,1 %.

3126 Du sätter in 5 000 kr på banken. Första och andra året får du 3 % i ränta på dina pengar. De tre efterföljande åren är räntan 4 %. Hur stort kapital har du efter fem år?

3127 a) Förändringsfaktorn är 0,5 på 15 år. Per år: $0{,}5^{1/15} \approx 0{,}955$ alltså en minskning med 4,5 % per år.
b) Efter 10 år återstår $0{,}955^{10} \approx 0{,}631$, alltså 63,1 %.

3128 Förändringsfaktorn är $0{,}998 \cdot 0{,}996 \cdot 0{,}991 \cdot 1{,}007 \cdot$ $\cdot\, 1{,}013 \approx 1{,}0049$ alltså en ökning med 0,49 %.

3129 4,5 % förlust innebär förändringsfaktorn 0,955. Efter 3,5 år var den totala förändringsfaktorn 0,851, det vill säga 85,1 % av kapitalet fanns kvar. 2 696 riksdaler motsvarar 85,1 % och 3 167 riksdaler motsvarar 100 %.

3130 a) Förändringsfaktorn är $1 \cdot 0{,}95 \cdot 0{,}90 = 0{,}855$, alltså 14,5 % rabatt.
b) Kalla förändringsfaktorn den fjärde gången för x. $0{,}855 \cdot x = 0{,}73$ ger $x \approx 0{,}854$. Han fick alltså 14,6 % rabatt den fjärde gången.

3131 Prishöjningen är
590 / 390 ≈ 1,513 alltså 51,3 %.
Om en prishöjning är t.ex.
20 % måste den andra vara
1,513 / 1,20 ≈ 1,26 alltså 26 %.

3132 Jämfört med Francis är hennes hastighets totala förändringsfaktor 0,93 · x, där x är förändringsfaktorn för nedre delen av backen. Produkten måste vara större än 1 för att hon ska vinna, och det gör att x minst måste vara 1,075. Hon måste åka 7,5 % snabbare i nedre delen av backen.

3133 a) 0,5/200,5 = 0,00249 alltså 0,249 %.
b) Emma vill ha 0,498 % socker i sitt kaffe. Kalla mängden socker för x. Då är $x/(200 + x) = 0{,}00498$. Ekvationen har lösningen $x \approx 1{,}00098$, dvs. ca 1,0 g.

3201 240 kr

3202 a) 1 700 kr
b) 21 700 kr

3203 a) 31 200 kr
b) 7 800 kr

3204 a) 151,8 %
b) 17 591 kr

3205 Alice (sparräntan är ca 1,76 %)

3206 35 · 12 = 420 kr per år.
420 / 1 855 ≈ 0,226 alltså 22,6 %.

3207 Årsräntan var 4 800 kr så räntesatsen var 10,7 %.

3208 a) 40 460 kr per år, 3372 kr per månad.
b) Årsräntan blir 52 360 kr, per månad blir det 4 363 kr vilket är 991 kr mer per månad.

3209 Det andra lånets ränta är 2 775 kr per månad. Lånet är på 900 000 kr.

3210 a) 8 stycken
b) 1 000 kr

3211 (225 + 12 · 30) kr = 585 kr

3212 a) 1 549 kr dyrare
b) ca 31,6 %

3213 573 kr

3214 a) 595 kr
b) 525 kr
c) 9,9 %

3215 a) 1 138 kr b) 1 134 kr

3216 a) 7 284 kr
b) 6 963 kr
c) 3 210 kr

3217 a) 300 st
b) 667 kr
c) 1 083 kr

3218 a) Ränta: 960 kr
Amortering: 4 000 kr
Avgifter: 295 + 25 kr
Totalt: 5 280 kr
b) Aviavgifter: 6 · 25 = 150 kr
Uppläggningskostnad: 295 kr
Ränta första året: 960 + 800 = 1 760 kr
Ränta andra året: 640 + 480 = 1 120 kr
Ränta tredje året: 320 + 160 = 480 kr
Skuld: 24 000 kr
Totalt: 27 805 kr

3219 Alternativ 1
Avgifter: 250 + 12 · 30 = = 8 610 kr
Amortering: 667 kr/månad
Totalt: 8 000 + 610 = 8 610 kr

Alternativ 2
Amortering: 2 000 kr/halvår
Ränta: 496 + 372 + 248 + + 124 = 1 240 kr
Totalt: 8 000 + 1 240 = = 9 240 kr
Alternativ 1 kostar alltså minst.

3220 Olle får 7,50 kr i ränta för de första 1 000 kr han sätter in.
För den andra får han $\frac{5}{12}$ av årsräntan, vilket är 6,25 kr.
För den tredje får han $\frac{4}{12}$ av årsräntan, vilket är 5,00 kr osv.
Totalt får Olle 26,25 kr.

3221 a) 107,6 %
b) 213,4 %
c) 20,2 %

3222 Den kostar 303,5 % av 20 kr ≈ 61 kr

3223 123 kr. Procentuell ökning är 65,7 %.

3224 a) 24 % ökning
b) 51,2 % ökning
c) 508 kr

3225 a) 51,0 % b) 255 kr

3226 a) 3 786 kr
b) mellan 2003 och 2004
c) 76 kr

3227 a)

År	1990	1994	1998	2002	2006
Index	100	109	119	125	136

b) 1,95 %

3228

År	1995	1998	2001	2004	2007
Lön	14 400	15 000	16 800	18 120	19 500
Index	96	100	112	121	130

3301 a) Siffrorna 1–8

b) $\frac{1}{8}$

c) $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

d) 10 stycken

3302 a) $\frac{3}{7}$ b) 12 stycken

3303 a) $\frac{3}{8}$

b) $\frac{5}{8}$ motsvarar 24 gånger. Han har spelat ca 38 gånger.

3304 a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{52}$

c) $\frac{4}{52} = \frac{1}{13}$ d) $\frac{24}{52} = \frac{6}{13}$

3305 a) $\frac{5}{500} = \frac{1}{100}$

b) 9 av 500 är vinster. Sannolikheten för nitlott är alltså $\frac{491}{500}$.

c) 2 % vinstchans motsvarar 9 vinstlotter. Det måste finnas 450 lotter kvar i lotteriet, och alltså har man dragit 50 nitlotter.

d) Helt säker på vinst blir du först när det bara finns vinstlotter kvar. Du behöver köpa 491 lotter för att vara helt säker på att nästa blir en vinst. Svar: 492 st.

3306 2 % av alla bilar motsvarar 8 stycken. Det står alltså 400 bilar på parkeringen. 9 % av 400 = 36 BMW.

3307 a)

b) $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$

c) $\frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{36}$

d) $\frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$.
Hon kan antingen få en sexa först och sedan inte en sexa, eller tvärtom.

3308 a)

b) $\frac{1}{36}$

c) $\frac{3}{36} = \frac{1}{12}$

d) Summan 7, som har högst sannolikhet.
$P(\text{summan } 7) = \frac{1}{6}$.

3309 a) $\frac{7}{10} \cdot \frac{7}{10} = \frac{49}{100}$ (49 %)

b) $\frac{7}{10} \cdot \frac{3}{10} = \frac{21}{100}$ (21 %)

c) $P(\text{blå, vit}) + P(\text{vit, blå}) =$
$= \frac{7}{10} \cdot \frac{3}{10} + \frac{3}{10} \cdot \frac{7}{10} = \frac{42}{100}$
(42 %)

d) $\frac{3}{10} \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{3}{10} = \left(\frac{3}{10}\right)^3 =$
$= \frac{27}{1000}$ (27 ‰)

3310 a) $\frac{7}{10} \cdot \frac{6}{9} = \frac{42}{90}$

b) $\frac{7}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{21}{90}$

c) $P(\text{blå, vit}) + P(\text{vit, blå}) =$
$= \frac{7}{10} \cdot \frac{3}{9} + \frac{3}{10} \cdot \frac{7}{9} = \frac{42}{90}$

d) $\frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{8} = \frac{6}{720} = \frac{1}{120}$

3311 a) $0{,}12 \cdot 0{,}12 = 0{,}0144$
(1,44 %)

b) $P(\text{strike, inte strike}) +$
$+ P(\text{inte strike, strike}) +$
$+ P(\text{strike, strike}) =$
$= 0{,}12 \cdot 0{,}88 +$
$+ 0{,}88 \cdot 0{,}12 +$
$+ 0{,}12 \cdot 0{,}12 = 0{,}2256$
(22,56 %)

3312 a) $P(\text{första jämn}) = \frac{1}{2}$
$P(\text{fyra jämna i rad}) =$
$= \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$

b) $P(\text{fyra olika jämna siffror})$
$= \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} =$
$= \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 7} = \frac{1}{42}$

3313 a) Andel inte typ $A = 0{,}12 +$
$+ 0{,}38 + 0{,}06 = 0{,}56$
P(3 personer som inte har A) $= 0{,}56^3 \approx 0{,}176 =$
$= 17{,}6$ %

b) $P(\text{två med AB}) = 3 \cdot 0{,}06 \cdot$
$0{,}06 \cdot 0{,}94 \approx 0{,}010 = 1{,}0$ %

3314 $P(\text{rött två av tre gånger}) +$
$+ P(\text{rött tre gånger}) =$
$= P(\text{rött, rött, grönt}) +$
$+ P(\text{rött, grönt, rött}) +$
$+ P(\text{grönt, rött, rött}) +$
$+ P(\text{rött, rött, rött}) =$
$0{,}75 \cdot 0{,}82 \cdot 0{,}15 +$
$+ 0{,}75 \cdot 0{,}18 \cdot 0{,}85 +$
$+ 0{,}25 \cdot 0{,}82 \cdot 0{,}85 +$
$+ 0{,}75 \cdot 0{,}82 \cdot 0{,}85 =$
$= 0{,}904 = 90{,}4$ %

3315 $P(1, >1) + P(2, >2) + \ldots +$
$+ P(7, >7) =$
$= \frac{1}{8} \cdot \frac{7}{8} + \frac{1}{8} \cdot \frac{6}{8} + \ldots + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8}$
I nämnaren står $8 \cdot 8 = 64$.
I täljaren står
$7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 28$.
Sannolikheten är alltså
$\frac{28}{64} = \frac{7}{16}$

3316 Kulan som flyttas kan antingen vara svart eller vit.

Svart kula flyttas: Det finns 5 svarta av 8 kulor. P(svart från andra burken) = $\frac{5}{8}$

Vit kula flyttas: Det finns 4 svarta av 8 kulor. P(svart från andra burken) = $\frac{4}{8}$.

Sannolikheten för att han drar en svart kula ur andra burken är:

P(svart flyttas, svart) +
+ P(vit flyttas, svart) =

$= \frac{2}{5}\cdot\frac{5}{8}+\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{8}=\frac{22}{40}=\frac{11}{20}$.

3317 Svart kula flyttas: P(en vit ur andra burken) = $\frac{2}{6}$

Vit kula flyttas: P(en vit ur andra burken) = $\frac{3}{6}$

Sannolikheten för att dra två vita ur andra burken utan återläggning är då:

P(svart flyttas, vit, vit) +
+ P(vit flyttas, vit, vit) =

$= \frac{2}{5}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{5}+\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5}=\frac{22}{150}=\frac{11}{75}$

3318 P(2 hanar, 2 honor) =

$= \left(\frac{1}{4}\right)^2\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2\cdot 6=\frac{27}{128}\approx$
$\approx 0{,}21 = 21\ \%$

De två hanarna kan plockas upp på 6 olika sätt.

3319 a) Att man får mer än 5

b) Att man får en summa större än 11

c) Att alla är nitlotter

d) Att man möter minst en person som är 15 år eller äldre

3320 P(minst en sexa) = 1 – P(ingen sexa) = $1-\left(\frac{5}{6}\right)^2=\frac{11}{36}$

3321 Komplementhändelsen är ”summan 12”. P(summan 11 eller lägre) = 1 – P(summan 12)

3322 P(minst en flicka) =
= 1 – P(alla pojkar) =

$= 1-\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{7}{8}$

3323 P(minst en kung) =
= 1 – P(ingen kung) =

$= 1-\left(\frac{36}{39}\right)^3\approx 0{,}21$

3324 P(kung) = 1 – P(ingen kung)

$= 1-\frac{12}{13}\cdot\frac{11}{12}\cdot\frac{10}{11}\approx 0{,}23$

3325 P(minst en grön) = 1 – P(ingen grön) = $1-\left(\frac{3}{4}\right)^3=\frac{37}{64}$

3326 P(stanna minst två gånger) =
= 1 – P(stanna mindre än två gånger)

P(stanna mindre än två gånger) = P(stanna 0 gånger)
+ P(stanna 1 gång) =
= 0,25 · 0,18 · 0,15 +
+ 0,75 · 0,18 · 0,15 +
+ 0,25 · 0,82 · 0,15 +
+ 0,25 · 0,18 · 0,85 = 0,096

P(stanna minst två gånger) =
= 1 – 0,096 = 0,904 = 90,4 %

3327 P(9 eller färre) = 1 – P(10) =
= 1 – $0{,}66^{10}\approx 0{,}984 = 98{,}4\ \%$

3328 P(minst ett vanligt) =
= 1 – P(inget vanligt) =

$= 1-\frac{10}{15}\cdot\frac{9}{14}\cdot\frac{8}{13}\cdot\frac{7}{12}\approx$
$\approx 0{,}846 = 84{,}6\ \%$

3329 a) P(bulls eye) =
= 1 – P(inget bulls eye) =
= 1 – $0{,}9^{10}\approx 0{,}65$

b) P(minst en 9:a) =
= 1 – P(ingen nia) =
= 1 – $0{,}85^{10}\approx 0{,}80$

3330 $\frac{41}{64}$. Om den första tärningen visar 1 spelar det ingen roll vad den andra visar, summan blir inte större än 6. Om den första tärningen visar 2 måste den andra tärningen visa en femma, och det kan den göra på 3 sätt (det finns tre femmor). Om den första tärningen visar 3 måste den andra tärningen visa 4 eller mer, och det kan den göra på 5 sätt (det finns två fyror och tre femmor), osv.

Summera alla gynnsamma utfall. Antalet möjliga utfall är 64.

3331 Humlorna rör sig oberoende av varandra. Sannolikheten att en humla befinner sig vid en blomma är 0,25.

P(minst en humla) =
= 1 – P(ingen humla) =
= 1 – $0{,}75^{10}\approx 0{,}944 = 94{,}4\ \%$

3332 P(minst en vara saknas) =
= 1 – P(ingen vara saknas) =
= 1 – 0,97 · 0,95 · 0,96 · 0,98 ≈
≈ 0,13 = 13 %

BLANDADE UPPGIFTER

1 a) 12 procentenheter
b) 20 %

2 a) 1,30 b) 1,023
c) 0,985 d) 2,10

3 P(5 eller 6) = $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

4 Om snörets längd är x är den återstående längden $0{,}70x$.

5 P(en blåögd) = $\frac{14}{32}=\frac{7}{16}$

6 a) $\frac{240}{300}=0{,}80$

b) minskning med 20 %

7 a) $1{,}25 \cdot 1800$ kr = 2 250 kr

b) $\dfrac{150}{2\,250} = 0{,}067$.

Ungefär 6,7 %.

8 $1{,}033x = 24\,000$, $x = 23\,233$, dvs. 23 233 kr.

9 $\dfrac{10}{25} = 0{,}40$, alltså 40 %

10 $0{,}046 \cdot 15\,000 = 690$ kr

11 a) 2 av 20 = 10 %

b) 4 av 20 = 20 %

12 $1{,}105x = 36$, $x = 32{,}60$, dvs. 32,60 kr

13 $\dfrac{48}{420} \approx 0{,}114 = 11{,}4$ %

14 Moms: $0{,}12 \cdot 280$ kr = 33,60 kr. Pris exklusive moms: 246,40 kr

15 $P(\text{summan } 9) = \dfrac{4}{36} = \dfrac{1}{9}$

16 a) Gustav hade 10 fiskar från början, så han fick 2 stycken.

b) Anta att förändringsfaktorn i samband med Johannas födelsedag var x.
$1{,}20 \cdot x = 1{,}50$. $x = 1{,}25$.
Ökningen var 25 %.

17 $P(\text{fyra, fyra}) = \dfrac{1}{10} \cdot \dfrac{1}{10} = \dfrac{1}{100}$

18 $0{,}08x = 56$, $x = 700$, dvs. 700 elever

19 a) Gustav: 60 kr
Lotta: 120 kr

b) 100 % mer

c) 50 % mindre

20 Årsränta: $0{,}034 \cdot 560\,000$ kr = = 19 040 kr.

Per månad: 19 040 kr/12 = = 1 587 kr

Första månaden ska hon betala (2 000 + 1 587) kr = 3 587 kr.

21 Elias tänker att 20 % hela tiden är samma belopp i kronor, vilket inte stämmer.

Om en varas pris är x kr och höjs med 20 % är det nya priset $1{,}20x$. Sänker man sedan priset med 20 % är det nya priset $1{,}20x \cdot 0{,}80 = 0{,}96x$. Ursprungspriset har alltså minskat med 4 %!

22 $x \cdot 1{,}05^2$

23 $x \cdot \left(1 - \dfrac{p}{100}\right)$

24 Arean = längd · bredd = $x \cdot y$.

Ny längd: $1{,}40x$

Ny bredd: $0{,}75y$

Ny area: $1{,}40x \cdot 0{,}75y = 1{,}05xy$

Arean har ökat med 5 %.

25 a) 19 stycken

b) 19 %

26 a) $\text{P(summan 10)} = \dfrac{3}{36} = \dfrac{1}{12}$

b) $P(\text{summan 2, 3 eller 4}) =$
$= \dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}$

27 Förändringsfaktorn $0{,}5 = 0{,}92^x$ där x är antalet år. Prövning med räknaren ger att $x = 8$ ger förändringsfaktorn 0,51.

28 Om försäljningspriset är x måste $0{,}95 \cdot x = 1{,}25 \cdot 110\,000$. Lösningen är $x = 144\,737$ (kr)

29 Det fanns 50 chefer och 450 övriga anställda från början, det vill säga 10 % chefer. Efter ökningen finns 50 chefer och 500 övriga anställda, det vill säga 9,09 % chefer.

Minskningen är 0,91 procentenheter, och i procent räknat är minskningen 9,1 %.

30 Förändringsfaktorn är $1{,}11^5 \approx 1{,}685$, alltså en ökning med 68,5 %.

31 Förändringsfaktorn är $1{,}15 \cdot 0{,}70 = 0{,}805$, det vill säga en minskning med 19,5 %.

32 a) 25 %

b) $1{,}25 \cdot x = 1{,}50$. $x = 1{,}20$.
Ökningen var 20 % andra gången.

33 a) Amortering: 12 500 kr per år

Ränta: 4 500 kr per år

Första årets inbetalning: 17 000 kr

b) Sista året återstår 12 500 kr att amortera.

Räntan på 12 500 kr är 562,50 kr.

Sista inbetalningen blir 13 062,50 kr.

34 $B = 1{,}50A$ och $F = 1{,}50B =$ $= 1{,}50 \cdot 1{,}50A = 2{,}25A$. Filip betalar 125 % mer skatt än Anders.

35 a) $2\,000\,000 \cdot 1{,}03^3 =$
= 2 185 454 kr

b) $2\,000\,000 \cdot 1{,}03 \cdot 1{,}04 \cdot 1{,}05 =$
= 2 249 520 kr

c) $2\,000\,000 \cdot 1{,}03 \cdot 1{,}02 \cdot 1{,}01 =$
= 2 122 212 kr

36 Georg har rätt eftersom den totala förändringsfaktorn är $1{,}10 \cdot 1{,}10 = 1{,}21$.

37 Först höjning sedan sänkning: $1{,}20 \cdot 0{,}85$

Först sänkning sedan höjning: $0{,}85 \cdot 1{,}20$

De båda uttrycken har samma värde. Det spelar alltså ingen roll i vilken ordning förändringarna görs.

38 a) För varje hundratal finns det 20 nummer som är delbara med 5. Det finns alltså 40 vinstlotter.

b) Nej, man vet inte om några vinstlotter är sålda men man kan göra vissa antaganden.

Om ingen vinstlott är såld är vinstchansen $\frac{40}{170} \approx 0{,}235$

Om alla sålda lotter var vinstlotter är hans vinstchans $\frac{10}{170} \approx 0{,}059$.

Hans vinstchans ligger alltså mellan 5,9 % och 23, 5 %.

39 Sträcka = hastighet · tid, och alltså är tid = sträcka/hastighet.

Hastigheten multipliceras med faktorn 1,15. Sträckan multipliceras med faktorn 0,91.

Det innebär att tiden förändras med faktorn $\frac{0{,}91}{1{,}15} \approx 0{,}79$

Restiden blir alltså ca 21 % kortare.

40 P(minst en röd) = 1 – P(ingen röd) $= 1 - \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} = \frac{36}{56} = \frac{9}{14}$

41 a) P(1 miss, 9 träff) = $= 0{,}08 \cdot 0{,}92^9 \cdot 10 \approx 0{,}38$. Hon skjuter tio skott, och ett av de tio skotten ska missa.

b) P(minst en miss) = $= 1 - P$(tio träffar) = $= 1 - 0{,}92^{10} \approx 0{,}57 = 57$ %.

42 $A = 0{,}20B$, $B = 0{,}30C$, $C = 0{,}25D$. Det innebär att $A = 0{,}20 \cdot 0{,}30 \cdot 0{,}25D$

Då är $A / D =$ $= 0{,}20 \cdot 0{,}30 \cdot 0{,}25 = 0{,}015$

43 a) P(minst ett rätt) = 1 – P(alla fel). För varje fråga finns två felaktiga svarsalternativ.

$$1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{10} \approx 0{,}983 = 98{,}3\,\%$$

b) Exakt nio rätt = exakt ett fel. Felet kan placeras i någon av de tio raderna.

P(exakt ett fel) =

$$= \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{9} \cdot 10 \approx 0{,}00034 =$$

= 0,34 ‰

44 43 min 20 s = 2 600 s.

Hon måste minska sin tid med 200 s, det vill säga $\frac{200}{2\,600} \approx 0{,}077 = 7{,}7$ % .

Förändringsfaktorn för tiden är 0,923.

$s = v \cdot t$ ger

$$v = \frac{s}{t_{ny}} = \frac{s}{0{,}923t} = \frac{1}{0{,}923} \cdot \frac{s}{t} \approx$$

$$\approx 1{,}083 \frac{s}{t}$$

Förändringsfaktorn på hastigheten är 1,083. Hon måste alltså springa 8,3 % snabbare.

45 P(minst ett rätt) = $= 1 - P$(alla fel)

För det första numret som dras är det $\frac{28}{35}$ chans att det är fel.

För nästa nummer också fel är det $\frac{27}{34}$, och så vidare.

1 – P(alla fel) =

$$= 1 - \frac{28}{35} \cdot \frac{27}{34} \cdot \frac{26}{33} \cdot \frac{25}{32} \cdot \frac{24}{31} \cdot \frac{23}{30} \cdot \frac{22}{29} \approx$$

≈ 0,824 = 82,4 %

46 a) Det finns 13 hjärter av 52 kort. P(alla hjärter) =

$$= \frac{13}{52} \cdot \frac{12}{51} \cdot \frac{11}{50} \approx$$

≈ 0,013 = 1,3 %

b) Det finns 4 ess av 52 kort.

P(alla ess) $= \frac{4}{52} \cdot \frac{3}{51} \cdot \frac{2}{50} \approx$

≈ 0,00018 = 0,018 %

c) Det finns fyra knektar, fyra damer och fyra kungar. Det spelar ingen roll i vilken ordning hon drar korten. De tre korten kan ordnas på 6 olika sätt: JDK, JKD, DJK, DKJ, KDJ, KJD.

P(en knekt, en dam, en kung) $= \frac{4}{52} \cdot \frac{4}{51} \cdot \frac{4}{50} \cdot 6 \approx$

≈ 0,0029 = 0,29 %

47 Eftersom alternativ 2 innebär en utbetalning i fyra år undersöker vi pengarnas värde i början av det fjärde året för de båda fallen.

Alternativ 1:
$400\,000 \cdot 1{,}015^3 = 418\,271$ kr

Alternativ 2: 100 000 +
$+ 100\,000 \cdot 1{,}025 +$
$+ 100\,000 \cdot 1{,}025^2 +$
$+ 100\,000 \cdot 1{,}025^3 =$
= 415 252 kr.

Lennart bör alltså välja alternativ 1.

KAPITELTEST

1 0,96

2 $P(7) = \frac{1}{8}$. Han får troligen

$240 \cdot \frac{1}{8} = 30$ stycken.

3 a) $P(\text{läsk}) = \frac{1}{16}$ enligt bilden.

Fyra områden stora som ”läsk”-biten motsvarar en fjärdedel av cirkeln.

b) $P(\text{nitlott}) = \frac{5}{8}$ enligt bilden (hälften plus en halv fjärdedel)

4 a) 7

b) Det är lika stor chans. Summan 2 kan fås på ett sätt, genom att båda tärningarna visar 1. Summan 12 kan också bara fås på ett sätt, genom att båda tärningarna visar 6. Båda sannolikheterna är $\frac{1}{36}$.

5 Det nya priset är 80 % av ursprungspriset.
$0,80 \cdot 75 = 60$ kr.

6 a) Första året betalar han 5,0 % av 20 000 kr = = 1 000 kr i ränta.

b) William amorterar 4 000 kr per år. Andra året betalar han 5,0 % av 16 000 kr = = 800 kr. Tredje året betalar han 600 kr, fjärde året 400 kr och femte året 200 kr.

Totalt betalar han 1 000 + + 800 + 600 + 400 + 200 = = 3 000 kr i ränta.

7 Summan 9 är mest sannolik.

8 $P(\text{minst en krona}) =$
$= 1 - P(\text{alla klave}) =$

$$= 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$$

9 En ökning med 20 % motsvarar en förändringsfaktor 1,20. En sänkning med 20 % motsvarar en förändringsfaktor 0,80. $1,20 \cdot 0,80 = 0,96$, en minskning med 4 %. Kurt har alltså fel.

10 a) 1 000 kr

b) Andra avbetalningen är amortering plus en ränta som motsvarar ett halvårs ränta på 7 000 kr. Han ska betala 1 000 + 227,50 = = 1 227,50 kr.

11 Lön före höjningarna: x kr.

$1,03 \cdot 1,04 \cdot 1,02 \cdot x =$
$= 1,092624x = 35\,650$ kr

$x = 32\,628$ kr

12 Arean från början är $a \cdot b$.

Efter förändringen är arean $x \cdot a \cdot 0,70 \cdot b$, där x är förändringsfaktorn för längden.

Produkten av förändringsfaktorerna ska ha värdet 1 om åkern ska behålla sin area $a \cdot b$.

$x \cdot 0,70 = 1$ ger $x \approx 1,43$
Hon måste öka längden med ca 43 %.

13 a) $\frac{70}{1\,750} = 0,04 = 4$ %

b) Enkel årsränta:
$12 \cdot 4,0 = 48$ %

Sammansatt årsränta:
$1,039^{12} = 1,582$, dvs 58,2 % ränta.

14 Vit kula ur burk A:
$P(\text{vit, vit}) = \frac{2}{8} \cdot \frac{2}{8} = \frac{1}{16}$

Inte vit kula ur burk A:

$P(\text{inte vit, vit}) = \frac{6}{8} \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{32}$

Att antingen (vit, vit) eller (inte vit, vit) infaller är
$P(\text{vit, vit}) + P(\text{inte vit, vit}) =$
$= \frac{5}{32}$.

DISKUTERA, RESONERA OCH MODELLERA

S. 113

Oskars lån:

a) Slutvärdet är
$40\,000 \cdot 1,06^4 = 50\,499$ kr

b) $10\,000 + 10\,000 \cdot 1,06 +$
$+ 10\,000 \cdot 1,06^2 +$
$+ 10\,000 \cdot 1,06^3$

c) $x(1 + 1,06 + 1,06^2 + 1,06^3) =$
$= 50\,499$. Ekvationen har lösningen $x \approx 11\,544$ kr som är annuiteten.

Alis lån:

Slutvärde: $100\,000 \cdot 1,035^5 =$
$= 118\,769$ kr

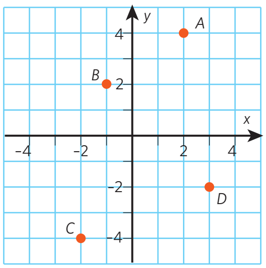
$x(1 + 1,035 + 1,035^2 +$
$+ 1,035^3 + 1,035^4) = 118\,769$

Ekvationen har lösningen $x \approx 22\,148$ kr. Annuiteten är 22 148 kr.

Kapitel 4

4101 A: (2, 1) B: (−4, 3)
C: (−1, −3) D: (5, −2)

4102



4103 (3, 1)

4104 a) $y = 0$
b) $x = 0$
c) y kan ha vilka värden som helst
d) x kan ha vilka värden som helst

4105 a) $(-3, 0)$ b) $(0; 1{,}5)$

4106 T.ex. (3, 0), (3, 1) eller (3, −2).

4107 T.ex. (1, 4), (2, 1) och (2, 4)

4108 $x = 5$

4109 $y = 4$

4110 a) T.ex. (2, 2) och (3, 1). Figuren blir en vriden kvadrat.
b) (4, 4) och (5, 3). Figuren blir en snedställd rektangel.

4111 T.ex. (0, −1) eller (3, 1).

4112 (2, −1), (3, −4) och (1, −3)

4201 a) x b) $f(x)$
c) $0 < x < 5$
d) $3 < f(x) < 8$

4202 $g(x) = \dfrac{x}{2}, 0 \le x \le 4$

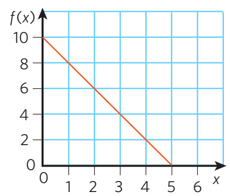
4203 $h(t) = -t, -3 < t < 2$

4204 $f(x) = -2x + 4$

4205 a) Exempelvis

x	$f(x)$
0	10
1	8
2	6
3	4
4	2
5	0

b)



4206 a) $g(x) = 4, -2 \le x \le 5$
b) $g(x) = 4$

4207 $x + 1$ respektive 3

4208 $g(t) = \begin{cases} 2t & \text{då } 0 \le t \le 10, \\ 20 & \text{då } t > 10 \end{cases}$

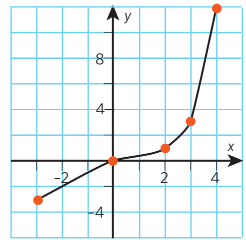
4209 a) $y(4) = 2 \cdot 4 - 4 = 4$
b) $y(-3) = 2 \cdot (-3) - 4 = -10$
c) $2x - 4 = 0$ har lösningen $x = 2$
d) $2x - 4 = 9$ har lösningen $x = 6{,}5$

4210 a) $y(0) = 1$
b) $y(2) = 2^2 - 3 \cdot 2 + 1 = -1$

4211 b), eftersom y i tabellen har två olika värden för samma x-värde.

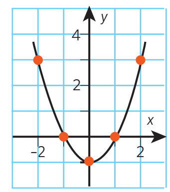
4212 a) $2x + 4 = 3$ ger $x = -0{,}5$
b) $x = 2$

4213 a)



b) $y(1) \approx 0{,}5$
c) $y(-2) \approx -2{,}1$
d) $x = 0$ (ur tabellen)

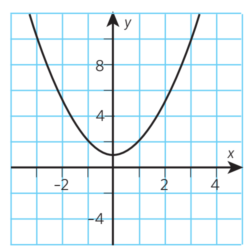
4214



4215 a)

x	y
−3	10
−2	5
−1	2
0	1
1	2
2	5
3	10

b)



c) $y(2{,}5) \approx 7{,}25$
d) $y(2{,}5) = 7{,}25$

4216 $3x^3 + 1 = 25$ innebär att $x^3 = 8$ och då är $x = 2$.

4217 a) $f(0) = 0$

b) $f(2) = 12$

c) Funktionen är definierad för alla x-värden.

d) Funktionen kan aldrig ha värden som är mindre än noll, så $y \geq 0$ är värdemängden.

4218 a) $y(0) = 0$

b) $y(4) = 2$

c) $x = 4$

d) Definitionsmängden är $0 \leq x < 10$ och värdemängden är $0 \leq y < 3{,}2$.

4219 a) Åldern är den oberoende variabeln och vikten är den beroende variabeln.

b) Om vikten som funktion av åldern betecknas $f(x)$ där x är åldern: $f(3) = 15$.

4220 a) $f(0)$ betyder ”funktionens värde då $x = 0$”.

b) $f(x) = 0$ är en ekvation. ”För vilket x har funktionen värdet 0?”

4221 a) $h(1) = 4$

b) $h(1)$ betyder funktionens värde då $x = 1$.

c) Definitionsmängd: I funktionen kan du sätta in alla x utom $x = 0$, eftersom division med 0 inte är tillåtet. Alltså $x \neq 0$.

d) Funktionen kan anta vilka värden som helst förutom 3, både positiva tal och negativa tal och värdet 0. Alltså $y \neq 3$.

4222 a) $f(x + 1) = 3(x + 1)^2 =$
$= 3(x^2 + 2x + 1)$

b) $f(2a) = 3 \cdot (2a)^2 = 12a^2$

4223 $f(x - 2) = 20$ ger $54/(x - 2) + 2 = 20$. Ekvationen har lösningen $x = 5$.

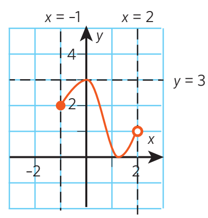
4224 a) Definitionsmängd: alla värden på x är tillåtna. Värdemängd: Funktionen kan aldrig få värden som är större än 2. Eller kort: Alla x och $y \leq 2$.

b) Definitionsmängd: Alla x utom $x = 0$ är tillåtna. Värdemängd: Funktionen kan anta alla värden utom $y = 0$.

c) Definitionsmängd: Alla tal är tillåtna. Värdemängd: Bara positiva tal och noll, dvs. $y \geq 0$.

d) Definitionsmängd: Alla positiva tal och noll är tillåtna, eftersom du inte kan dra roten ur negativa tal. Värdemängd: Alla positiva tal, och noll. Eller kort: $x \geq 0$ och $y \geq 0$.

4225

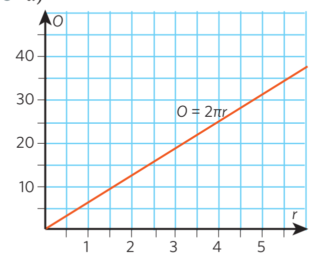


Värdemängden $0 \leq y \leq 3$ innebär att funktionen antar alla olika värden mellan $y = 0$ och $y = 3$, och $y = 0$ och $y = 3$. Definitionsmängden $-1 \leq x < 2$ innebär att funktionens graf börjar på $x = -1$ och slutar mycket nära $x = 2$, men inte på $x = 2$.

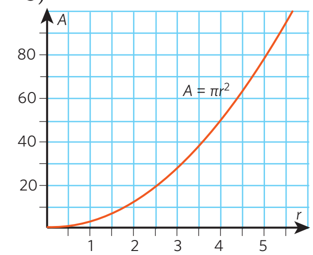
4226 Värdemängd: Funktionen antar alla värden från och med -4 till och med $-1{,}75$.
$-4 \leq y \leq -1{,}75$.

4227 $g(2) = -2$, och $f(-2) = 0{,}5$.
Svar: 0,5.

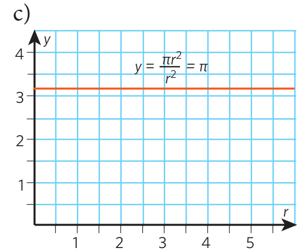
4228 a)



b)



c)



d) a: Definitionsmängd: $r \geq 0$. Värdemängd: $O \geq 0$

b: Definitionsmängd: $r \geq 0$. Värdemängd: $A \geq 0$.

c: Definitionsmängd: $r \geq 0$. Värdemängd: $y = \pi$, eftersom funktionen endast antar värdet π, oavsett värde på r.

4229 $f(x + 3) = k(x + 3) + m =$
$= kx + 3k + m$

Alltså är $f(x + 3) - f(x) =$
$= kx + 3k + m - (kx + m) =$
$= 3k$

4230 a) Ja. $f(a) = 2a$, $f(b) = 2b$ och $f(a + b) = 2(a + b) =$
$= 2a + 2b$, vilket är samma sak som $f(a) + f(b)$.

b) Nej. $f(a) = a^2$, $f(b) = b^2$ och $f(a + b) = (a + b)^2$, vilket inte är samma sak som $a^2 + b^2$.

c) $f(x) = kx + m$ är bara en sådan linjär funktion om $m = 0$. k kan ha vilket värde som helst.

4231 $y = 20 - 2x$

4301 a) $k = 20$

b) kr/GB

c) $y = 20x$

d) $y(14) = 280$, dvs. 280 kr

4302 a) $y = 12x$

b) $y(x) = 180$, $12x = 180$, $x = 15$

4303 a) a: $y = 2x$, $k = 2$ l/min, b: $y = x$, $k = 1$ l/min

b) c: $y = 1{,}5x$, $k = 1{,}5$ kr/hg, d: $y = 0{,}5x$, $k = 0{,}5$ kr/hg

c) Saffran: $y = 60x$, $k = 60$ kr/g, Vit tryffel: $y = 50x$, $k = 50$ kr/g

d) Bil: $y = 90x$, $k = 90$ km/h

Elitcyklist: $y = 40x$, $k = 40$ km/h

4304 a) $y = 187{,}5x$

b) $y = 0{,}5x$

c) Purjolökar/portion

d) För champinjonerna gäller $y = 25x$ där x är antalet portioner. $k = 25$ g/portion.

$25x = 850$ har lösningen $x = 34$, dvs. 34 portioner. Alternativ: $8{,}5 \cdot 4 = 34$. Svar: 34 portioner.

4305 Om $y = kx$ så är

$x = \frac{y}{k} = \frac{1}{k} \cdot y$. Om k är en konstant så är även $\frac{1}{k}$ konstant.

I sambandet $x = \frac{1}{k} \cdot y$ är proportionalitetskonstanten $\frac{1}{k}$, $k \neq 0$.

4306 a) $k = 2$, $m = 1$

b) $k = 1$, $m = -1$

c) $k = -5$, $m = 18$

d) $k = 180$, $m = 1\,000$

4307 a) a: $y = x + 4$

b: $y = x - 3$

c: $y = 2x + 1$

b) a: $y = 3x - 4$

b: $y = 0{,}5x + 3$

c: $y = -0{,}5x - 1$

4308 a) $y = 2x - 5$ skär y-axeln i $y = -5$ och för varje steg i positiv x-riktning ökar y-koordinaten för linjen med 2. $y = -3x + 4$ skär y-axeln i $y = 4$ och för varje steg i positiv riktning minskar y-koordinaten med 3.

b) $y = 0{,}5x - 1$ skär y-axeln i $y = -1$ och för varje steg i positiv x-riktning ökar y-koordinten för linjen med 0,5. Linjen $y = -0{,}5x + 2$ skär y-axeln i $y = 2$ och för varje steg i positiv x-riktning minskar y-koordinaten med 0,5.

4309 A – L_1 – a

B – L_3 – c

C – L_2 – b

D – L_5 – e

E – L_4 – d

4310 a: $y = -5$

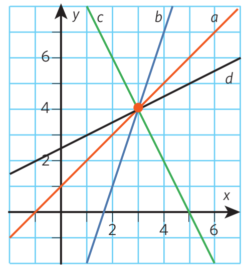
b: $y = -1$

c: $y = -4$

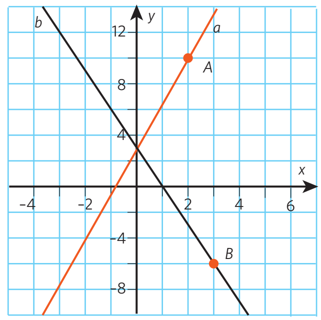
d: $y = 8$

e: $y = 7$

4311



4312



4313 a) $y = 3{,}5x + 3$

b) $y = -3x + 3$

4314 a: $y = -1$ b: $x = 2$ c: $x = 0$

4315 a: $y = -0{,}5x - 3$

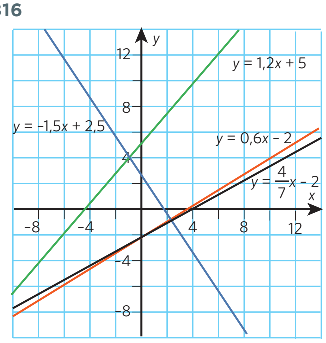
b: $y = \frac{2x}{3} + 3$

c: $y = 1{,}5x + 2$

d: $y = -\frac{x}{3} + 6$

e: $y = 0{,}8x - 1$

4316



4317 a) $y = 2x + 3$

b) $y = 3x - 1$

c) $y = -2x + 5$

d) $y = -\frac{x}{2} + 2$

4318 a) $k = 5$ och $y = 5x + m$ ger med punkten (2, 16) insatt: $16 = 5 \cdot 2 + m$

Då är $m = 6$ och linjens ekvation $y = 5x + 6$.

b) $k = 0{,}5$. Samma metod som i a) ger linjen $y = 0{,}5x + 11$

4319 a) $x = 6$ ger $y = -6$. Nej, linjen går inte genom $(6, -5)$.

b) $x = 16$ ger $y = 14$. Ja, linjen går genom (16, 14).

4320 a) $y = 3x + 11$

b) $y = 5x + 15$

c) $y = -2x + 1$

d) $y = 0{,}25x + 5{,}5$

4321 a) $y = 1{,}5x + 4$

b) $y = -0{,}4x + 2$

4322 a) $y = 1{,}25x + 1{,}75$

b) $y = \dfrac{x}{3} - 6$

c) $y = -2x + 3$

d) $y = -2{,}5x + 3{,}5$

4323 a) Linjen genom (2, 17) och (12, 47) har $k = 3$. Linjen genom (2, 17) och (–5, 4) har $k = 13 / 7$. Nej, punkterna ligger inte på samma linje.

b) Linjen genom (36, 17) och (–3, 4) har $k = (-13) / (-39) = 1 / 3$. Linjen genom (–3, 4) och (12, 10) har $k = 6 / 15$. Nej, punkterna ligger inte på samma linje.

4324 Linjen skär y-axeln i $y = 8$, vilket är triangelns höjd. Linjen skär x-axeln där $y = 0$, dvs. då $x = 4$. Triangelns bas är 4. Arean är då 16 a.e.

4325 $k = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{-a-3}{1-a} = 2$

så $2(1 - a) = -a - 3$

$2 - 2a = -a - 3$ som har lösningen $a = 5$.

4326 $y = -0{,}25x + m$ skär y-axeln i $y = m$ (triangelns höjd) och x-axeln i $x = 4m$. Arean av triangeln är $\dfrac{4m \cdot m}{2} = 2m^2 = 10 \Rightarrow$

$m = \pm\sqrt{5}$. Vi kan förkasta den negativa lösningen, då hamnar inte linjen i den första kvadranten. Alltså ska $m = \sqrt{5}$ för att arean ska bli 10 a.e.

4327 $k = \dfrac{d-b}{c-a} = \dfrac{-(b-d)}{-(a-c)} = \dfrac{b-d}{a-c}$

Det spelar alltså ingen roll vilken av punkterna man börjar med. Men man måste vara konsekvent och antingen använda den första punktens x- och y-koordinater först eller den andra punktens x- och y-koordinater först.

4328 $k = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{3a-(2-a)}{a+1-5a} =$

$= \dfrac{4a-2}{1-4a} = 2$

$2(1 - 4a) = 4a - 2$

$2 - 8a = 4a - 2$ som har lösningen $a = \dfrac{1}{3}$.

Punkterna som linjen går genom är då $\left(\dfrac{4}{3}, 1\right)$ och $\left(\dfrac{5}{3}, \dfrac{5}{3}\right)$.

Linjens ekvation:
$y = kx + m = 2x + m$

Om $x = \dfrac{4}{3}$ är $y = 1$:

$1 = 2 \cdot \dfrac{4}{3} + m \Rightarrow m = -\dfrac{5}{3}$

Linjens ekvation är alltså $y = 2x - \dfrac{5}{3}$.

Skärning med x-axeln då $y = 0$: $y = 2x - \dfrac{5}{3} = 0$ har lösningen $x = \dfrac{5}{6}$.

Linjen skär x-axeln i punkten $\left(\dfrac{5}{6}, 0\right)$.

4329 a) $k = 2$, $m = -3$

b) $k = -0{,}4$, $m = 5$

c) Lös först ut y. $k = 0{,}5$ och $m = 0{,}75$

d) $k = 0{,}6$, $m = 2$

4330 a) $y = 3x + 2$

b) $y = -x - 2$

c) $y = \dfrac{5x}{3} + \dfrac{10}{3}$

d) $y = 2x + 4$

4331 $y = -x + 2$

4332 a) $y = 3x - 1$

b) $y = -x + 2$

c) $y = 0{,}6x + 4{,}1$

d) $y = -1{,}6x + 1$

4333 $y = 1{,}6x - 4$

4334 26 kr

4335 $a = -\dfrac{8}{3}$

4336 $c = 1{,}5$

4337 $\dfrac{2x-3}{4} = \dfrac{y+2}{3} \Rightarrow$
$\Rightarrow 6x - 9 = 4y + 8 \Rightarrow$
$\Rightarrow y = 1{,}5x - 4{,}25$. VSV.

4338 Linjen går genom (–1, 3) och (2, 4). $f(x) = \dfrac{x}{3} + \dfrac{10}{3}$

4339 Genom (–2, 5) och (3, 7) går $y = 0{,}4x + 5{,}8$. Genom (6, 5) går $y = 0{,}4x + 2{,}6$.

4340 $a = 6$

4341 $b = 31$

4342 $-3 / b = -7$ och $-a / b = 6$ ger att $b = 3 / 7$ och $a = -18 / 7$

4343 Nej, de ligger inte på samma linje. Linjen genom punkterna (3, 7) och (−2, 25) har $k = -3{,}6$. Linjen genom punkterna (3, 7) och (8, −9) har $k = -3{,}2$

4344 a) $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1 \Rightarrow y = -\frac{3x}{2} + 3$

b) $x = 0$ ger $y = 3$, $y = 0$ ger $x = 2$

c) Linjen genom $(a, 0)$ och $(0, b)$ har lutningen $k = -b / a$ och skärningspunkten med y-axeln $m = b$.

Linjens ekvation är alltså

$y = -\frac{bx}{a} + b.$

Dividera alla led med b:

$\frac{y}{b} = -\frac{x}{a} + 1 \Leftrightarrow \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

4345 Linjens lutning är $k = \frac{b-1}{4}$ och linjen har $m = 1$. Alltså är $y = \frac{b-1}{4}x + 1$. Punkten $(a, -3)$ sätts in:

$-3 = \frac{b-1}{4}a + 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow -4 = \frac{b-1}{4}a \Rightarrow$

$\Rightarrow a = \frac{-16}{b-1} = \frac{16}{1-b}$

4346 a) Linjen ska ha lutningen $k = -1{,}5$ så $p / 5 = -1{,}5$ ger $p = -7{,}5$. $q \neq -2{,}4$ om $q = -2{,}4$ är det samma linje.

b) Linjerna ska ha samma m-värde. Den första linjen har $m = 1{,}2$ och då måste $-q / 2 = 1{,}2$ så $q = -2{,}4$. p kan väljas fritt.

c) Vi sätter in punkten (2, 3) i de båda ekvationerna:

$2p - 15 + 6 = 0$ och
$6 + 6 + q = 0$.

Ekvationerna är båda två uppfyllda om $p = 4{,}5$ och $q = -12$.

4347 a) Ledning: $a^2 - 4 = (a + 2)(a - 2)$.

$k = \frac{a^2 - 3 - 1}{a - 2} = \frac{a^2 - 4}{a - 2} = a + 2$

b)

a	k
2,1	4,1
2,01	4,01
2,001	4,001

Linjens lutning närmar sig $k = 4$ när a närmar sig 2.

4348 Produkten av riktningskoefficienterna för vinkelräta linjer är −1.

a) $k = -1$ b) $k = -\frac{1}{3}$

c) $k = \frac{1}{2}$ d) $k = 4$

4349 a) $a = \frac{2}{3}$ b) $a = -\frac{3}{2}$

4350 $k = -\frac{1}{4},\ 5 = -\frac{1}{4}\cdot(-4) + m \Rightarrow$

$\Rightarrow m = 4,\ y = -\frac{1}{4}x + 4$

4351 Produkten av riktningskoefficienterna för vinkelräta linjer är −1. $y = 2x + 5$ är vinkelrät mot $y = -0{,}5x + 3$. $y = -2x - 1$ är vinkelrät mot $y = 0{,}5x + 12$. $y = 4x$ är vinkelrät mot $y = -0{,}25x - 9$.

4352 $ax + by + c = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow y = -\frac{a}{b}\cdot x - \frac{c}{a} \Rightarrow$

$\Rightarrow k = -\frac{a}{b}.$

Produkten av riktningskoefficienterna för vinkelräta linjer är −1. Normalens k-värde $= \frac{b}{a}$.

4353 Skriv ekvationerna på k-form. Parallella linjer har samma k-värde.

$y = \frac{5}{6}x + \frac{1}{2},\ y = -\frac{a}{2}x \Rightarrow$

$\Rightarrow -\frac{a}{2} = \frac{5}{6},\ a = -\frac{5}{3}.$

Produkten av riktningskoefficienterna för vinkelräta linjer är −1. $-\frac{a}{2} = -\frac{6}{5} \Rightarrow$

$\Rightarrow a = \frac{12}{5} = 2{,}4$

4354 $y = 6x + m,\ y = kx - 4$.

Vinkelräta linjer: $k = -\frac{1}{6}$.

På y-axeln är $x = 0 \Rightarrow m = -4$.

4355 Skriv om ekvationen på k-form: $y = -6x + 12$. Vinkelräta linjer $\Rightarrow k = \frac{1}{6}$. Sätt in punkten P i linjens ekvation på k-form: $6 = \frac{1}{6}\cdot 3 + m \Rightarrow$

$\Rightarrow m = 5{,}5 \Rightarrow y = \frac{1}{6}x + 5{,}5.$

På allmän form:

$6y - x - 33 = 0$

4356 $k_1 = \frac{9-6}{6-2} = \frac{3}{4}$,

$k_2 = \frac{10-6}{-1-2} = -\frac{4}{3}$,

$k_1 \cdot k_2 = -\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{4} = -1.$

Två av triangelns sidor vinkelräta mot varandra och triangeln är rätvinklig.

4357 $P(4, 12)$, $Q(9, 7)$. Lutningen för linjen mellan P och Q:

$k_{PQ} = \frac{12-7}{4-9} = \frac{5}{-5} = -1$.

Antingen är vinkeln vid P eller vinkeln vid Q rät.

1. Vinkeln vid P är rät $\Rightarrow$ lutningen för linjen PR:

$$k_{PR} = \frac{12 - y}{4} = 1 \Rightarrow y = 8.$$

Koordinaterna för R är $(0, 8)$.

2. Vinkeln vid Q är rät $\Rightarrow$ lutningen för linjen QR:

$$k_{QR} = \frac{7 - y}{9} = 1 \Rightarrow y = -2.$$

Koordinaterna för R är $(0, -2)$.

4358 a) $P\,(0, 2)$, $Q\,(5, -1)$ och $R\,(3, 7)$. Produkten av riktningskoefficienterna för vinkelräta linjer är -1.

$$k_{PR} = \frac{7-2}{3-0} = \frac{5}{3},$$

$$k_{PQ} = \frac{-1-2}{5} = -\frac{3}{5}.$$

$$k_{PR} \cdot k_{PQ} = \frac{5}{3} \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) = -1.$$

Alltså är linjerna PQ och PR vinkelräta mot varandra.

b) Linjerna PR och SQ måste vara parallella, likaså linjerna RS och PQ. Punkten S har koordinaterna

$$(x, y) \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{y+1}{x-5} = \dfrac{5}{3} \\ \dfrac{y-7}{x-3} = -\dfrac{3}{5} \end{cases} \Rightarrow$$

$x = 8$ och $y = 4$. Punkten S har koordinaterna $(8, 4)$.

4359 Linjen genom P och Q: $y = 0{,}5x + 1{,}5$. Skärningspunkten mellan linjerna: $-2x + 1 = 0{,}5x + 1{,}5 \Rightarrow$ $\Rightarrow x = -0{,}2$ och $y = 1{,}4$. Avståndet från skärningspunkten $(-0{,}2; 1{,}4)$ till punkten $P\,(3, 3)$ är i x-led $3 - (-0{,}2) = 3{,}2$ och i y-led $3 - 1{,}4 = 1{,}6$. Avståndet från skärningspunkten till spegelpunkten är detsamma. x-koordinaten för $Q = -0{,}2 - 3{,}2 = -3{,}4$; y-koordinaten $= 1{,}4 - 1{,}6 = -0{,}2$. Q har koordinaterna $(-3{,}4; -0{,}2)$.

b) Linjen genom P och Q: $y = 4x - 9$. Skärningspunkten mellan linjerna: $-0{,}25x + 2 = 4x - 9 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = \frac{44}{17} \text{ och } y = \frac{23}{17}.$$

Avståndet från skärningspunkten $\left(\frac{44}{17}, \frac{23}{17}\right)$ till punkten $P\,(3, 3)$ är i x-led

$$3 - \frac{44}{17} = \frac{7}{17} \text{ och i } y\text{- led}$$

$$3 - \frac{23}{17} = \frac{28}{17}.$$ x-koordinaten för $Q = \frac{44}{17} - \frac{7}{17} = \frac{37}{17}$;

y-koordinaten $=$

$$\frac{23}{17} - \frac{28}{17} = -\frac{5}{17}.$$

Q har koordinaterna

$$\left(\frac{37}{17}, -\frac{5}{17}\right).$$

4401 a), b) och d)

4402 a) d) b) $m = 0$

4403 $f(x) = -3x + 5$

4404 $(-4, -5)$

4405 $h(x) = \dfrac{x}{2} + 2$, $1 \le h(x) \le 4$

4406 Låt $f(x) = k_1x + m_1$ och $g(x) = k_2x + m_2$, där k_1, k_2, m_1 och m_2 är konstanter. För summan $h(x) = f(x) + g(x)$ gäller $h(x) = k_1x + m_1 + k_2x + m_2 = (k_1 + k_2)x + (m_1 + m_2)$. Eftersom även $(k_1 + k_2)$ och $(m_1 + m_2)$ är konstanter, visar ekvationen $h(x) = (k_1 + k_2)x + (m_1 + m_2)$ att h är en linjär funktion.

4407 a) $y = 27$ b) $y = \dfrac{5}{3}$

c) $y = \dfrac{4}{9}$ d) $y = 4$

4408 a) $y = 2\sqrt{2} \approx 2{,}83$

b) $y = 2 \cdot 4^{1/3} \approx 3{,}17$

c) $y = 18$

d) $y = 182{,}25$

4409 a) $k = 2$, potensfunktion

b) $k = 27$, potensfunktion

c) $k = 10$, inte potensfunktion

d) $k = 3$, inte potensfunktion

4410 $x^2 = 8x^{-1}$ har lösningen $x = 2$. Koordinaterna är $(2, 4)$

4411 Funktionen är inte definierad för negativa x-värden.

4412 $1{,}5 = C \cdot 1^a$ ger $C = 1{,}5$.

$6 = 1{,}5 \cdot 2^a$ ger $a = 2$.

4413 $k = 8$

4414 $C = 40$

4415 $a = -7$

4416 Nej, det går inte. $x^{-1} = -ax$, multiplicera med x på båda sidor om likhetstecknet och du får $1 = -ax^2$. Om a är positivt är högerledet ett negativt tal, eftersom kvadrater alltid är positiva.

4417 $a - 4$

$b - 1$

$c - 2$

$d - 3$

4418 a) y har ett mycket stort positivt värde.

b) y har ett mycket litet positivt värde.

4419 a) $y = \sqrt{x} + 2$ ligger förskjuten 2 steg uppåt i y-led jämfört med $y = \sqrt{x}$.

b) Funktionen ligger förskjuten m steg i y-led jämfört med $y = \sqrt{x}$.

c) Funktionens graf flyttas a steg till höger om a är positivt och till vänster om a är negativt.

4420 a) Grafen till $y = \dfrac{1}{x-4}$ är förskjuten 4 steg till höger jämfört med $y = \dfrac{1}{x}$

b) Grafen är förskjuten a steg till höger om a är positivt och till vänster om a är negativt.

c) Grafen är förskjuten a steg åt vänster eller höger, och m steg i y-led.

4421 a) $f(x) = \dfrac{1}{x}$: Definitionsmängd: Alla x utom $x = 0$. Värdemängd: Alla värden utom 0. Funktionen kan aldrig anta värdet 0.

$f(x) = \dfrac{1}{x^2}$: Definitionsmängd: Alla x utom $x = 0$. Värdemängd: $f(x) > 0$

$f(x) = \dfrac{1}{x^3}$: Defintionsmängd: Alla x utom $x = 0$. Värdemängd: Alla värden utom 0.

b) Punkten (1, 1) är gemensam för funktionerna.

4422 $f(x) = \dfrac{1}{x}$ avtar snabbare än $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ eftersom $\sqrt{x}$ är ett mindre värde än x för alla tal $x > 1$.

4423 $y = x^2$ växer snabbast eftersom x^2 har en större lutning än x och $x^{1,5}$ för alla $x > 1$.

4424 Grafen går genom punkten (1, 4). $k = 3$.

4425 $y = C \cdot x^a$. Två punkter på grafen är (4, 1) och (16, 2).

$1 = C \cdot 4^a$ ger $C = 4^{-a}$

$2 = C \cdot 16^a = 4^{-a} \cdot (4^2)^a = 4^a$, vilket ger $a = 0,5$. Då är $C = 0,5$.

Funktionen är alltså $y = 0,5x^{0,5} = 0,5\sqrt{x}$

4426 $T(t) = at^2 + bt + c$

$T(0) = 12$ ger $c = 12$

$T(1) = 15$ ger $a + b + 12 = 15$ och alltså $a + b = 3$ och $b = 3 - a$

$T(2) = 19$ ger $4a + 2b + 12 = 19$

$b = 3 - a$ ger i den andra ekvationen

$4a + 2(3 - a) = 7$, $a = 0,5$

$b = 3 - a = 3 - 0,5 = 2,5$

$a = 0,5 \quad b = 2,5 \quad c = 12$

4427 a) Avtagande. Förändringsfaktorn är 0,58, vilket motsvarar en minskning.

b) Växande. Förändringsfaktorn är 1,12, vilket motsvarar en ökning.

c) Avtagande. $2^{-p} = 0,5^p$ så förändringsfaktorn är 0,5, vilket motsvarar en minskning.

d) Växande. $1,5^{-x}$ får allt mindre värden när x ökar, vilket gör att $1 - 1,5^{-x}$ ökar i värde.

4428 a) $y \approx 3\,498$

b) $y \approx 2,42$

c) $y \approx 0,314$

d) $y \approx 13,85$

4429 a) Startvärde: 20. Procentuell ökning: 8 % för varje x

b) Startvärde: 85. Procentuell minskning: 21 % för varje x

c) Startvärde: 2 010. Procentuell ökning: 0,2 % för varje x

d) Startvärde: 2,55. Procentuell minskning: 96 % för varje x

4430 $N(12) \approx 5$ kärnor

4431 En person sätter in 20 000 kr på banken och får 5 % sparränta per år. Efter hur många år har personen 24 500 kr på kontot?

4432 a) $y = 2\,000 \cdot 1,015^x$

b) 2 902 kr

4433 a) 3 b) 4

c) 1 d) 2

4434 C är startvärdet, a är förändringsfaktorn.

4435 a) $a = 4^{1/4} = 1,414$

b) $a = 0,4^{1/10} = 0,912$

4436 Andel: $0,02 \cdot 1,52^7 \approx 0,375$, alltså ca 37,5 %

4437 $g(x) = 25 \cdot 0,82^x$

4438 Startvärdet $C = 10$. Då är $100 = 10 \cdot a^2$, så $a = \sqrt{10}$

4439 Startvärdet $C = 800$. $50 = 800 \cdot a^4$ ger $a = 0,5$. Funktionen är $y = 800 \cdot 0,5^x$

4440 $y = 3^{-x} = \dfrac{1}{3^x} = \left(\dfrac{1}{3}\right)^x$

4441 a) Vinsten $V = 680\,000 \cdot 1,05^x$

b) Vinsten $V = 680\,000 \cdot 0,92^x$

c) Enligt a) är vinsten ca 1 100 000 kr

Enligt b) är vinsten ca 295 000 kr

4442 $y = -5x + 20$ och $y = 20 \cdot 2^{-0,5x}$

$y = 2^{-x}$ innebär en halvering när x ökar med 1. $y = 2^{-0,5x}$ innebär en halvering när x ökar med 2.

4443 a) 30 minuter = 3 halveringstider. Det återstår 12,5 %.

b) På 10 minuter sönderfaller hälften, så förändringsfaktorn är 0,5 på 10 minuter.

Per minut blir förändringsfaktorn $0{,}5^{1/10} \approx$
$\approx 0{,}933$, dvs. en minskning med ca 7 % per minut.

c) Med räknaren får vi $0{,}933^{66} \approx 0{,}01$. Efter cirka 66 minuter.

d) $m = 100 \cdot 0{,}933^t$, där m är mängden i mg och t tiden i minuter.

4444 Kokpunkten T avtar exponentiellt med höjden.
$T = C \cdot a^h$, där h är höjden i meter över havet. Startvärdet C är 100.

$69 = 100 \cdot a^{8848}$ ger

$$a = \left(\frac{69}{100}\right)^{1/8848}$$

Koktemperaturen på Kebnekaise är då

$$T = 100 \cdot \left(0{,}69^{1/8848}\right)^{2097}\ ^\circ\text{C} \approx$$
$\approx 91{,}6$ °C

4445 Enligt Stefan är bilen värd $240\,000 \cdot 0{,}70^4$ kr = 57 624 kr.
Enligt Inger är bilen värd $(240\,000 - 60\,000 \cdot 4)$ kr =
= 0 kr

Inger antar att bilens värde minskar lika många kronor per år, medan Stefan antar en procentuell minskning. Resonera gärna tillsammans om vilket sätt att tänka som är lämpligast i olika situationer!

4446 a) Grafritande räknare ger att $f(t) < g(t)$ om $0 < t < 1{,}7$.

b) $f(t)$ beskriver att bakterierna är 200 från början och växer med 12 % per tidsenhet.

$g(t)$ beskriver en linjär tillväxt med 25 bakterier per tidsenhet.

4447 $x = 4$

4501 a) $x = 5$

b) $x = 1$

c) $x = 1$ och $x = -3$

d) $x = 2$

4502 a) $x \approx 6{,}35$

b) $x \approx 7{,}11$

c) $x \approx 3{,}30$

d) $x \approx 2{,}07$

4503 $x = 2$

4504 a) 1 lösning, $x = 0{,}5$

b) 2 lösningar, $x = -1$ och $x = 3$

c) 2 lösningar, $x \approx -1{,}58$ och $x \approx 1{,}58$

d) 3 lösningar, $x \approx -1{,}30$, $x = 0$ och $x \approx 2{,}30$

4505 För alla $t < 0$

4506 Nej, graferna saknar skärningspunkter

4507 a) $x = 2$ och $x = 4$

b) Graferna skär varandra för ett negativt x-värde, så det finns således en lösning till.

4508 a) Om $k > 0$ finns endast en lösning.

b) $-4 < k \leq 0$ ger två lösningar.

4509 a) $k = 25/220^2$ W/V^2 ≈
$\approx 5{,}17 \cdot 10^{-4}$ W/V^2

b) $U = 139$ V

4510 0, 1 eller 2 skärningspunkter.

4511 0,1 eller 2 skärningspunkter.

4512 a) 1,6 meter

b) $y(t) = 0$ då $t = 1{,}5$
Bollen är i luften under 1,5 sekunder.

4513 a) $y = 1\,000 \cdot 1{,}015^t$ där y är saldot och t tiden i år

b) Efter cirka 28 år.

4514 Antalet bakterier $N = 200 \cdot 1{,}16^t$, där t är tiden i timmar. $200\,000 = 200 \cdot 1{,}16^t$ löses grafiskt. Lösningen är $t \approx 47$ timmar. Efter cirka 47 timmar får hon feber.

4515 a) $B = 5 \cdot 10^{-4}$ T

b) $r = 25$ m

4516 a) En linjär funktion eftersom ökningen är konstant.

b) Djupet i cm är $y = 10 + 1{,}5t$, där t är tiden i timmar. Efter fem timmar är snödjupet $y(5) = 17{,}5$ cm

4517 a) En exponentiellt växande funktion.

b) Antalet bakterier $N = 200 \cdot (1{,}60^{1/24})^t$, där t är tiden i timmar.
$N(8) = 200 \cdot 1{,}60^{1/3}$ st =
= 234 st

c) $100\,000 = 200 \cdot 1{,}60^{t/24}$

Grafritande räknare ger lösningen $t \approx 317$ timmar.

4518 a) Energin $E = 9260\Delta T$

b) Temperaturdifferensen är 30 °C, vilket ger energin $E = 277\,800$ J ≈ 280 kJ

4519 a) Kraften $F = k \cdot v^2$ där v är hastigheten i m/s.

b) $k = 2{,}8/20^2$ Ns^2/m^2 ≈
≈ 0,007 Ns^2/m^2

4520 a) Folkmängden $y = 142\,440 - 1\,044t$, där t är tiden i år efter år 2013.

b) Minskningen är 10 440 personer (cirka 7,33 % av befolkningen) på 10 år.

Förändringsfaktorn är 0,9267 på 10 år, och alltså $0{,}9267^{1/10} \approx 0{,}9924$ på ett år.

Folkmängden $y = 142\,440 \cdot 0{,}9924^t$ där t är tiden i år efter år 2013.

c) Enligt den linjära modellen: $y(22) = 119\,472$ personer. Enligt den exponentiella modellen: $y(22) = 120\,432$ personer.

4521 $F = k \cdot \frac{1}{r^2}$

a) Falskt. Om avståndet halveras blir kraften fyra gånger så stor.

b) Falskt. Om avståndet fördubblas blir kraften en fjärdedel så stor.

c) Sant.

d) Sant. $F = k \cdot \frac{1}{r^2}$ betyder att $F \cdot r^2 = k$. Multiplicera båda sidor om likhetstecknet med r^2 och förkorta.

4522 De växer lika snabbt!

4523 $y = 2^x$ växer snabbast när x blir allt större. Notera att $y = x^2$ har större funktionsvärden än $y = 2^x$ när x är mellan $x = 2$ och $x = 4$!

4524 $H = k \cdot \frac{1}{r}$. Multiplicera med r på båda sidor: $H \cdot r = k$

4525 Maximalt tillåtna intensiteten är $I_{max} = k \cdot 1/2{,}6^2 \approx k \cdot 0{,}148$. På avståndet 10,0 meter är intensiteten $I = k \cdot 1/10^2 = 0{,}01 \cdot k$. Andelen av den tillåtna intensiteten är då

$$\frac{I}{I_{max}} = \frac{0{,}01k}{0{,}148k} \approx 0{,}0676,$$

ca 6,76 %.

4526 a) $f(x) = x + 4$ och $g(x) = 2\sqrt{x} + 4$

b) $f(x) - g(x) = x - 2\sqrt{x}$

c) $f(0{,}5) - g(0{,}5) = 0{,}5 - 2\sqrt{0{,}5} \approx -0{,}91$

BLANDADE UPPGIFTER

1 Graf nummer 2 och 3. För dem gäller att "för varje x-värde finns endast ett y-värde".

2 Grafen börjar då $x = -1$ och slutar då $x = 3$, men markeringen säger att $x = 3$ inte ingår. Definitionsmängden är $-1 \leq x < 3$. Värdemängden är $1 \leq y < 4$.

3 a) Definitionsmängd: Alla $x \geq 0$. Värdemängd: Alla $y \geq 0$.

b) Definitionsmängd: Alla $x > 0$. Värdemängd: Alla tal $y > 0$.

c) Definitionsmängd: Alla reella tal x. Värdemängd: Alla tal $y \geq 0$.

d) Definitionsmängd: Alla reella tal x utom $x = 0$. Värdemängd: Alla tal $y > 0$

4 a) $f(x) = 5x$ och $p(x) = 1{,}05x - 4$ är linjära samband.

b) $g(x) = 10^2 \cdot 1{,}1^x$ är en exponentialfunktion.

c) $h(x) = 2\,000 \cdot x^5$ är en potensfunktion

d) $f(x) = 5x$ är en proportionalitet.

5 a) $f(2) = -1$

b) $f(-2) = -1$

c) $f(a) = 3 - a^2$

d) $f(2a) = 3 - (2a)^2 = 3 - 4a^2$

6

b	A
1	2,5
2	4,5
3	6,5
4	8,5
5	10,5

7 $y = 3x + 2$

8 a) $k = \frac{2}{3}$ b) $k = -2$

c) $k = \frac{4}{7}$ d) $k = \frac{1}{18}$

9 Nej. Kvoten av pris och vikt är inte densamma för båda vikterna.

10 a) $f(2) = 2$

b) $f(0) = -2$

c) $f(x) = 2$ har lösningarna $x = -2$ och $x = 2$

d) $f(x) = -1$ har lösningarna $x = -1$ och $x = 1$

11 a) $f(0{,}5t) = (0{,}5t)^2 - 3 \cdot (0{,}5t) = 0{,}25t^2 - 1{,}5t$

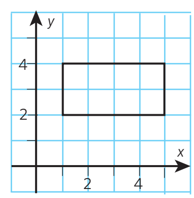
b) $f(2t) = (2t)^2 - 3 \cdot (2t) = 4t^2 - 6t$

12 a) $t = 6$ b) $t = 4$

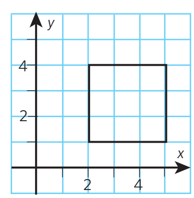
13 a) $f(0) = -15$

b) $v = 5$

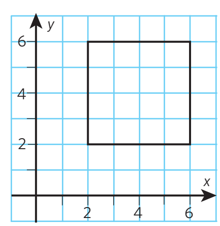
14 a)



b)



c)



15 $2y - 3x - 3 = 0$

16 a) $k = 3$, $m = -2$

b) $k = -\dfrac{1}{5}$, m =3

17 $y = \dfrac{1}{3}x + 4$

18 $y = -0{,}6x + 5$

19 $x = 5$ och $y = -0{,}5$

20 a) Kvadrant 4

b) Kvadrant 1 och kvadrant 3

c) Kvadrant 1 och kvadrant 3

d) Kvadrant 2

21 $y = 27\,500 \cdot 1{,}025^t$

22 a) $K = 5\,000 \cdot 1{,}02^t$

b) $K(3) = 5\,000 \cdot 1{,}02^3$ kr $\approx$ $\approx 5\,306$ kr

23 $(3, -3)$, $(-3, 3)$ och $(-3, -3)$

24 $y = -3$

25 a) $f(x)$ växer snabbast eftersom k-värdet är störst.

b) $f(-2) = -1$ och $g(-2) = 1$. $g(-2)$ är störst.

c) $g(x) = 22$ ger $x = 12$

d) $f(x) = g(x)$ ger $x = 2$

26 Nej. Punkterna ligger inte på samma linje.

27 Om arean är 12 a.e. är t ex basen 6 och höjden 4. Andra hörn kan då vara $(3, -2)$ och $(9, -2)$.

28 $(7, 1)$, $(3, 5)$, $(1, 3)$ eller $(5, -1)$

29 a) $f(2) - g(2) = 11 - 0 = 11$

b) $f(a) - g(a) = 4a + 3$

c) $f(2a) - g(3a) = (4a^2 + 6a + 1) - (9a^2 - 3a - 2) = -5a^2 + 9a + 3$

d) $f(a + 1) - g(a + 1) = (a + 1)^2 + 3(a + 1) + 1 - (a + 1)^2 + (a + 1) + 2 = 4a + 7$

30 $p(3) = 0{,}5 \cdot 3^3 - 2 \cdot 3 + 1 = 8{,}5$ och $p(-2) = 0{,}5 \cdot (-2)^3 - 2 \cdot (-2) + 1 = 1$, så $p(3) - p(-2) = 7{,}5$

31 $f(x) = \dfrac{k}{x + 12}$. $f(0) = 2$ ger

$k = 24$, så $f(x) = \dfrac{24}{x + 12}$

32 Proportionalitetskonstanten $k = 2{,}8/20$ cm/N $= 0{,}14$ cm/N

Om kraften är 65 N blir spiralfjädern $(65 \cdot 0{,}14)$ cm $= 9{,}1$ cm längre.

33 a) $(2, -2)$, $(5, -1)$ och $(4, -3)$

b) $(-2, 2)$, $(-5, 1)$ och $(-4, 3)$

c) $(2, 2)$, $(1, 5)$ och $(3, 4)$

34 a) $x = -1$ och $x = 1$

b) $x < 0{,}5$

c) $x = 0$ och $x = 2$

d) $0 < x < 2$

35 a)

t	$g(t)$
1	5
2	9
3	13
4	17

b) $g(t) = 4t + 1$

36 a) $x = -\dfrac{1}{3}$

b) $4a - 4 = 10a - 3$. $a = -\dfrac{1}{6}$

37 $x = -1$ och $x = 4$

38 $y = 0{,}95x + 5357{,}5$

39 a) $g(4) = 7{,}8125$

b) -29

c) $x = \pm 50$

d) $x = 5$

40 a) $A(x) = x \cdot (100 - x)$

b) $x = 50$ m, inhägnaden blir en kvadrat.

41 $f(x) = k \cdot x^2$

$f(4) = k \cdot 4^2 = 8$ ger $k = 0{,}5$.

$f(x) = 0{,}5 \cdot x^2$

42 a) $y = 50 \cdot 1{,}05^t$

b) $y = 50 \cdot 0{,}98^t$

c) 6 % är 3 djur, så $y = 50 + 3t$

d) 4 % är 2 djur, så $y = 50 - 2t$

43 a) $f(t)$ visar en linjär ökning från 20 °C. Temperaturen ökar med 15 °C per minut. $g(t)$ är en exponentiell modell som startar på 20 °C. Temperaturen ökar med 27,53 % per minut.

b) Grafritande räknare ger $t > 8$ minuter.

c) $f(t)$ har definitionsmängden $0 \le t \le 18{,}7$ minuter.

$g(t)$ har definitionsmängden $0 \le t \le 11{,}1$ minuter.

44 Båda funktionerna växer lika snabbt. Sätter vi $f(x) = g(x)$ får vi ekvationen $0 = -5$ som saknar lösning.

45 Hur stor ska räntesatsen vara för att jag ska ha 2 300 kronor på kontot efter 5 år om jag i dag sätter in 2 000 kronor?

46 a) $y = -\dfrac{d}{c}$

b) $x = -\dfrac{b}{a}$

c) $k = -\dfrac{a \cdot d}{b \cdot c}$, $b \neq 0$, $c \neq 0$

47 a) $x \cdot 1{,}025^4 = 8\,000$ ger $x = 7\,248$ (kr)

b) $K(x) = 7\,248 \cdot 1{,}025^x$

48 $h(t) = C \cdot 0{,}82^t$

$h(6) = 304$ ger $304 = C \cdot 0{,}82^6$. Då är $C = 1\,000$ och funktionen är alltså $h(t) = 1\,000 \cdot 0{,}82^t$

49 $p(z) = C \cdot z^{0,8}$
$P(12) = 36,5$ ger
$36,5 = C \cdot 12^{0,8}$. Då är $C = 5$ och funktionen är alltså
$p(z) = 5 \cdot z^{0,8}$

50 a) Halveringstiden är 30 år, så förändringsfaktorn är 0,5 på 30 år. Då är den $0,5^{1/30}$ på ett år. $0,5^{1/30} \approx 0,977$, vilket betyder en minskning med 2,3 % per år.

b) På 31 år är förändringsfaktorn $(0,5^{1/30})^{31} \approx 0,489$. Således har 51,1 % sönderfallit.

c) $A(t) = 2\,000 \cdot 0,5^{t/30}$, om aktiviteten var 2 000 Bq från början.

d) Ekvationen $A(t) = 1\,500$ löses grafiskt.
$1\,500 = 2\,000 \cdot 0,5^{t/30}$ har lösningen $t \approx 12,5$ (år).

51 Lösningarna är $x = 0$ och $x = 2$. En produkt har värdet 0 när någon av faktorerna är 0.

52 $k(2x + 2) + m = 2x + 2$
$2kx + 2k + m = 2x + 2$
Koefficienten framför x ska vara 2, så $2k = 2$. Det ger $k = 1$. Konstanttermerna i vänsterledet är $2k + m = 2 + m$ om $k = 1$.
I högerledet är konstanttermen 2, så $2 + m = 2$. Då måste $m = 0$. Alltså är $k = 1$ och $m = 0$.

53 $f(a^2) = 3a^2 + 5$
$g(a^2 - 2) = 4(a^2 - 2) - 3 =$
$= 4a^2 - 11$
$3a^2 + 5 = 4a^2 - 11$ ger $a^2 = 16$.
Då är $a = \pm 4$

54 $f(2a) - f(a + 1) =$

$$= \frac{-2a}{3} + 1 - \left(\frac{-(a+1)}{3} + 1\right) =$$

$$= \frac{-2a}{3} + \frac{a+1}{3} = \frac{-a+1}{3}$$

55 (1, –5), (3, –5) och (0, 0)

56 Linjärt samband: $y = 10 + 15x$
Exponentialfunktion:
$y = 10 \cdot 2^x$

57 När x ökar med 1 ökar y procentuellt med $1,2 / 3 = 0,4 =$ $= 40$ %. Förändringsfaktorn är 1,4 och då är funktionen
$y = 3 \cdot 1,4^x \quad b = y(4) \approx 11,5$
Alternativ lösning $y = C \cdot a^x$
$3 = C \cdot a^0 \Rightarrow C = 3$

$$4,2 = 3 \cdot a^1 \qquad a = \frac{4,2}{3} = 1,4$$

$y = 3 \cdot 1,4^x \;\; b = y(4) \approx 11,5$

58 $$f(x) = k \cdot \frac{1}{x^2}$$

$f(1) = 4$ ger $k = 4$ så funktionen

är $$f(x) = \frac{4}{x^2}$$

$$f(5) = \frac{4}{25}, \text{ dvs. } a = \frac{4}{25}$$

59 a) $f(g(x)) = 2 - g(x) =$
$= 2 - (3x - 1) = 3 - 3x$

b) $g(f(x)) = 3 \cdot f(x) - 1 =$
$= 3(2 - x) - 1 = 5 - 3x$

c) $x = 1$

d) $3 - 3x = 5 - 3x$ saknar lösning. Förenklar man ekvationen får man $3 = 5$, oavsett vilket x man sätter in.

60 a) $G(t) = 350\,000 + 20\,000t$

b) $D(t) = 320\,000 \cdot 1,06^t$

c) De första åtta åren tjänar Gustav mer än David, men sen är Davids lön högre.

61 $L(7) = a(1 - 0,97^7) \approx$ $\approx a \cdot 0,192 = 4,2$ cm. Det ger att $a \approx 21,9$ cm. Efter lång tid kommer längden L att närma sig 21,9 cm, som alltså är plantans maximala längd.

62 (2, 2)
VL: $2^3 \cdot 2^{-2} = 2$
HL: $6 - 2 \cdot 2 = 2$
VL = HL, vilket skulle visas.

63 $k = 0$ och $k = 1$ ger 0 skärningspunkter. $k = 2$ ger 1 skärningspunkt. Linjen nuddar vid funktionen $y = x^2$ i en enda punkt (linjen är en *tangent*). $k = 3$ ger 2 skärningspunkter.

KAPITELTEST

1 AB = CD = 5 l.e.,
AD = BC = 3 l.e.

2 T ex (–1, –2) och (2, 1). Sambandet mellan x- och y-koordinaterna för punkterna på linjen är $y = x - 1$.

3 a) $f(3) = -0,5$

b) $$x = \frac{4}{1,5} = \frac{8}{3}$$

c) $f(2a) - f(3) =$
$= 4 - 1,5 \cdot 2a - (-0,5) =$
$= 4,5 - 3a$

4 a) Avtagande

b) Växande

c) Växande. $y = 2 \cdot 0,8^{-x} =$

$$= 2 \cdot \left(\frac{1}{0,8}\right)^x = 2 \cdot 1,25^x.$$

Förändringsfaktorn > 1.

d) Avtagande.

$$y = 3 \cdot 1,2^{-x} = 2 \cdot \left(\frac{1}{1,2}\right)^x.$$

Förändringsfaktorn < 1.

5 a) $f(0) = -2$. Om $x = 0$ är $y = -2$ på grafen. Grafen skär y-axeln där $x = 0$, och där har grafen y-koordinaten $y = -2$.

b) $f(x) = 0$ innebär att grafens y-koordinater är 0, och det är skärningspunkterna med x-axeln. Lösningen är $x = -1$ eller $x = 2$.

6 a) 2 och 3 b) 1

c) 4 d) 3

7 $k = \frac{2}{7}$

8 a) $y = -\frac{x}{2} + 3$

b) $y = 2x + 7$

9 $p = 3$

10 a) $y = 110\,000 \cdot 0{,}95^t$

b) $y = 110\,000 - 6\,000t$

11 $g(x) = k\sqrt{x}$

$g(12) = 6$ så $6 = k\sqrt{12}$, alltså är

$k = \frac{6}{\sqrt{12}} = \frac{6}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = \sqrt{3}$

$g(x) = \sqrt{3}\cdot\sqrt{x} = \sqrt{3x}$

12 a) Definitionsmängd: x kan vara alla reella tal. Värdemängd: $f(x) \geq 4$. Det minsta värdet som funktionen kan anta är 4, om $x = 0$.

b) Definitionsmängd: x kan vara alla reella tal utom $x = -5$. Värdemängd: Alla reella tal utom $y = 0$.

c) Definitionsmängd: $x \geq 2$. Värdemängd: $g(x) \geq 0$.

d) Definitionsmängd: x kan vara alla reella tal. Värdemängd: $p(x)$ kan aldrig vara negativt eller 0, så $p(x) > 0$.

13

x	y
1	-2
3	2
5	6
10	16

Sambandet är $y = 2x - 4$

14 Ja, kvoten pris/vikt är densamma.

15 $g(f(x)) = 3(x^2 - 2) - 186 =$
$= 3x^2 - 192$

$3x^2 - 192 = 0$ ger $x^2 = 64$,
$x = \pm 8$

16 a) $p(2a) - q(a) =$
$= 1 - 2a - (1{,}2a - 3) =$
$= 4 - 3{,}2a$

b) $p(0{,}02a^3) = 1 - 0{,}02a^3$

$q(0{,}01a^3) = 0{,}012a^3 - 3$

$1 - 0{,}02a^3 - (0{,}012a^3 - 3)$
$= 4 - 0{,}032a^3 = 0$ har lösningen $a = 5$

17 Vattnets kokpunkt som funktion av höjden över havsytan är en avtagande exponentialfunktion. $T = C \cdot a^h$, där T är kokpunkten och h höjden över havet.

$T(0) = 100$ ger $C = 100$.

$T(4800) = 100 \cdot a^{4800} = 84$, så
$a^{4800} = 0{,}84$ och $a = (0{,}84)^{1/4800}$

$T(3110) = 100 \cdot (0{,}84)^{3110/4800} =$
$= 89{,}3$ dvs. 89,3 °C

18 a) Ökningen är 2 500 stycken, vilket är 20,8 % på 10 år. Förändringsfaktorn på 10 år är 1,208 och då är förändringsfaktorn $1{,}208^{1/10} \approx 1{,}019$ per år. Ökningen är 1,9 % per år.

Antalet vildsvin efter 1995 är då $N = 12\,000 \cdot 1{,}019^t$, där t är tiden i år efter 1995.

b) Köttet har minskat $(215–178) / 215 = 0{,}172 =$ $= 17{,}2$ % på 10 år. Det motsvarar en förändringsfaktor på 0,828 på 10 år, och alltså $0{,}828^{1/10} \approx 0{,}981$ per år. Det innebär en minskning med 1,9 % per år.

Priset $P = 215 \cdot 0{,}981^t$, där t är antal år efter 1995.

c) När antalet vildsvin ökar, ökar också tillgången på vildsvinskött och då sjunker ofta priset. I modellen minskar priset på vildsvinskött med lika många procent som antalet vildsvin ökar.

19 a) Höjden bestäms av $y(0) = 4$. Basen bestäms av lösningen till $y = 0$, skärningspunkten med x-axeln. Den x-koordinat där linjen skär x-axeln är $x = \frac{4}{k}$. Triangelns area är då $\frac{4\cdot\frac{4}{k}}{2} = \frac{16}{2k}$. Arean är 12 a.e. om $k = \frac{16}{24} = \frac{2}{3}$

b) Höjden bestäms av $y(0) = 8k$. Basen bestäms av lösningen till $y = 0$, skärningspunkten med x-axeln. Lösningen till $y = 0$ är $x = \frac{8}{k}$. Då är arean $\frac{8k\cdot\frac{8}{k}}{2} = 32$. Du kan förkorta bort k. Alltså är arean oberoende av k. Arean är 32 a.e.

DISKUTERA, RESONERA OCH MODELLERA

S. 149

a) 40 000/360 km ≈ 111 km

b) 1 minut är 1/60 grad.
1/60 av 111 km = 1 852 m

c) De ligger på samma längdgrad, men det är 1 grad och 47 min skillnad i breddgrad. Skillnaden motsvarar
$(111 + 47 \cdot 1{,}852)$ km ≈ 198 km.

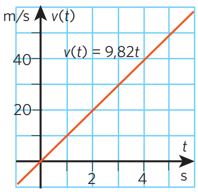
d) 1 knop = 1 nautisk mil per timme. Resan tar
107 / 15 h ≈ 7,13 h ≈
≈ 7 tim 8 min.

S. 201

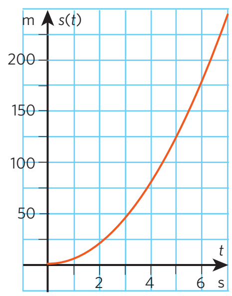
a)

t (s)	s(t) (m)	v(t) (m/s)
0	0	0
1	4,91	9,82
2	19,64	19,64
3	44,19	29,46
4	78,56	39,28
5	122,75	49,1

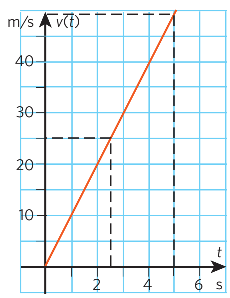
b)



c)



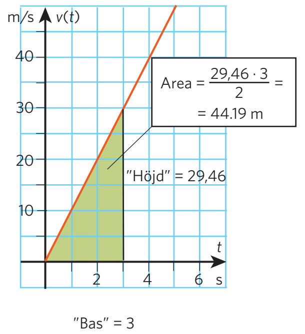
d) Medelhastigheten är
$$\frac{v(5)+v(0)}{2} = \frac{49{,}1+0}{2} \text{ m/s} =$$
$= 24{,}55$ m/s



I en proportionalitet, t.ex. $v(t) = 9{,}82t$, hittar vi medelvärdet av två funktionsvärden genom att titta på funktionsvärdet för det t som ligger precis mitt emellan t-värdena för de två funktionsvärden för vilka vi vill beräkna medelvärdet.

I det här fallet är alltså medelvärdet av $v(5)$ och $v(0)$
$$\frac{v(0)+v(5)}{2} = v(2{,}5)$$
Mitt emellan $t = 0$ och $t = 5$ ligger $t = 2{,}5$

e)



Arean under grafen är en triangel, så vi börjar med att bestämma bas och höjd.

Om vi vill veta arean mellan $t = 0$ och $t = 3$ mäter vi 3 enheter längs t-axeln. Det är triangelns bas.

Höjden är funktionsvärdet. $v(3) = 29{,}46$ i figuren.

Triangelns area blir då
$$\frac{3 \cdot 29{,}46}{2} = 44{,}19$$

I täljaren multipliceras en hastighet med en tid, och produkten $v \cdot t$ är en sträcka. Alltså motsvarar arean under grafen en sträcka.

Jämför med tabellen, där $s(3) = 44{,}19$ meter!

Vill vi veta sträckan efter t sekunder. Triangeln har basen t och höjden blir $v(t)$.

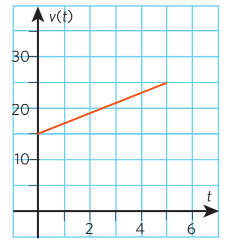
Arean blir
$$\frac{t \cdot v(t)}{2} = \frac{t \cdot 9{,}82t}{2} = \frac{9{,}82t^2}{2}$$
Dvs. samma uttryck som fallsträckan!

S. 202 KARIN

a)

t	$v(t)$
0	15
1	17
2	19
3	21
4	23
5	25

b)



c) Vid tiden $t = 5$ s har Karin hastigheten 25 m/s.

d) $s(5) = \left(15 \cdot 5 + \frac{2 \cdot 5^2}{2}\right) \text{m} = 100 \text{ m}$

Karin kör 100 m på 5 sekunder. Hennes medelhastighet är 100 / 5 m/s = 20 m/s.

S. 202 BOLLEN

a) och b) Bollen startar med 2 m/s, och efter 7 sekunder har den hastigheten 4,8 m/s.

c) Efter 10 sekunder har bollen hastigheten $(2 + 0{,}4 \cdot 10)$ m/s = = 6 m/s. Medelhastigheten under de första 10 sekunderna är
$$\frac{v(0)+v(10)}{2} = \frac{2+6}{2} \text{ m/s} = 4 \text{ m/s}$$
Värdena kan också utläsas ur diagrammet.

d) Linjens lutning är accelerationen, 0,4 m/s^2

e) Under 10 s hinner bollen $(4 \cdot 10)$ m = 40 m

S. 205

a) Närmaste heltal är $x = 7$. Lösningen till ekvationen är $x \approx 6{,}562$

x	$4 + \sqrt{x}$
7	6,64575
6,64575	6,577935
6,577935	6,564749
6,564749	6,562177
6,562177	6,5616746
6,5616746	6,56157658

b) Starta med närmaste heltal, dvs. $x = 2$. Lösningen till ekvationen är $x \approx 2{,}227$

c) Börja med att skriva ekvationen $x = 1 + \frac{8}{\sqrt{x^3}}$. Starta med $x = 3$. Lösningen till ekvationen är $x \approx 2{,}752$. Många iterationssteg krävs.

Kapitel 5

5101 a) 15 katter b) 31 råttor c) 7 katter d) 33 %

5102 a) katt b) 8 st c) 2/15 d) 25 % fler

5103 a) Medelvärde 8,4 p, medianvärde 7 p och typvärde 7 p.
b) Medelvärde 8,3 p, medianvärde 8 p, typvärde finns inte.

5104 a) 5 dagar
b) 3,4 dagar
c) 4 dagar

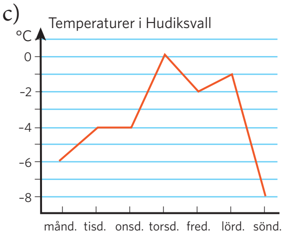
5105 a) 4 min
b) 6 min
c) De första 2 minuterna, 5 m/s
d) 1,5 m/s

5106 Medelpriset 3,90 kr, medianpriset 4 kr.

5107 a) 20 st
b) 15 %
c) Nej, vi vet inte hur många av abborrarna som är längre än 12 cm i klassen där längden varierar mellan 10 och 15 cm.

5108 a) 90 st
b) nyheter
c) 83 %
d) 50 %

5109 a) −4 °C
b) −3,6 °C
c)



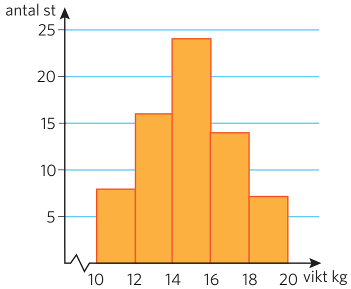
5110 21 år

5111 a) 10.00–17.00
b) ca 5,1 °C
c) ca 12,5 °C

5112 a) 77 %
b) 150 bilar

5113 a) 2,3 dm
b) 2 dm
c) 3 / 7 ≈ 43 %

5114 a) 39 barn
b) Sannolikt 36 barn
c)

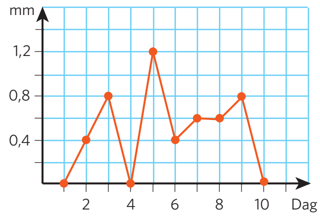


5115 a) 345 kr (minst)
b) Nej, det kommer nog flest vid lunch och middagstid.
c) Kim kontrollerade inte kön kontinuerligt utan bara var 5:e minut.

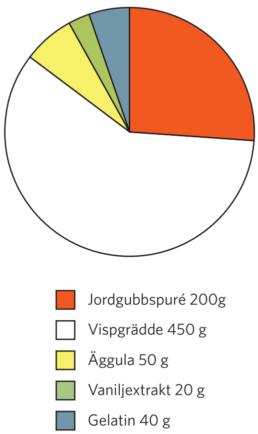
5116 a) a kan vara vad som helst, och $b = 3$.
$(2 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + a \cdot 3 + 3 \cdot 4 + b \cdot 5) / (10 + a + b) = 3$. När man löser ekvationen går a bort.
b) Nej, det går inte att bestämma.

5117 a) 19 %
b) 41 %. (30 − 11) % = 19 % svarade endast blått, och (40 − 11) % = 29 % svarade endast grönt. Det innebär att (100 − 19 − 29 − 11) % = 41 % svarade något annat än blått eller grönt.

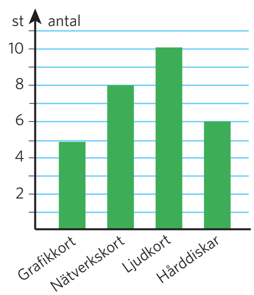
5118 b)



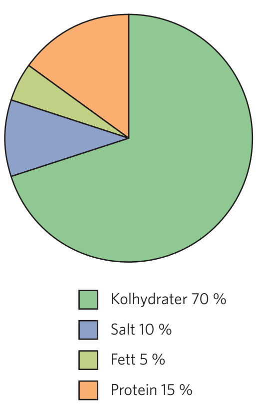
5119



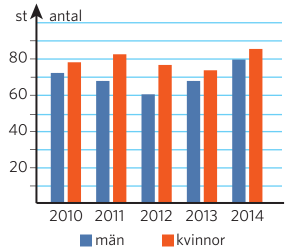
5120



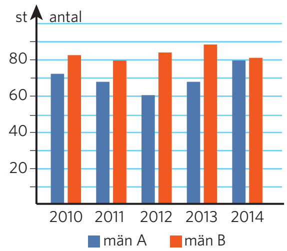
5121



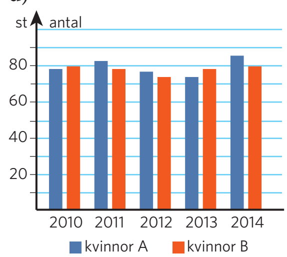
5122 b)



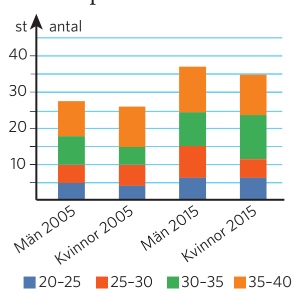
c)



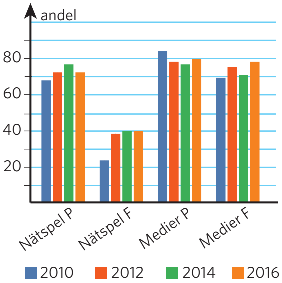
d)



5123 a) Flera alternativ är möjliga för bra presentation, till exempel:

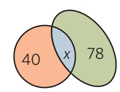


5124 a) T.ex.:



b) År 2016 var det 76 % av pojkarna som ägnade sig åt nätspel, och 80 % som ägnade sig åt sociala medier. Om 60 % ägnade sig åt både och, måste det vara 16 % som bara ägnar sig åt nätspel, och 20 % som bara ägnar sig åt sociala medier.

c) Enhet: %



Nätspel: 40

Medier: 78

Både och: x

Bara nätspel: $40 - x$

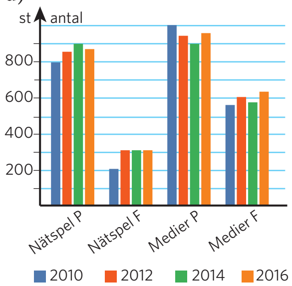
Bara medier: $78 - x$

Summa: $118 - x$

Varken nätspel eller medier: $100 - (118 - x) = x - 18$, $18 \le x \le 40$

Bara nätspel: $(40 - x)$ som är som störst då x är som minst, dvs. då $x = 18$, vilket ger $40 - 18 = 22$. Den största möjliga andelen är 22 %.

d)



År	Nät-spel P	Nät-spel F	Medier P	Medier F
2010	804	192	1008	560
2012	852	312	936	600
2014	924	320	912	576
2016	888	320	960	624

5201 Diagrammet är vilseledande eftersom stapeln för 2018 inte bara är högre utan även bredare än stapeln för 2014.

5202 Diagrammet är vilseledande på grund av att y-axeln inte börjar vid noll.

5203 Diagrammet är vilseledande på grund av att y-axeln inte börjar vid noll. Till exempel ser boendetrivseln ut att var 5 gånger större i innerstaden än i närförort, men tittar man på siffrorna så ser man att det inte alls är så.

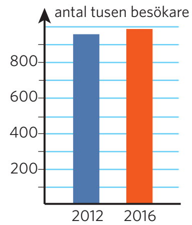
5204 Diagrammet är vilseledande på grund av att y-axeln inte börjar vid noll. Stapeln för 40 000 kr är mer än dubbelt så hög som stapeln för 20 000 kr.

5205 51 % av de som kör för fort är 20–30-åringar. Detta kan bero på att de flesta bilförare är mellan 20 och 30 år och behöver inte bero på att 20–30-åringar kör fortare än andra.

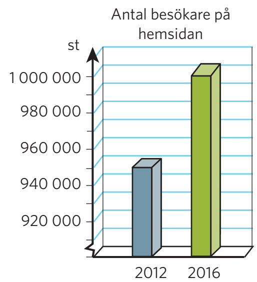
5206 a) Det övre diagrammet är vilseledande. Temperaturvariationen ser betydligt större ut än den egentligen är beroende på att y-axeln inte börjar vid 0.

b) Det första diagrammet visar en mer dramatisk ökning, och är bra för att till exempel illustrera klimatförändringar. Det andra diagrammet har inte en lika drastisk ökning, och kan vara bra att jämföra med och för att bättre kunna se en trend i temperaturstegringen.

5207 a)



b) 5 % ökning motsvarar 47 500 fler besökare, så det totala antalet besökare var knappt 1 000 000.



5301 a) 50 elever

b) 50 flickor

c) 30 pojkar

5302 a) 620 personer

b) T.ex. ”Hur gammal är du?” eller ”Tycker du om bananer?”

5303 Exemplevis någon situation där fördelningen mellan olika kategorier inte är känd.

5304 a) 50 personer, det vill säga 25 %.

b) 1/3 c) 1/4

d) 50 / 160 ≈ 31 %

5305 a) 12 personer

b) Om bortfallet svarat att det var bra:
(32 + 12) / 80 = 0,55. 55 % tyckte det var bra, 45 % att det var dåligt.

Om bortfallet svarat att det var dåligt:
(36 + 12) / 80 = 0,60. 60 % tyckte det var dåligt, 40 % att det var bra.

5306 Nej. På 5 %-nivån är värden på stickprov signikanta om sannolikheten för ett sådant värde eller lägre är högst 2,5 %, givet att nollhypotesen gäller.

5307 ja

5308 Mindre. Ett konfidensintervall på 90 %-nivån ger en gräns för signifikans på 10 %. Ett konfidensintervall på 95 %-nivån ger en gräns för signifikans på 5 %. Konfidensintervallet på 90 %-nivån medför alltså att intervallen för de signifikanta värdena är större än de som gäller för konfidensintervall på 95 %-nivån. Omvänt måste då konfidensintervallet på 90 %-nivån vara mindre än konfidensintervallet på 95 %-nivån.

5401 a) starkt negativ, b) svagt positiv, c) svagt negativ, d) ingen, e) starkt positiv

5402 En starkt negativ korrelation.

5403 a) För inte P är $\frac{4}{5}$ också Q. För P är $\frac{5}{6}$ också Q. Positiv korrelation.

b) För både inte P och P är $\frac{1}{3}$ inte Q. Ingen korrelation.

5404 Översta raden: 57, 9. Undre raden: 3.

5405 Fram till 1970-talet ökade rökningen bland kvinnor kraftigt. Lungcancer är ofta en följd av många års rökning. Många av de kvinnor som nu får sjukdomen började röka för länge sedan.

5406 I ungdomsidrott tävlar man i allmänhet i åldersklasser, baserade på födelseår. De som är födda tidigt på året har genomsnittligt sätt kommit längre i sin fysiska utveckling, vilket gynnar dem i tävlingar.

5407 En rimlig förklaring är att det både äts mer glass och badas mer utomhus när det är varmt ute och att mycket bad utomhus tyvärr leder till drunkningstillbud. En tredje variabel påverkar alltså de två övriga.

BLANDADE UPPGIFTER

1 a) Anton gjorde 100 försök.

b) 54%

c) 3

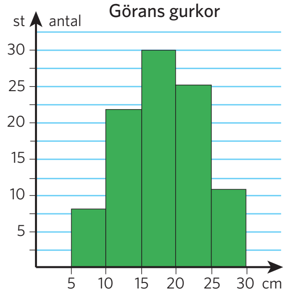
d) Medelvärdet är 3,4, medianvärdet är 3.

2 22 917 kr

3 Typvärdet är 2 år, medianvärdet är 2 år och medelvärdet är 2,3 år.

4 a) Histogram

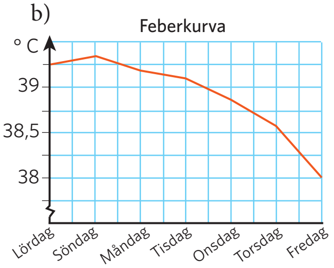
b)



c) $(8 \cdot 7{,}5 + 22 \cdot 12{,}5 + 30 \cdot 17{,}5 + 25 \cdot 22{,}5 + 11 \cdot 27{,}5) / 96 \approx 18$ cm

5 a) 39,0 °C

b)



6 30 kr

7 36 bilder

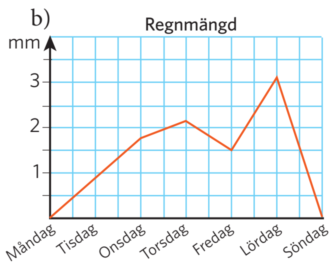
8 a) Anna 22 yngel, Ellen 44 yngel och Vera 54 yngel.

b) Vera fick x yngel, Ellen fick $(x - 1)$ yngel och Anna fick $(x - 2)$ yngel.

Medelvärdet: $(x + x - 1 + x - 2) / 3 = x - 1$. medelvärdet är alltså lika med det antal yngel som Ellen fått. VSV.

9 a) 1,3 mm

b)



10 Eftersom den lodräta axeln inte börjar vid 0 ser skillnaden mellan klasserna större ut än den egentligen är.

11 a) 1 st

b) 18 %

c) 8 procentenheter

12 a) 38, 52 och 58 år

b) 52 år

c) Medelåldern är 35,7 år och medianåldern är 30,5 år.

13 a) 7 b) 7 c) 23,4 %

14 Talen kallas x, $x + 1$, $x + 2$, $x + 3$ och $x + 4$. Medelvärdet är $(x + x + 1 + x + 2 + x + 3 + x + 4) / 5 = (5x + 10) / 5 = x + 2$. VSV.

15 a) 401,9 g b) 24 %

16 a) 8 600 personer

b) Antalet ”ja”-röstande är mellan 3 651 och 5 027 personer.

17 Nej, diagrammet är vilseledande beroende på att den lodräta axeln inte börjar på 0.

18 Metod 1 är inte bra, eftersom eleverna som fått bäst resultat på senaste provet är förmodligen de som är mest nöjda för tillfället. Metod 2 är inte bra, eftersom han då inte får veta något om vad pojkarna tycker. Metod 3, ett helt slumpmässigt urval, är bäst i detta fall.

19 a) Det är tänkbart att hur väl man trivs på arbetet är beroende av vilken yrkeskategori man tillhör. Därför är det mindre bra att inga läkare fick enkäten.

b) Som mest kan 37 sjuksköterskor vara nöjda och 3 missnöjda, som minst kan 12 sjuksköterskor vara nöjda och 28 missnöjda.

c) Stratifierat urval. Det är 1/3 läkare och 2/3 sjuksköterskor i personalgruppen, så 5 enkäter bör gå till läkare och 10 enkäter bör gå till sjuksköterskor.

KAPITELTEST

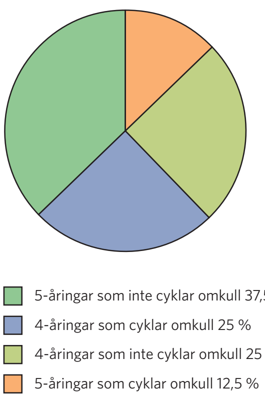
1 a) Ungefär 13 km.

b) Den blå linjen.

c) Georg tar endast en paus, den är 1 timme lång.

d) Under de två första timmarna.

2



3 Medianvärdet är 21 år och medelvärdet är 24 år. När en person avviker starkt ifrån gruppen, som här lärarens ålder, kan medianvärdet ge en bättre uppfattning än medelvärdet om åldrarna i gruppen.

4 Arams diagram är mest lämpligt. Den lodräta axeln i Lisas diagram är kapad.

5 Rita samma diagram som i uppgiften men med obruten vertikalaxel.

6 a) 497 kr b) 849 kr

c) 638 kr

7 a) 92 % b) 90 %

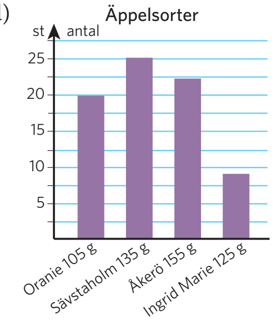
c) 88 % d) 30 %

8 a) 75 äpplen

b) 132 g

c) 135 g

d)



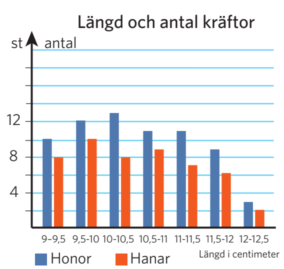
9 a) 10,5 cm

b) 10,0–10,5 cm

c) Totalt sett finns det lika många kräftor med längden 9,5–10,0 cm som de med längden 10,0–10,5 cm, alltså finns inget typvärde.

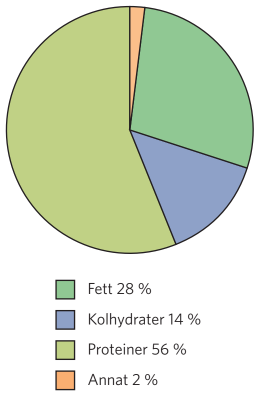
d) 64,4 %

e)



10 6 år

11 28 % fett, 14 % kolhydrater och 56 % proteiner.



12 Typvärdet 1 tim, medianvärdet 1 tim och medelvärdet 1,2 tim. Alltså är typvärdet eller medianvärdet det mest fördelaktiga värdet.

13 a) Diagrammet visar att 149 män och 117 kvinnor sportade.

149 / 0,52 män ≈ 287 män totalt, 117 / 0,55 kvinnor ≈ ≈ 213 kvinnor totalt.

$$\frac{149 + 117}{287 + 213} \approx 53{,}2\,\%$$

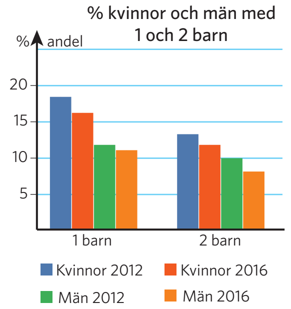
b) <u>Gång</u>: procentuellt sett fler kvinnor.

<u>Cykling</u>: män 29/287 ≈ ≈ 10,1 %, kvinnor 25/213 ≈ ≈ 11,7 %, procentuellt sett fler kvinnor.

<u>Golf</u>: män 36/287 ≈ 12,5 %, kvinnor 31/213 ≈ 14,6 %, procentuellt sett fler kvinnor.

<u>Badminton</u>: män 14/287 ≈ ≈ 4,9 %, kvinnor 11/213 ≈ ≈ 5,2 %, procentuellt sett fler kvinnor.

14 a)



b) Nej, det var 18 %.

c) Anta att det var 100 kvinnor och 100 män. Då var det 12 kvinnor och 8 män, dvs. totalt 20 stycken, som hade 2 barn år 2016. 12 av dessa 20 var kvinnor, så svaret blir ”Ja”.

d) 20 / 200 = 10 %

e) 12 / 20 = 60 %

15 Negativ korrelation i a) och c), positiv i d), ingen korrelation i b).

16 Vi antar att 25 % av bortfallet var positivt inställt. Det motsvarar 10 personer. Totalt var (0,60 · 360 + 10) personer = = 226 personer positivt inställda. Andelen är 226 / 400 = 56,5 %.

FACIT 1c

Svar kontrollfrågor

Kapitel 1

S. 8

1 Basen är 5, exponenten är 3

2 $3^0 = 1$

3 a) addera exponenterna
b) subtrahera exponenterna
c) multiplicera exponenterna

S. 13

1 För att på ett kortare sätt kunna beskriva stora eller små tal

2 Mellan 1 och 10

S. 22

a) Koefficienter: 12 och −6. Variabler: x och y. Variabeltermer: $12x$ och $-6y$. Konstantterm: +27.

b) Koefficienter: −1 och −8. Variabler: a och b. Variabeltermer: $-a$ och $-8b$. Konstantterm: 151.

S. 25

a) $4x - x^2$
b) $5a + ab$

S. 28

a) $5 \cdot 3 + 5 \cdot 4 = 35$
b) $6 \cdot 14 - 6 \cdot 8 = 84 - 48 = 36$

Kapitel 2

S. 55

a) $\Leftarrow$
b) $\Leftarrow$ och $\Rightarrow$
c) $\Rightarrow$

Om $x^2 = 25$ behöver det inte innebära att $x = 5$. Det är också möjligt att $x = -5$.

S. 56

a) ja
b) nej

S. 57

a) ändligt
b) oändligt många
c) ja, $\frac{98}{100}$
d) nej

S. 58

1. a) $x = 7$.
b) Ett enda: 7.

2. a) $x > 7$.
b) Oändligt många. Alla värden i intervallet $]7, \infty[$.

S. 65

Den fasta kostnaden är 800 kronor, och den rörliga kostnaden är 90 kronor för varje x.

S. 80

$a_7 = 39$

Kapitel 3

S. 100

1 a) En ökning av ett värde

b) En minskning av ett värde

2 a) Ökning med 10 %

b) Minskning med 3 %

S. 119

a) ”Klave” och ”Krona”

b) De fyra möjliga utfallen är ”Krona, Krona”, ”Krona, Klave”, ”Klave, Krona” och ”Klave, Klave”. En händelse kan bestå av ett eller flera av dessa.

S. 120

a) 7

b) 3

c) $P(\text{jämnt}) = \frac{3}{7}$

S. 123

De är oberoende händelser. Vad tärningen i andra kastet visar påverkas inte av vad tärningen i första kastet visar.

S. 125

$P(\text{krona, krona}) = ¼$

$P(\text{krona, klave}) = ¼$

$P(\text{klave, krona}) = ¼$

$P(\text{klave, klave}) = ¼$

Kapitel 4

S. 148

Efter tio sekunder börjar vattnet rinna över. Även om hinken står kvar under flödet, är vattendjupet i den fortsatt 20 cm. Ekvationen $f(t) = 2t$ kan inte längre gälla.

- x
- $g(x)$
- $-1 \leq x \leq 1$
- $-3 \leq g(x) \leq 3$

S. 159

a) $y = 3x$ och $y = -4x$

b) a och b, de går genom origo.

S. 163

a: $m = 3$

b: $m = -2$

c: $m = 1$

S. 165

a: $k = 3$

b: $k = 1$

c: $k = -1$

S. 172

Lutningen
$k = (20 - 6) / (9 - 2) =$
$= 14 / 7 = 2$

$y = 2x + m$. Vi sätter in punkten $(2, 6)$: $6 = 2 \cdot 2 + m \quad m = 2$

Linjens ekvation är $y = 2x + 2$

S. 178

$k = -\frac{1}{4}$

S. 182

$y = 3$ är en linjär funktion med en horisontell, rät linje som graf. På formen $y = kx + m$ är $k = 0$ och $m = 3$.

$y = 2\sqrt{x} - 1$ är inte en linjär funktion. Den oberoende variabeln x är uppöojd till något annat än 1, här 0,5. Grafen utgör inte en rät linje.

S. 188

a) $c(x)$

b) $a(x)$ och $d(x)$

c) $b(x)$ är ett linjärt samband och $e(x)$ är en potensfunktion.

Kapitel 5

S. 247

Nedgången för Socialdemokraterna är inte signifikant. Uppgången för Centerpartiet är signifikant. Nedgången för Sverigedemokraterna är på gränsen till att vara signifikant.

Kapitel 6

S. 273

a) 2 cm   b) 3 cm

c) 3 cm   d) 2 cm

Programmering och digitala verktyg

Kapitel 2

Att lösa ekvationer med symbolhanterande verktyg

1. a) $x = 7/3$

b) $x = 333/37 = 9$

2. a) $p = 1{,}8$

b) $n = 10/3 \approx 3{,}33$

c) $r = -30{,}5$

3. a) $x = \pm\sqrt{8} = \pm 2\sqrt{2}$

b) $x = \pm\dfrac{5}{2} = \pm 2{,}5$

c) Inga reella lösningar

d) $x = -3$ e) $x = 4$

4. a) $r = \dfrac{10}{2\pi}\text{ m} \approx 1{,}59\text{ m}$

b) $r = \dfrac{4{,}27}{2\pi}\text{ cm} \approx 0{,}68\text{ cm}$

5. a) $r = \sqrt{\dfrac{20}{\pi}}\text{ m} \approx 2{,}52\text{ m}$

b) $r = \sqrt{\dfrac{9{,}6}{\pi}}\text{ cm} \approx 1{,}75\text{ cm}$

6. a) $x = \dfrac{y-5}{3}$

b) $t = \pm\sqrt{z-4}$

c) $r = \dfrac{5}{3}s^2 - 20$

7. a) $y = \dfrac{3x-7}{2} = 10$

b) $y = \pm\sqrt{2x-12} = \pm\sqrt{6}$

c) $y = \dfrac{4x^3}{3} = 972$

8. $t = 16$. Svar: 16 s

9. $I = \dfrac{P^{1/3}}{0{,}62} \approx 3{,}59$. Svar: 3,59 A

10. a) $q = \sqrt{201} \approx 14{,}18$

b) $z = \dfrac{-q^2-1}{q^2-1} = -13/5$

Kapitel 3

Kalkylera i Excel – annuitetslån

A	B	C	D	E	F	G
Lånesumma	50 000					
Ränta	2,50%					
Perioder	4					
Period	Ing balans	Ränta	Amortering	Utg balans	Betalning	BETALNING
1	50 000	1 250	12 041	37 959	13 291	13 291
2	37 959	949	12 342	25 617	13 291	13 291
3	25 617	640	12 650	12 967	13 291	13 291
4	12 967	324	12 967	0	13 291	13 291
Total		3 164	50 000		53 164	53 164

Kapitel 4

Funktioner i GeoGebra

1. a) $f(-1) = -2$
b) $f(4) = 18$
c) $f(1/4) = 3$
d) $f(2/3) = 14/3$

2. a) $f(2x) = 4x^2 - 3$
b) $f(x^2) = x^4 - 3$
c) $f(a + 1) = a^2 + 2a - 2$
d) $f(3a - 4) = 9a^2 - 24a + 13$

3. a) $x = 3/5$
b) $x = 3/5$
c) $x = -4{,}6/1{,}7 \approx -2{,}70588$
d) $x = \pm 3$

4. a) $2x + 4 = 1 - 3x$, $x = -3/5$
b) $5x + 3 = 1$, $x = -2/5$
c) $-5x + 5 = 1$, $x = -4/5$
d) $-x^2 + 5 = 1$, $x = \pm 2$

5. a) $f(g(x)) = 6x + 4$
b) $g(f(x)) = 6x + 2$

6. a) $f(g(x)) = 2x^2 - 3$
b) $g(f(x)) = (2x - 3)^2 =$
$= 4x^2 - 12x + 9$
c) $f(f(x)) = 2(2x - 3) - 3 =$
$= 4x - 9$
d) $g(g(x)) = x^4$

7. $f(f(f(x))) = x^{27}$

8. a) $f(f(x)) = 1/(1/x) = x$ och
$g(x/2) = x$
b) $g(1/x) = 2/x$ och $2 \cdot f(x) = 2/x$

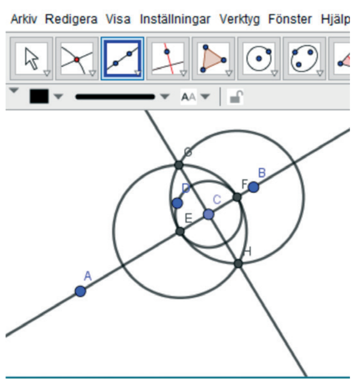
9.

Ekvation	a) Antal lösningar	b) Lösningar
$f(x) = 0$	2	$x = \pm 3$
$g(x) = 0$	1	$x = 7$
$f(g(x)) = 0$	2	$x = 4$ och $x = 10$
$g(f(x)) = 0$	2	$x = \pm 4$
$f(f(x)) = 0$	4	$x = \pm 2\sqrt{3}$ och $x = \pm\sqrt{6}$
$g(g(x)) = 0$	1	$x = 0$

Passare och linjal – geometri i GeoGebra

Del II: *Konstruera en normal genom en given punkt*

Markera skärningspunkterna mellan cirkeln och linjen. Konstruera en ny cirkel, med medelpunkt i den ena av dessa skärningspunkter och randen genom den andra. Konstruera ytterligare en cirkel på motsvarande sätt utifrån den andra skärningspunkten. Markera skärningspunkterna mellan de två nya cirklarna. Dra en linje genom dessa skärningspunkter. Se figur.



Kapitel 5

Hur bra är datorn på slumptal?

1.
```
import random
a = random.randint(1,10)
print(a)
```

2.
```
import random
a = random.randint(1,10)
b = random.randint(1,10)
print(a, b)
```

3.
```
import random
a = random.randint(0,9)
b = random.randint(0,9)
c = random.randint(0,9)
d = random.randint(0,9)
print(a, b, c, d)
```

4.
```
import random
odd, even = 0, 0
for n in range(0,100):
   a = random.randint(1,2)
   if a == 1: odd = odd + 1
   else: even = even + 1
print('Udda %:'
   ,100*(odd/100),
   'Jämna %: '
   ,100*(even/100))
```

5.
```
för 10 000:
import random
odd, even = 0, 0
for n in range(0,10000):
   a = random.randint(1,2)
   if  a == 1: odd = odd
   + 1
   else: even = even + 1
print( 'Udda %: '
   ,100*(odd/10000),
   'Jämna %: '
   ,100*(even/10000))
```

Signikans med Python

Sannolikheten för ett värde på 27,6 % eller lägre är ungefär 0,15=15

```
import random
over097=0
for n in range(0,3000):
   centern,annat=0,0
   for n in range(0,5000):
      slumptal=random.
      random()
      if slumptal<=0.08:
      centern=centern+1
      else: annat=annat+1
   procentandel=round(100*-
   centern/5000,1)
   #print('Centerpartiet:'
   ,centern,' annat parti:'
   ,annat,
   # ' andel:',procentandel,
   '%')
   if procentandel>=9.7:
   over097=over097+1
sannolikhet=round
(over097/3000,3)
print('sannolikhet för ett
värde över eller lika med
9,7 %: ',sannolikhet)
```

Sannolikheten är cirka 0,005 = 0,5 %.

Sannolikheten för värdet 16,4 % eller lägre är cirka 0,025 = 2,5 %.

Sjukamp i GeoGebra

1. De yngsta kvinnorna var födda år 1995. Äldst var Jennifer Oeser, född 1983.

2. Summan av spjutresultaten är 927,55 m.

4. Två tävlanden sparang på mellan 13,3 och 13,4 sekunder. Typvärdet var 13,56 s.

Kapitel 6

Vektorer i GeoGebra

1. a) (3, 0)
b) (0, 4)
c) (1, 1)

2. a) (1, 3)
b) (5, 1)
c) (1, 7)

3. 4,8 längdenheter. Vektorn (2, 0) har längden 2 och dess längd multipliceras med 2,4.

Komposanter och trigonometri

1. a) $x = 2$ och $y = 3{,}46410$
b) $x = 1{,}02606$ och $y = 2{,}81908$
c) $x = 4{,}33013$ och $y = 2{,}5$
d) $x = 0{,}79864$ och $y = 0{,}60182$

2. a) $x = -2$ och $y = 3{,}46410$
b) $x = -1{,}02606$ och $y = 2{,}81908$
c) $x = -4{,}33013$ och $y = 2{,}5$
d) $x = -0{,}79864$ och $y = 0{,}60182$

Rita vektorerna så att de utgår från origo i ett koordinatsystem, och rita komposanterna så att en rätvinklig triangel bildas med x-axeln som bas. Vinklarna v mäts från den positiva x-axeln. Den vinkel som bildas mellan vektorn och den negativa x-axeln är $180° - v$.

I uppgift 1 a) bildas vinkeln 60° med den positiva x-axeln och i uppgift 2 a) bildas vinkeln 60° med den negativa x-axeln. Trianglarna i uppgifterna 1 a) och 2 a) är likadana, men i uppgift 2 a ligger triangeln till vänster om y-axeln och därför är x-komposanten negativ.

Samma resonemang gäller för de övriga uppgifterna.

3. Sätt $r = 1$ och $v = 23$. Då är cos 23° vektorn u:s x-koordinat och sin 23° dess y-koordinat.

4. Sätt $r = 1$ och ställ in vinkeln med glidaren.
a) $\cos 82° \approx 0{,}13917$ och $\sin 82° \approx 0{,}99027$
b) $\cos 60° = 0{,}5$ och $\sin 60° \approx 0{,}86603$
c) $\cos 135° \approx -0{,}70711$ och $\sin 135° \approx 0{,}70711$
d) $\cos 180° = -1$ och $\sin 180° = 0$

Facit

Kapitel 1

1101 a) 7 b) 9
c) 100 d) 0,5

1102 a) 1,41 b) 3,61
c) 4,50 d) 10,82

1103 8 cm

1104 44 cm

1105 a) 26,83 cm
b) 38,16 cm
c) 26,00 cm
d) 42,80 cm

1106 Varje kvadrat är 64 cm^2, så en sida är 8 cm. Omkretsen är 64 cm.

1107 38,8 cm

1108 Nej. $\sqrt{13} \approx 3{,}61$ och
$\sqrt{9}+\sqrt{4} = 3+2 = 5$

1109 a) $7/5 = 1{,}4$
b) $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$
c) 2
d) $8 - 4 = 4$

1110 a) 3 b) $\sqrt{3}$
c) 4 d) 1,2

1111 a) $a = 8$ b) $a = 5$
c) $a = 16$ d) $a = 6$

1112 Hon har tänkt rätt.
$\sqrt{64}+\sqrt{25} = 8+5 = 13$

1113 T.ex. $\sqrt{2}+\sqrt{3} \approx 3{,}146$
men $\sqrt{2+3} = \sqrt{5} \approx 2{,}236$
och $\sqrt{9}+\sqrt{25} = 8$ men
$\sqrt{9+25} = \sqrt{34} \approx 5{,}831$

1114 Skriv om nämnaren som $\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}$ och förkorta:
$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

1115 a) $3\cdot 3 + 4\cdot 4 = 9 + 16 = 25 = 5\cdot 5$
b) $8\cdot 8 + 15\cdot 15 = 64 + 225 = 289$.
$\sqrt{289} = 17$. Det tredje talet är 17.
c) $20\cdot 20 = 400$ och
$29\cdot 29 = 841$
$841 - 400 = 441$
$\sqrt{441} = 21$. Det tredje talet är 21.

1116 a) 2 b) 10
c) –3 d) –1

1117 a) 0,3 b) –4
c) 5 d) 2

1118 a) 2,4662 b) 4,6416
c) 2,7257 d) –4,2543

1119 a) 400 b) 18
c) –100 d) –2

1201 a) $3a^3$ b) x^2

1202 a) 3^5 b) 3^5

1203 a) 5^9 b) a^5

1204 a) 5^3 b) a^5

1205 a) 4^2 b) $4^{-2} = \dfrac{1}{4^2}$

1206 a) $2b$ b) $2a^{-3} = \dfrac{2}{a^3}$

1207 a) 1 b) 1

1208 a) 3 b) $5^{-2} = \dfrac{1}{5^2}$

1209 a) $2\cdot 5 = 10$
b) $5\cdot 3\cdot 2^2 = 15\cdot 4 = 60$

1210 a) $3^2 = 9$
b) $(2\cdot 0{,}5)^8 = 1^8 = 1$

1211 a) $\dfrac{1^2}{4^2} = \dfrac{1}{16}$
b) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^3 = \dfrac{2^3}{3^3} = \dfrac{8}{27}$

1212 a) $\dfrac{9}{16}$
b) $\left(\dfrac{6}{1{,}5}\right)^3 = 4^3 = 64$

1213 a) 11^2 b) $\left(\dfrac{x}{y}\right)^{20}$

1214 a) 5^6 b) 5^{-6}

1215 a) $25x^2$ b) $8y^3$

1216 a) 80 b) 1/3

1217 a) $8y^3x^6$ b) $9a^3/(2b)$

1218 a) $\dfrac{(5x)^3}{5x} = (5x)^2 = 25x^2$
b) $\dfrac{(n^2)^3\cdot(n^2)^2}{n^9} = \dfrac{n^6\cdot n^4}{n^9} = \dfrac{n^{10}}{n^9} = n$

1219 a) $\dfrac{2^3}{2^{-1}}\cdot\dfrac{5^{-2}}{5^{-1}} = 2^4\cdot 5^{-1} = \dfrac{2^4}{5^1}$
b) $5^4\cdot 4 = 5^4\cdot 2^2$

1220 a) x^{-6x} b) y^6

1221 Exponenten blir $(-1) - (-3) = 2$.

1222 a) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2} = \frac{1^{-2}}{4^{-2}} = \frac{1}{4^{-2}} = 4^2$

b) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \frac{2^{-2}}{3^{-2}} = \frac{\frac{1}{2^2}}{\frac{1}{3^2}} =$

$= \frac{1}{2^2} \cdot \frac{3^2}{1} = \left(\frac{3}{2}\right)^2$

1223 a) $\frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$

b) $3^{-2} + \frac{1}{3^2} + \frac{9^{-1}}{7^{-1}} =$

$= \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{7}{9} = \frac{2}{9} + \frac{7}{9} = 1$

1224 1

1225 a) -1 b) 1

1226 a) $27x^3y^6z^9$

b) $9x^2 \cdot (-8x^3) = -72x^5$

1227 a) $x = 3$

b) $4x = 4$, $x = 1$

1228 a) $\frac{1}{4} \cdot 2^4 = \frac{1}{2^2} \cdot 2^4 = 2^2$

b) $\frac{1}{4} \cdot 2^{-4} = \frac{1}{2^2} \cdot \frac{1}{2^4} =$

$= \frac{1}{2^6} = 2^{-6}$

1229 a) $3 + 1 / 5 = 3{,}2$

b) $3^2 \cdot (1/9) = 1$

1230 a) 2^{12} b) 2^{81}

1231 $4^{\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}} = 4^{\frac{2}{1}} = 4^2 = 16$

1232 Genom ett exempel: $\frac{a^5}{a^5} = 1$, ett tal delat med samma tal har värdet 1.

Med potensreglerna:

$\frac{a^5}{a^5} = a^{5-5} = a^0$. Alltså måste a^0 ha värdet 1, oavsett vad a har för värde om $a \neq 0$.

1233 a) $n = 9$

b) $n = 1$ eftersom $4^n = (2^2)^n = 2^{2n}$

1234 a) $8^3 = (2^3)^3 = 2^9$ och $4^n = (2^2)^n = 2^{2n}$. $2n = 9$, så $n = 4{,}5$.

b) $3^4 \cdot 3^{-3} = 3^1$, och $9^{0{,}5n} = (3^2)^{0{,}5n} = 3^n$. Alltså är $n = 1$.

1235 a) $6^{20} = (6^2)^{10} = 36^{10}$, alltså är $k = 10$

b) $8^5 = (2 \cdot 4)^5 = 2^5 \cdot 4^5$, alltså är $k = 5$

1236 a) $(4x \cdot 2{,}5)^3 = (10x)^3 = 1\,000x^3$

b) $\frac{(2x)^3 \cdot (2{,}5x)^3}{5x^6} =$

$= \frac{(5x^2)^3}{5x^6} = 25$

1237 a) Nämnaren är $12 + 24 = 36 = 6^2$. Kvoten blir $6^{0-2} = 6^{-2}$.

b) Täljaren är $9 \cdot 4 - 2 \cdot (-32) - 19 = 36 + 64 - 19 = 81 = 3^4$. Kvoten blir 3^3.

1238 a) Högerledet är $5 \cdot 5^{10} = 5^{11}$. $n = 11$.

b) Nämnaren är $4 \cdot 4^{10} = 4^{11}$.

Täljaren är $16^n = (4^2)^n = 4^{2n}$.

Kvotens värde är då $4^{2n-11} = 4^5$. $2n - 11 = 5$ om $2n = 16$ och $n = 8$.

1239 a) $2^2 = 4$, $2^4 = 16$. Medelvärdet är $(16 + 4) / 2 = 10$.

b) Skriv båda talen med basen 3. $9^6 = (3^2)^6 = 3^{12}$. 3^{15} är alltså störst.

1240 $8^x = (2^3)^x = 2^{3x}$

$2^{-3x} = \frac{1}{2^{3x}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$

1241 a) Om radien fördubblas till $2r$ blir formeln $4\pi \cdot (2r)^2 = 4\pi \cdot 4r^2 = 4 \cdot 4\pi r^2$. Arean blir 4 gånger så stor.

b) Samma resonemang som i *a)* ger att volymen blir 8 gånger så stor.

1242 Efter 6 minuter finns hälften kvar. Efter 12 minuter finns $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2^2}$ kvar.

Efter x halveringar finns $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{2^x}$ kvar. Om $x = 10$ är $\frac{1}{2^x} = \frac{1}{2^{10}} = \frac{1}{1024} \approx \frac{1}{1000}$

1243 a) $1{,}25 \cdot 10^2$ b) $4 \cdot 10^3$

1244 a) $2{,}5 \cdot 10^{-1}$ b) $4 \cdot 10^{-3}$

1245 a) $7{,}8 \cdot 10^4$ b) $1{,}57 \cdot 10^{-7}$

1246 a) $7{,}5 \cdot 10^{11}$ b) $9 \cdot 10^{-3}$

1247 a) 2 300 000 000

b) 0,000 000 72

1248 a) $7{,}2 \cdot 10^8$ b) $1{,}6 \cdot 10^{11}$

1249 a) $7{,}7 \cdot 10^3$ b) $2{,}5 \cdot 10^4$

1250 $3 \cdot 10^{13}$

1251 $1{,}5 \cdot 10^3$

1252 a) $4 \cdot 10^3$ b) $1{,}6 \cdot 10^6$

1253 $5{,}2 \cdot 10^9$ kg

1254 $2 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0 + 5 \cdot 10^{-1}$

1255 $(1{,}496 \cdot 10^{11}) / (2{,}998 \cdot 10^8)$ s $\approx 4{,}99 \cdot 10^2$ s ≈ 500 s

1256 $9{,}45 \cdot 10^{15}$ m

1257 2 046 kr

1258 a) $a = 5$, $b = 3$, $c = 1$, $d = -2$

b) $a = 2$, $b = -3$, $c = 4$, $d = 4$

1259 $5{,}05 \cdot 10^4$

1260 $n = 2$

1261 a) 3 km b) 2,5 hg
c) 7 µm d) 1,2 cm

1262 50 ml

1263 50 pm = $5{,}0 \cdot 10^{-11}$ m

1264 a) $2{,}5 \cdot 10^{8}$ bytes
b) $1{,}5 \cdot 10^{10}$ bytes

1265 0,02 mm = 20 µm

1266 $1 \cdot 10^{8}$ st

1267 a) $1{,}1 \cdot 10^{13}$ Wh
b) $4{,}4 \cdot 10^{5}$ Wh/person =
= 440 kWh/person

1268 9,5 mg. Antalet personer som blir stungna är 9 500.

1269 a) 5 b) 3
c) 3 d) $\frac{1}{2}$

1270 a) 100 b) 30
c) $\frac{1}{8}$ d) $\frac{27}{125}$

1271 a) 4 b) 27
c) 9 d) 36

1272 a) $\frac{1}{4}$ b) 10
c) $\frac{1}{125}$ d) $\frac{1}{30}$

1273 a) 343 b) $\frac{1}{400}$ c) 125

1274 $x = 5$ eller $x = 1$

1275 a) 1,9129 b) −7,1969
c) 4,9363 d) 0,22934

1276 a) $\frac{1}{5}$ b) 3
c) $\frac{1}{32}$ d) $\frac{1}{25}$

1277 −1,384

1278 a) Ett värde. $x = -\frac{9}{2}$
b) Två värden. $x = \frac{3}{4}$ eller $x = \frac{13}{4}$

1301 a) 12 och 4 är koefficienter, x och y är variabler, $12x$ och $4y$ är variabeltermer, 8 är konstantterm
b) 2 och 5 är koefficienter, a och b är variabler, $2a$ och $5b$ är variabeltermer
c) 19 och −11 är koefficienter, s och t är variabler, $19s$ och $-11t$ är variabeltermer, −7 är konstantterm
d) 50 och 1 är koefficienter, x och y är variabler, $50 / x$ och y är variabeltermer

1302 a) 64 b) 45
c) 93 d) 33

1303 a) $y + 6$ b) $a - 12$
c) $4x$ d) $6z + 3$

1304 a) $800 + n \cdot 35$
b) $800 + 20 \cdot 35 = 1\,500$ kr

1305 a) 300 kr är en fast årskostnad
b) $8 \cdot 45 + 300 = 660$ kr, totala årskostnaden för att hyra 45 filmer är 660 kr.

1306 a) Den stora rektangeln har arean $2x \cdot 3y$, den lilla rektangeln har arean $x \cdot 2y$. Arean av det färgade området är skillnaden mellan stora rektangelns area och lilla rektangelns area. $6xy - 2xy = 4xy$

1307 $a \cdot b$ kr = ab kr

1308 a) $650 + 2{,}5x$ kr
b) Om 3/10 får dras av som skatt återstår 7/10 av kostnaden.
$0{,}7(650 + 2{,}5x)$ kr =
= $455 + 1{,}75x$ kr

1309 a) $3x + 2y$
b) $x \cdot x + x \cdot 1{,}5x / 2 = 1{,}75x^2$

1310 a) Totala priset för det som Vanja och Hildur handlar
b) skillnaden i pris mellan det Vanja handlar för och det Hildur handlar för
c) medelvärdet av det som Vanja och Hildur handlar för
d) Vanja handlar för 3 kr mindre än vad Hildur handlar för.

1311 a) $3x + 3$ b) $1{,}3y - 2{,}5$
c) $0{,}8y$ d) $-0{,}1s - 0{,}1t$

1312 a) $3x + 6$
b) $a + 2b - 5$
c) $-4s + 11t + 5$
d) $7xy - y - 4$

1313 a) $8xy + x + 6y + 3$
b) $9ab - 7a - 16$

1314 a) $7s - 7t - 3$, uttryckets värde är −52

1315 Anta att åkband för barn kostar x kr. För vuxna blir det då $(2x + 8)$ kr och för tonåringar $(2x - 22)$ kr.
a) $(2x + 8 + x + 2x - 22)$ kr =
= $(5x - 14)$ kr
b) $(5 \cdot 80 - 14)$ kr = 386 kr
c) $\frac{5x - 14}{3}$ kr

1316 a) $x + (y + 1) + (y + 3) +$
$+ (2x - 3) + (2y - 3) +$
$+ (x + 2) + (y + 2) =$
$= 4x + 5y + 2$
b) $(2x - 3) + (2y - 3) +$
$+ (x + 2) + (y + 2) -$
$- (x + (y + 1) + (y + 3)) =$
$= 2x + y - 6$

1317 Pear j–phone 8 s, pris a kr

Dony Excitera 18, pris $(a + 300)$ kr

Damsung Universe 8 t, pris $(2a - 700)$ kr

a) priset för 2 st Donytelefoner

b) priset för 1 Pear och 1 Damsungtelefon

c) prisskillnaden mellan 1 Damsung och 1 Donytelefon

d) priset per månad för 1 Dony och 1 Damsungtelefon

1318 a) $28x + 35$

b) $12a + 18b$

c) $15x - 40$

d) $-12s + 15t$

1319 a) $48y$

b) $11a + b + 2$

c) $101t - 33s + 24$

d) $39x - 75y + 89$

1320 Anta att en motorcykel förbrukar x l/mil. En bil förbrukar då $(3x - 0{,}2)$ l/mil. En buss förbrukar $2 \cdot (3x - 0{,}2)$ l/mil.

a) $(x + 2(3x - 0{,}2) +$
$+ 3 \cdot 2(3x - 0{,}2))$ l/mil $=$
$= (25x - 1{,}6)$ l/mil

b) $25 \cdot 0{,}3 - 1{,}6 = 5{,}9$ l/mil. Detta är förbrukningen för 1 motorcykel, 2 bilar och 3 bussar om en motorcykel förbrukar 0,3 l/mil.

1321 a) Totala åldern för Vanessa och trillingarna

b) Skillnaden i ålder mellan storebror och Vanessa

c) $\dfrac{a+3(a+2)+(a+9)}{5}$

d) $a + 3$, 12 år. De fem personernas medelålder är 12 år. Vanessa är 9 år, trillingarna är 11 år och storebror är 18 år.

1322 a) $xy + 4x - 2y - 8$

b) $6x - 8xy + 15 - 20y$

c) $79 + 3ab - 27a$

d) $-60 + 6st - 10s + 65t$

1323 Suheyla har 17 stycken parenteser $(x - y)$ och ska subtrahera 16 stycken parenteser $(x - y)$. Kvar har hon 1 parentes $(x - y)$.

$22 - 19 = 3$

1324 a) $(20 - 1)(20 + 1) = 399$

b) $(30 - 2)(30 + 2) = 896$

c) $(40 - 3)(40 + 3) = 1\,591$

d) $(20 + 0{,}7)(20 - 0{,}7) =$
$= 399{,}51$

1325 a) $(x + y)(x^2 + 2xy + y^2) =$
$= \ldots = x^3 + 3x^2y + 3xy^2$
$+ y^3$

b) $(a - b)(a^2 + 2ab + b^2) =$
$= \ldots = a^3 + a^2b - ab^2 - b^3$

1326 $xy - bh$

1327 a) Anta att varje platta har sidan x dm. Gräsmattans sida är 200 dm. Det ryms $\dfrac{200}{x}$ plattor längs gräsmattans sida. Det är 4 sidor och 2 rader med plattor. Dessutom är det 4 hörn med 4 plattor i varje hörn:

$$2 \cdot 4 \cdot \frac{200}{x} + 4 \cdot 4 = \frac{1600}{x} + 16$$

b) Arean =

$$x^2\left(\frac{1600}{x} + 16\right)\text{dm}^2 =$$

$= (1\,600x + 16x^2)$ dm^2

1328 a) $4(x + 3)$ b) $3(y + 3)$

c) $3(5 - a)$ d) $9(2t - 3)$

1329 a) $3(4x - 5y)$

b) $3(3a + 7b)$

c) $4(6s - 7t)$

d) $11(3x + 5y)$

1330 a) $7x(2y + 3z)$

b) $12(x^2 + 2x - 1)$

c) $17b(2a - 1)$

d) $6(t^2 + 5t - 3)$

1331 a) $\dfrac{3x}{2}$ b) $\dfrac{3x}{4}$

c) $\dfrac{a}{6}$ d) $\dfrac{17b}{35}$

1332 a) $\dfrac{4x+1}{3}$

b) $3{,}5y + 0{,}5$

c) $0{,}25x$

d) $0{,}8x + 0{,}5$

1333 a) $\dfrac{4x+7}{3}$ b) $\dfrac{4x+5}{12}$

c) $\dfrac{4x-9}{5}$ d) $\dfrac{x+16}{6}$

1334 a) $2xy(x - 3)$

b) $7ab(1 + 6b)$

c) $7st(2t - 5s + 4)$

d) $7(xy^2 + 2xy + 3)$

1335 a) $7xy$

b) $(3b^2 + 4b + 5)$

c) $(a - 2d + 4)$

d) $9x$

1336 $13y(2x^2y - 3x^2 + 1)$

1337 a) $12a^3b^4 - 21a^4b^6 + 6a^3b^2$

b) $84x^2y^8 + 3$

c) $-5st^2 - 36s^4t^2$

d) 0

1338 a) $25x^2 - 9y^2$

b) $6x^3 - 4x^2 + 15xy - 10y$

c) $6a^4b^2 - 9a^5 - 10b^5 + 15ab^3$

d) $9x^2y^2 - 12xy^3 + 35x^3y^3 -$
$- 48x^2y^4$

1339 a) $7x^3y(4y^3 - 3)$

b) $14a^4b^3(ab + 2a - 3b)$

1340 a) $\dfrac{2x+y}{5}$ b) $\dfrac{5b}{2a-3}$

c) $\dfrac{5x}{12y}$ d) $\dfrac{3x-2y}{2x+4y}$

1341 a) $\dfrac{1}{1-a}$

b) $\dfrac{a-ab}{a+b}$

c) $\dfrac{2x^2+2}{(x+1)(x-1)}$

d) $\dfrac{2x^2-2xy-y^2}{x}$

1342 $n=0$: $(-1)^0 \cdot 2 \cdot 0 = 0$

$n=1$: $(-1)^1 \cdot 2 \cdot 1 = -2$

$n=2$: $(-1)^2 \cdot 2 \cdot 2 = 4$

$n=3$: $(-1)^3 \cdot 2 \cdot 3 = -6$

$n=4$: $(-1)^4 \cdot 2 \cdot 4 = 8$

Om n är jämnt blir uttrycket positivt, om n är udda blir uttrycket negativt.

Bortsett från tecknet så ökar siffervärdet hela tiden med 2

1343 a) 2^n b) $3n \cdot (-1)^n$

1344 a) Rektangeln: bas $3a$, höjd $3a+b$, area $3a(3a+b)$

Triangeln: bas $b \cdot a$, höjd $2a-b$, area $\dfrac{ba(2a-b)}{2}$

Summan:

$$3a(3a+b)+\frac{ba(2a-b)}{2} =$$

$$= 9a^2+3ab+\frac{2a^2b-b^2a}{2} =$$

$$= 9a^2+3ab+a^2b-\frac{b^2a}{2}$$

Uttrycket har värdet $9 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5 \cdot 2 +$ $+ 5^2 \cdot 2 - (2^2 \cdot 5 / 2) = 295$ (areaenheter).

BLANDADE UPPGIFTER

1 a) $\dfrac{7}{3}$ b) $\dfrac{5}{8}$

c) $\dfrac{2}{13}$ d) $\dfrac{11}{11}=1$

2 a) $2^{10} = 1024$

b) $2^6 = 64$

3 a) $9y^2$

b) $1 - 1 - (-1) = 1$

4 a) $x + 1$ b) $9x - 15$

c) $6x - 4$ d) $5{,}9x + 9$

5 a) -2 b) 13

c) 13 d) 10

6 a) -45 b) 1/3

c) $-3\dfrac{1}{3}$ d) 14

7 $3ab + a^2b^2$, värdet är 10

8 a) 2^{-4} b) x^4

9 a) 20 b) 14

c) 13 d) 20

10 a) $4{,}15 \cdot 10^{-1}$

b) $2{,}1 \cdot 10^{-5}$

11 a) 730 000

b) 100 300

12 a) $6(3y - 1)$ b) $3(3 + 4t)$

c) $6a(a - 1)$ d) $4(3 + x)$

13 a) $5 \cdot 10^{14}$ W

b) $2{,}2 \cdot 10^{-7}$ m

14 6 av 24 = $\dfrac{6}{24} = \dfrac{1}{4}$

15 a) $\sqrt{2}$ b) 3

c) $\dfrac{1}{\sqrt{6}}$ d) 2

16 125 gram

17 Summans värde är 2, så t.ex. $\dfrac{4}{3}+\dfrac{2}{3}=2$

18 a) $8 = 2^3$, så $8^5 = (2^3)^5 = 2^{15}$

b) $16 = 2^4$, så $16^3 = (2^4)^3 = 2^{12}$

19 a) $200 - 3 \cdot 23 - 6 \cdot 18$

b) $200 - (3 \cdot 23 + 6 \cdot 18)$

20 T.ex. $1{,}0 \cdot 10^{-3}$

21 $a = 17$

22 $\dfrac{2}{9}$

23 a) $n^2 = 81 \cdot 10^{16} = 8{,}1 \cdot 10^{17}$

b) $\sqrt{n} = 3 \cdot 10^4$

24 a) 2^7 b) 2^7

25 a) $2^{50} = (2^2)^{25} = 4^{25}$

b) $3^{60} = (3^4)^{15} = 81^{15}$

26 $X = 4$

27 a) $2^{40} = (2^2)^{20} = 4^{20} > 3^{20}$

b) $4^{250} = (2^2)^{250} = 2^{500}$,
$8^{150} = (2^3)^{150} = 2^{450}$.
Alltså 4^{250} störst.

28 a) $3xy(x - 2)$

b) $12x(x - 2)$

c) $3ab(3b + 1 - 2ab)$

d) $3(3xy - 1)$

29 $x(x + 50) = x^2 + 50x$

30 a) 5^{2x-2} b) 5^{2x^2}

31 a) 6^{k-1} b) 2^{-2n}

32 a) Kostnaden för en mobil och en surfplatta.

b) Kostnaden för 3 mobiler och 2 surfplattor.

c) Skillnaden i kostnad mellan en surfplatta och en mobil.

d) Vad man får tillbaka på 9 000 kr om man köper en mobil och en surfplatta.

33 MGN = 198. $\dfrac{86}{198}$ är störst.

34 Välj t.ex. $a = 16$ och $b = 9$.
$\sqrt{a} - \sqrt{b} = 4 - 3 = 1$
$\sqrt{16 - 9} = \sqrt{7} \neq 1$

35 $(a \cdot b)^3$ betyder
$(a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdot (a \cdot b) =$
$= a \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b \cdot b = a^3 \cdot b^3$

36 a) $\dfrac{3x^2 - 7x - 8}{6x}$

b) $-2x + 15 - \dfrac{25}{x}$

37 a) $\dfrac{2}{x^2 - 1}$

b) $\dfrac{8x^2 - 8x}{(x^2 - 4)(x - 4)}$

38 a) $y(4xy^2 - 1)$

b) $\dfrac{y^2}{2x}$

39 a) $a < 500$
b) $a < 2\,000$

40 a) $\dfrac{x^6}{y^{-10}} = x^6 y^{10}$

b) $\dfrac{3x^2 y}{x^4} \bigg/ \dfrac{x^4}{y^{-2}} =$

$= \dfrac{3x^2 y}{x^4} \cdot \dfrac{y^{-2}}{x^4} = \dfrac{3x^2 y^{-1}}{x^8} =$

$= \dfrac{3x^2 y^{-1}}{x^8} = \dfrac{3y^{-1}}{x^6} = \dfrac{3}{x^6 y}$

41 a) $1 - \dfrac{1}{3} - \left(\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5}\right) =$

$= 1 - \dfrac{5}{15} - \dfrac{8}{15} = \dfrac{2}{15}$

b) 90 höns har $90 \cdot 2{,}4 =$
$= 216$ m². Om 2 / 15 är
216 m² är hela ladugården
15/15, som motsvarar
$(15 \cdot 216) / 2$ m² $= 1\,620$ m².

42 Om ett tal ska kunna vara både en kvadrat och en kub till ett heltal a, måste talet vara $(a^2)^3 = a^6$. $1^6 = 1$ och $2^6 = 64$ uppfyller detta, liksom $3^6 = 729$. $4^6 = 4096$ är för stort. 729 är det enda talet mellan 100 och 1 000 som uppfyller villkoret.

43 Mitt emellan talen ligger deras medelvärde:
$(1{,}0 \cdot 10^3 + 1{,}0 \cdot 10^5) / 2 =$
$= 101\,000 / 2 = 50\,500 =$
$= 5{,}05 \cdot 10^4$

44 a) $n = -7$ b) $n = 5$

45 $a = 3$

46 Skriv om talen så att de har samma exponent. Alla exponenter är delbara med 3.
$2^{15} = (2^5)^3 = 32^3$,
$3^{12} = (3^4)^3 = 81^3$,
$4^9 = (4^3)^3 = 64^3$,
$5^6 = (5^2)^3 = 25^3$
Sortera baserna i storleksordning: $7^3, 25^3, 32^3, 64^3, 81^3$
Det vill säga: $7^3, 5^6, 2^{15}, 4^9, 3^{12}$

KAPITELTEST

1 a) 0,5 b) −10
c) 2 d) 12

2 a) 3^{12} b) 4^5
c) 2^9 d) 3^{-7}

3 a) 78 b) $\dfrac{1}{25}$

4 11

5 a) 216 b) $-\dfrac{1}{4}$

c) −1 d) $\dfrac{2}{3}$

6 a) $3{,}5 \cdot 10^4$
b) $2{,}07 \cdot 10^{-3}$
c) $4{,}10005 \cdot 10^7$

7 a) $7{,}5 \cdot 10^{13}$ Wh
b) $4{,}5 \cdot 10^{-8}$
c) $2{,}3 \cdot 10^{10}$ B

8 a) $\dfrac{11}{5}$ b) 6 c) 3

9 a) $2t + 3$ b) $\dfrac{t}{2}$ c) $14 - t$

10 a) $18x - 2y + 3$
b) $6a - 2ab - 4b$
c) $-5n - 6$
d) $2a$

11 3

12 a) 71,868 b) 2,633

13 1 hg

14 a) $8 \cdot 10^{-6}$ m
b) $4{,}8 \cdot 10^{13}$ st

Kapitel 2

2101 2 röda och 3 gula

2102 1 hg

2103 Anna och Ida väger tillsammans 32 kg. Om tvillingarna väger lika mycket kan var och en av dem maximalt väga 16 kg. För att tvillingarna ska väga mindre än 32 kg måste de alltså väga något mindre än 16 kg var.

2104 a) VL = 5
b) HL = 5
c) ja
d) VL = 4, HL = 1
VL $\neq$ HL $x = 1$ är alltså inte en rot till ekvationen

2105 $n = 3$

2106 a) $x = 20$
b) $x = 1$
c) $x = 42$
d) $x = 27$

2107 a) $x = 20$
b) $x = 11$
c) $y = 2$
d) $v = 1\frac{6}{7}$

2108 a) $x = 0$ b) $x = -0{,}6$
c) $x = 3\frac{1}{3}$ d) $x = 3$

2109 a) $y = -20$ b) $x = -36$
c) $x = 10$ d) $x = 30$

2110 a) $x = 3$ b) $x = 12$
c) $x = 9$ d) $x = -7$

2111 a) $y = 24$ b) $a = 0{,}4$
c) $r = -0{,}5$ d) $y = 22{,}5$

2112 a) $r = 7$ b) $y = -70$
c) $a = 1$ d) $x = 2$

2113 a) $x = 2{,}5$ b) $x = -1{,}2$

2114 a) $n = 2$ b) $x = 2$

2115 a) $s = 13 / 18$ b) $s = 0{,}4$

2116 a) $x = -0{,}5$ b) $a = 4{,}5$

2117 a) $n = -1 / 3$ b) $n = 2{,}5$

2118 a) $y = 10$ b) $x = 4$

2119 a) $a = 2$ b) $n = 242$

2120 a) $x = 90$
b) $x = \frac{96}{13} = 7\frac{5}{13}$

2121 a) $x = 0{,}5$ b) $x = -0{,}4$

2122 a) 6 cm och 9 cm
b) 54 cm^2

2123 $(x - 3)^2 = 16$
Jan: $(7 - 3)^2 = 4^2 = 16$
Bo: $(-1 - 3)^2 = (-4)^2 = 16$
Båda har räknat rätt

2124 $a = 4$

2125 3

2126 Anta att själva flaskan kostar x kr
$x + (10 + x) = 12$
$2x + 10 = 12$
$x = 1$ kr

2127 Liftkort för barn kostar x kr, för vuxna $2x$ kr. $2 \cdot 2x + 3x = 3\,500$, $x = 500$. Svar: 500 kr

2128 Eva har gjort misstaget att ändra ekvationen till ett uttryck genom att byta likhetstecknet mot ett plustecken

2129 Andreas har felaktigt skrivit $+ 8x$ istället för $- 8x$, och sedan fått $x = 4$ i stället för $x = 1 / 4$.

2130 Thomas har glömt minustecknet i sista ledet. Han skulle ha skrivit $x = -1 / 4$.

2131 Karins försäljningspris är $500\,000 \cdot 1{,}2 = 600\,000$ kr
Anta att Olle köpte sin lägenhet för x kr
$600\,000 = 0{,}8\,x \Rightarrow$
$x = 750\,000$ kr

2132 Ella 3 000 kr, Pia 2 000 kr och Omar 1 600 kr

2133 Elin 7, Amy 10 och Lisa 20 kakor

2134 Del I 680 m^2, del II 340 m^2, del III 180 m^2

2135 Om Eva åker bil:
$20 \cdot 70 = 1\,400$ kr
Eva åker buss och cyklar: Anta att hon cyklar x dagar, och åker buss $(20 - x)$ dagar.
$40(20 - x) + 60 \cdot 20 < 1\,400$
$\Rightarrow x > 15$. Eva måste cykla i minst 16 dagar.

2136 $x = 3$

2137 $a = 8$

2138 a) $x = -1\frac{2}{3}$
b) $x = -1$

2139 $x = 1/2$

2140 $x = -3{,}6$

2141 $\frac{1}{x^2 + x} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}$
MGN = $x(x+1)$
$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{a(x+1)}{x(x+1)} + \frac{b \cdot x}{x(x+1)}$
$1 = ax + a + bx$
Jämför VL och HL. Siffertermerna och x– termerna ska vara lika i båda leden
$\Rightarrow 1 = a$.
$0 = ax + bx$
$a = 1$ och $b = -1$

2142 Vi skriver båda bråken på den gemensamma nämnaren $x(2x + 3)$:

$$\frac{2}{x} + \frac{1}{2x+3} =$$
$$= \frac{2(2x+3)}{x(2x+3)} + \frac{1 \cdot x}{x(2x+3)} =$$
$$= \frac{2(2x+3)+x}{x(2x+3)} = \frac{4x+6+x}{2x^2+3x} =$$
$$= \frac{5x+6}{2x^2+3x}$$

VSV

2143 Anta att rektangelns andra sida är x. Cirkelns omkrets är $2\pi r$, rektangelns omkrets är $2(x + r)$. $2\pi r = 2(x + r) \Rightarrow$ $x = r(\pi - 1)$

2144 a) $x_1 = -3, x_2 = 3$
b) $x = -5$
c) $x = 0$
d) $x = -1$

2145 a) $y = 0{,}1$
b) $y_1 = -0{,}4,\ y_2 = 0{,}4$
c) $y_1 = -2,\ y_2 = 2$
d) $y = 6$

2146 a) $x = 0$
b) $y = 3$
c) $x_1 = -4,\ x_2 = 4$
d) $y = -20$

2147 a) $x = 11$
b) $y = -0{,}03$
c) $x_1 = -1/13,\ x_2 = 1/13$
d) $y = \frac{1}{3}$

2148 a) $x = 7$
b) $x_1 = -1,\ x_2 = 9$
c) $y = -\frac{11}{4}$
d) $y_1 = 2,\ y_2 = 5$

2149 a) $x = 27$
b) $y = \frac{1}{16}$
c) $x = 125$
d) $y_1 = -3,\ y_2 = -1,\ y_3 = 1,$ $y_4 = 3$

2150 a) $x_1 = -3{,}16,\ x_2 = 3{,}16$
b) $y = 4{,}29$
c) $h_1 = 0{,}00,\ h_2 = 1{,}31$

2151 a) $x = -0{,}108$
b) $y_1 = -2{,}901,\ y_2 = -2{,}502,$ $y_3 = 2{,}502,\ y_4 = 2{,}901$
c) $a = 5219{,}964$

2201 De är negativa.

2202 a) < b) < c) >
d) > e) >

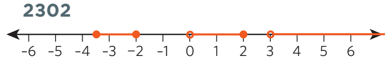
2203 a) ≥ b) ≥
c) ≤ d) ≤

2204 c)

2205 a) och b)

2301 a) c) och d)

2302



2303 7

2304 Ja, talet 9

2305]−1, 1[

2306]−∞, ∞[

2307 [0, 1[och]1, 2]

2401 a)]−∞, 2[
b)]0, ∞[

2402 a)]−∞, 0]
b) [π, ∞[

2403 a) $x > 3$ b) $x < 6$
c) $x < 12$ d) $x \geq 27$

2404 a) $x \leq 11$ b) $x > 8$
c) $x < 110$ d) $x \geq 6$

2405 a) $x < 4$ b) $x < -1$
c) $x \geq -2$ d) $x \geq \frac{7}{4}$

2406 a) $x < 5$ b) $x > -2$
c) $x \geq 3$ d) $x \geq 3$

2407 $x > \frac{16}{5} \Rightarrow$ Det minsta heltalet är 4.

2408 6 och 8

2409 Insättning ger $-1 < 0$

2410 $x = 2$, $x = 3$ och $x = 4$.

2411 a) $a = 2$
b) $a = 5$
c) Det finns inget sådant värde på a. Villkoret går inte att uppfylla.

2412 a) $2 < x < 10$
b) $-3 \leq z < -1$
c) $-\pi < y < \pi$

2413 a) $-3 \leq x \leq -2$
b) Det finns inga värden för x som uppfyller båda olikheterna.
c) Båda olikheterna uppfylls då $x > -2$.

2414 a)]−0,1, −0,01[
b) [−1, 1]
c) $\left]\frac{2}{5}, \frac{3}{7}\right]$

2415 a) $\frac{5}{3} < x < 2$
b) $-5 \leq x \leq 2$

2416 a) $-2 < x \leq 3$
b) $0 < y < 1$

2417 $-2 < x < 2$

2418 $x < -8$ eller $x > 8$

2419 $n \geq 110$. Minst 110 kunder.

2420 $n > 16$. Efter 17 månader har Nora mer än 10 000 kr på kontot.

2421 Mindre än 200 minuter.

2422 a) Låt antalet kör-lektioner vara x: $B(x) = 6\,000 + 400x$ och $K(x) = 5\,000 + 550x$

b) $6\,000 + 400x > 5\,000 + 550x \Leftrightarrow x < \frac{20}{3}$. 6 lektioner

2501 a) $y = 1$ b) $y = -3$

c) $y = -8$ d) $y = -2\frac{1}{3}$

2502 $x = 0{,}5y + 2{,}5$

b) $x = 4 - 0{,}125y$

c) $x = 3T - 600$

d) $x = \frac{250 - 5v}{4}$

2503 a) $s = 4{,}48$ b) $t \approx 3{,}39$

2504 a) 32 °F b) 212 °F

c) −18 °C d) 38 °C

2505 a) 12 cm^2 b) 5 cm^2

c) 6 cm d) 5,5 cm

2506 a) 400 kr

b) 80 öre

c) grundavgift, till exempel kostnad för abonnemanget

d) $x \leq 250$, dvs. högst 250 min.

2507 a) $N \approx 6450$ bakterier

b) ungefär 47 timmar

2508 a) T beroende, t oberoende

b) 40 °C

2509 a) $x = \frac{2a}{t - b}$

b) $b = p(1 - a) - 1$

c) $m = \frac{2W}{v^2}$

d) $r = \pm\sqrt{\frac{A}{\pi(1-b)}}$. Vi kan bortse från den negativa lösningen eftersom radien är en sträcka.

2510 a) $n = \frac{1 + z^2}{1 - z^2}$

b) $T = (t - 2)^2 + 10$

c) $n = \left(\frac{1 + \frac{2}{b} - 2a}{4}\right)^{\frac{2}{3}}$

d) $V = \frac{1}{q^{\frac{3}{2}} - 1}$

2511 $n = 1{,}5$. Börja med att dra roten ur vänsterledet och högerledet.

2512 a) $x = \pm\sqrt{\frac{A + 4}{2}}$ ja, det är möjligt

b) Nej, du behöver kunna lösa en andragradsekvation

c) $x = \left(\frac{C}{1000}\right)^{\frac{1}{1{,}04}}$ ja, det är möjligt

d) Nej, än så länge har vi inte löst exponentialekvationer, där exponenten är obekant.

2513 $a = 1 + \frac{1}{b - 1}$. Subtrahera 1 från båda leden.

$a - 1 = \frac{1}{b - 1}$. Båda leden multipliceras med $(b - 1)$.

$(a - 1)(b - 1) = 1$. Båda leden divideras med $a - 1$.

$b - 1 = \frac{1}{a - 1}$

$b = 1 + \frac{1}{a - 1}$. VSV

2514 a) $s = x + 25$

b) $s = y - 12$

c) $s = 20x$

d) $s = 3t - 5$

2515 a) $K(x) = 4\,200 + 800x$

b) $K(12) = 4\,200 + 800 \cdot 12 = 13\,800$, dvs. 13 800 kr

2516 a) Ljusets längd från början

b) 12 timmar

c) $L(x) = 18 - 1{,}4x$

2517 a) $K = 2x$

b) $K = x + y + z$

c) $K = 0{,}2x + 3{,}2y + 1{,}2z$

2518 a) 3 300 kr

b) $y = 1\,200 + 300x$

2519 a) $A = E + 8$

b) $A = 2E$

c) $E = A / 2 + 10$

d) $A - 5 = E + 12$, det vill säga $A = E + 17$

2520 a) y är alltid 3 mer än x.

b) $x = y - 3$

c) $y = x + 3$

2521 MoveIt: $2\,000 + 750 \cdot 5 = 5\,750$

CarryOn: $1\,400 + 900 \cdot 5 = 5\,900$

MoveIt blir billigast

2522 a) 25 st

b) $y = 25 - n$

c) Formeln är rimlig när Martin äter som mest 25 bitar. För fler än 25 bitar ger formeln ett negativt svar på hur många bitar som finns kvar.

2523 a) $A = 160 - 8h$

b) $160 - 8h \geq 0$ $h \leq 20$

Antal höns måste vara mindre än eller som mest 20, annars gäller inte modellen. Om h är större än 20 blir det fria utrymmet negativt.

2524 a) $T = 225 - 10t$

b) Modellen gäller till dess att plåten har samma temperatur som rummet.

2525 $O = 2x + 2(x - 40) = 4x - 80$

b) $4x - 80 \leq 400 \Rightarrow x \leq 120$. Långsidan kan vara högst 120 m

2526 a) $120 \cdot 60 - 6x^2$

b) $3x \leq 60 \Rightarrow x \leq 20$. Tärningens sida kan vara högst 20 cm

2527 a) $h \geq 0 \Rightarrow 100 - 4{,}91t^2 \geq 0$

$\Rightarrow t \leq \dfrac{10}{\sqrt{4{,}91}} \approx 4{,}51$

b) Om huset står på kanten av en klippa så kan bollen falla längre ner än till marknivån. Huset har en höjd som mäts från marken, så $h = 0$ när bollen fallit lika långt som huset är högt. Om bollen kan falla längre kan fallsträckan bli längre än husets höjd, och då kan h även ha negativa värden.

2528 a) $T = 21 - 21 \cdot 2^{-2} \approx 16 \Rightarrow$ 16° C

b) Temperaturen stiger enligt formeln hela tiden och närmar sig mer och mer 21° C. Med matematiska symboler kan man skriva: $t \to \infty \Rightarrow T \to 21$. Oändlighetssymbolen ∞ används här för att beskriva att det har gått mycket lång tid.

2529 a) Ja, det är en aritmetisk talföljd, differensen är konstant.

b) $a_7 = 14$

c) $a_n = 2 + 2(n - 1) = 2n$

2530 a) Ja, det är en aritmetisk talföljd, differensen är konstant.

b) $a_9 = -11$

c) $a_n = 13 - 3(n - 1) =$
$= 16 - 3n$

2531 a) 7 b) 11
c) 72 d) 420

2532 7 11 15 19 23

2533 $a_n = 2 + 3(n - 1) = -1 + 3n$

2534 $a_n = 24{,}8 - 1{,}8n$

2535 a) $\dfrac{10000(1 + 10000)}{2} =$
$= 50005000$

b) $\dfrac{100(92 - 304)}{2} = -10600$

Talserien är $96 - 4n$, det första talet är 92 och det hundrade talet är -304.

2536 a) Differensen mellan talen är $8 / 2 = 4$

$a_5 = 11$

$a_7 = 11 + 2 \cdot 4 = 19$

b) $\dfrac{8(-5 + 23)}{2} = 72$

Talseriens första tal är $a_1 = -5$ och det åttonde talet är $a_8 = 23$.

2537 Kalla talseriens första tal för x, och det sjätte talet för $8x$.

Talseriens tredje tal är $38 = x + 2 \cdot d$, där d är differensen mellan två på varandra följande tal.

Det sjätte talet går att uttrycka som $8x = x + 5 \cdot d$, det första talet plus fem differenser.

Vi löser ut differensen d:
$d = 1{,}4x$

Ersätt differensen i vår första ekvation med $1{,}4x$:

$38 = x + 2 \cdot 1{,}4x$

Ekvationen har lösningen $x = 10$, vilket ger differensen 14.

Talen är alltså 10, 24, 38, 52, 66 och 80.

2538 $\dfrac{a_5}{a_1} = \dfrac{7}{4}$. $a_{10} = 180$

Kalla det femte talet för $7x$ och det andra talet för $4x$.

Mellan det andra och det femte talet i den aritmetiska talföljden är det 3 differenser.

Det femte talet $7x = 4x + 3d$, där d är differensen. Det innebär att $3x = 3d$ och $x = d$.

Det tionde talet är det femte talet plus 5 differenser:
$180 = 7x + 5d = 7x + 5x =$
$= 12x$.

Lösningen är
$x = 180 / 12 = 15$, vilket också är differensen i talserien.

Det andra talet är $4x = 60$, så det första talet är $60 - 15 = 45$.

De fem första talen är 45, 60, 75, 90 och 105.

2539 a) 243

b) 1

c) $a_n = a_0 \cdot 3^n = 3^n$

2540 a) 3

b) $a_n = a_0 \cdot 2^n = 3 \cdot 2^n$

2541 a) $a_4 = 3 \cdot 1{,}5^3 = 10{,}125$

b) $a_n = 2 \cdot 1{,}5^n$

2542 $a_n = 0{,}1 \cdot 10^n$

2543 a) $\dfrac{1}{4} \Big/ \dfrac{1}{2} = 0{,}5$

$\dfrac{1}{8} \Big/ \dfrac{1}{4} = 0{,}5$

$\dfrac{1}{16} \Big/ \dfrac{1}{8} = 0{,}5$

Kvoten är hela tiden 0,5, alltså är talföljden geometrisk.

b) $a_n = a_0 \cdot k^n = 1 \cdot 0{,}5^n =$
$= 0{,}5^n$

2544 a) 1 2 4 8 16

b) $1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 31$ och $2^5 - 1 = 32 - 1 = 31$.

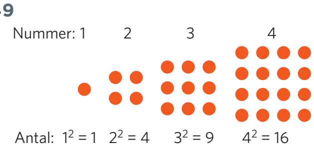
c) $2^8 - 1 = 255$

2545 a) $a_3 = a_2 \cdot k = a_1 \cdot k^2$
$6 = 4 \cdot k^2 \;\Rightarrow\; k = \sqrt{1{,}5}$
b) $a_7 = a_1 \cdot k^6$
$a_7 = 4 \cdot (\sqrt{1{,}5})^6 = 13{,}5$

2546 a) 200 400 800 1 600
3 200 6 400
b) Geometrisk med kvoten $k = 2$. Kvoten är konstant.
c) $a_n = a_0 \cdot k^n = 100 \cdot 2^n$
d) $100 \cdot 2^n = 100\ 000$
Dividera båda sidor med 100:
$2^n = 1000$
Vid början av den tionde timmen gäller $2^{10} = 1024$, dvs. efter knappt 9 timmar.

2547 a) 90 45 22,5 11,25 5,625
2,8125
b) Geometrisk med kvoten $k = 0{,}5$. Kvoten är konstant.
c) $a_n = a_0 \cdot 0{,}5^n = 180 \cdot 0{,}5^n$
d) Temperaturen närmar sig men blir aldrig 0 grader. Ju större n blir desto mindre blir talet a_n, men det kan aldrig få värdet 0.

2548 $k = -1$, $a_0 = -1$, $a_1 = a_0 \cdot k$
$a_n = a_0 \cdot k^n = -1 \cdot (-1)^n = (-1)^{n+1}$

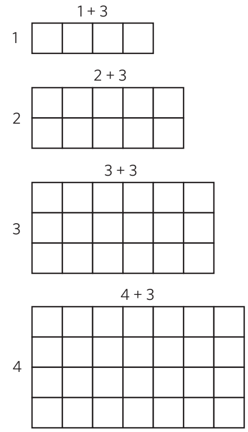
2549


2550 Illustrera med rektanglar som har arean $1 \cdot 4$, $2 \cdot 5$, $3 \cdot 6$, $4 \cdot 7$ och så vidare.
Det n:te talet är
$n(n + 3) = n^2 + 3n$

2551 $a_n = n^2$

2552 $a_n = 2n^2$

2553 $a_n = n(n + 2) = n^2 + 2n$

2554 a) $a_5 = 5^2 + 3 \cdot 5 = 40$
b)


2555 $a_n = n^3$

2556 $a_n = n^n$

2557 $a_n = 2n^2 - 1$

2558 $a_n = 0{,}5n^2 + 0{,}5n$

2559 $a_n = n \cdot (-1)^{n-1}$

2560 a) $a_n = \dfrac{n}{n+1}$
b) $\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{4}{5} \cdot \ldots \cdot \dfrac{n}{n+1} =$
$= \dfrac{1}{n+1}$ eftersom nämnaren i det första bråket förkortas med täljaren i nästa bråk. Och så vidare tills allt förkortats utom täljaren i det första bråket och nämnaren i det sista bråket.
c) $\dfrac{1}{2} + \dfrac{n}{n+1} = \dfrac{n+1+2n}{2(n+1)} =$
$= \dfrac{3n+1}{2n+2}$ VSV

2561 a) $\dfrac{n^2}{2n-1}$
b) $\dfrac{n^2}{2n-1} - 1 =$
$= \dfrac{n^2 - (2n-1)}{2n-1} =$
$= \dfrac{n^2 - 2n + 1}{2n-1} = \dfrac{(n-1)^2}{2n-1}$
VSV

BLANDADE UPPGIFTER

1 a) $x = 8$ b) $x = -10$

2 a) $y = -2x + 7$
b) $y = x - 4$

3 a) $\text{VL} = \dfrac{5}{3}$
b) HL = 3
c) VL = 2 HL = 4 nej, $x = 2$ är inte en rot till ekvationen
d) VL = 1 HL = 1 ja, $x = 1$ är en lösning till ekvationen

4 a) $x < -4$ b) $x > 4$
c) $x > 2$ d) $x < -7$

5 a) $v = -3{,}5$ b) $u = -3{,}5$

6 a) $x = \dfrac{1}{2}$ b) $x = -15$
c) $z = 12$ d) $x = -9$

7 a) $x = 8$ b) $x = 0{,}6$
c) $x = -1{,}5$ d) $x = 10$

8 a) $x = 32$ b) $v = 3$

9 a) 6 b) 5

10 a) -2 b) 1

11 a) $y = 6x$
b) 4 tim 20 min

12 a) aritmetisk, differensen konstant
b) $a_{10} = 25$
c) $a_n = 3n - 5$

13 Abebe 10 kr, Brita 15 kr, Carl 25 kr

14 $a_n = 0{,}7 + 0{,}3n$

15 a) $K = 20 + 15x$

b) 395 kr

c) 38 km

16 a) 9 chokladbitar

b) 6 chokladbitar

17 a) $(420 - 14t)$ liter

b) 14 liter/min

c) kl 19.47

18 a) $(25 + 6{,}50x)$ kr

b) 9 gurkor

19 år 2009

20 a) $x > -19{,}5$ b) $x > 0{,}8$

c) $x \leq -15$ d) $x \leq 1$

21 a) $y = 21{,}6$ b) $x = \dfrac{5}{13}$

22 a) $x = 2$ b) $x = 2$

23 a) $-3 \;\; 2 \;\; -1 \;\; 0 \;\; 1 \;\; -2 \;\; 3 \;\; -4 \;\; 5$

b) $a_n = (4 - n)(-1)^n \ldots$

24 20 kr

25 cirka 6 500 fåglar

26 $r = \sqrt[3]{\dfrac{3V}{4\pi}} = \sqrt[3]{\dfrac{3}{4\pi}}\ \text{m} \approx$

$\approx 0{,}62$ m = 6,2 dm

27 17 flickor från början

28 a) $x = 6$ b) $x = 7$

29 a) T.ex. $3b + 3a + 3m + 2p$

b) Minst 16 kr 40 öre, mest 21 kr 50 öre

30 $1\,500 + 14{,}5x \leq 2\,900$

$x \leq 96{,}6$

31 14 l.e. ≤ omkretsen < 24 l.e.

32 $\dfrac{7x+2}{2} = 3{,}5x + 24$

$7x + 2 = 2(3{,}5x + 24)$

$7x + 2 = 7x + 48$ x tar ut varandra

VL = 2 HL = 48

ekvationen har ingen lösning

33 a) $z = \sqrt[3]{\dfrac{3x - 3y}{x}}$

b) $z = \left(\dfrac{V \cdot \pi}{4}\right)^4 + 1$

34 $a_n = 81 - n^2$

35 $\dfrac{3x^2}{x^2} < \dfrac{2x^3}{x^2}$

$3 < 2x$, $x > 1{,}5$

Dvs. 2, 3, 4, …

36 a) Vi undersöker vilka alternativ som finns:

Kort sida: 1 cm.
Lång sida ≤ 9 cm.

Kort sida: 2 cm.
Lång sida ≤ 8 cm.

Kort sida: 3 cm.
Lång sida ≤ 7 cm

Kort sida: 4 cm.
Lång sida ≤ 6 cm

Om den korta sidan är x är långsidan $\leq 10 - x$.

b) Den kortaste omkretsen är 4 cm, om båda sidorna har längden 1 cm, och den längsta är 20 cm.

4 cm ≤ omkrets ≤ 20 cm.

37 a) Om a har ett annat värde än 1 kan b väljas fritt, t.ex. $a = 2$, $b = 6$. Då har ekvationen lösningen $x = 10 / 3$.

b) T.ex. $a = 1$ och $b = 3$. Ekvationen blir då $3x + 15 = 3x + 10$, som saknar lösning.

c) Om $a = 1$ och $b = 2$ blir vänsterledet $3x + 10$ och högerledet $3x + 10$. Vänsterledet har samma värde som högerledet oavsett vad x har för värde. Då finns det oändligt många lösningar.

38 $2x + 5 = \dfrac{16x + 40}{8}$;

$\text{HL} = \dfrac{16x}{8} + \dfrac{40}{8} = 2x + 5$

VL = HL för alla x, alltså oändligt antal lösningar då det inte spelar någon roll vad x har för värde.

39

$a_n = n^2$	$a_n = 2^n$
$a_1 = 1$	$a_1 = 2$
$a_2 = 4$	$a_2 = 4$
$a_3 = 9$	$a_3 = 8$
$a_4 = 16$	$a_4 = 16$
$a_5 = 25$	$a_5 = 32$
$a_6 = 36$	$a_6 = 64$

a) Ekvationen har lösningarna $x = 2$ och $x = 4$.

b) Nej, det kan inte finnas några fler lösningar. Värdet av 2^x växer snabbare än värdet av x^2 när x ökar förbi $x = 4$.

40 Rektangelns area $3x \cdot 2y$, triangelns area $\dfrac{2x \cdot 1{,}5y}{2}$.

$\dfrac{\dfrac{2x \cdot 1{,}5y}{2}}{3x \cdot 2y} = \dfrac{1{,}5}{6} = \dfrac{1}{4}$.

Triangelns area är 1/4 av rektangelns area

41 Arean av området är $x(x + 4)$ m², och omkretsen är $2x + 2(x + 4) = 80$ m. Den kortaste sidan kan, på grund av omkretsen, maximalt vara 18 m. Då blir arean $18 \cdot (18 + 4)\ \text{m}^2 = 396\ \text{m}^2$, dvs. för stor om arean maximalt får vara 200 m². Om Anna väljer att göra kortsidan 17 m blir arean $17 \cdot 21\ \text{m}^2 = 357\ \text{m}^2$.

Vi ska hitta ett heltal x som gör att $x(x + 4)$ får ett värde så nära 200 som möjligt. Vi testar oss fram med räknaren och hittar $x = 12$, som ger arean $12 \cdot 16\ \text{m}^2 = 192\ \text{m}^2$. Värdet $x = 13$ ger arean $13 \cdot 17\ \text{m}^2 =$ $= 221\ \text{m}^2$, som är för stort.

KAPITELTEST

1 a) $x > \frac{7}{5}$ b) $x \geq -\frac{5}{2}$

2 b)

3 a) aritmetisk

b) $a_n = 43 - 3n$

4 a) $z = \frac{3x - 5}{2}$

b) $z = \frac{3x - 2k}{x}$

c) $z = \frac{(x + 1)^3}{3}$

d) $z = \frac{2x - 1}{3 - 4x}$

5 a) 75 b) $a_n = 2a^2 + 3$

6 $x = 9$

7 $x \leq -15$

8 Ellen äter x av hela kakan (1):

$$x + \frac{x}{2} + \frac{x}{2} + \frac{1}{6} = 1$$

Ekvationen har lösningen $x = \frac{5}{12}$. Ellen äter 5/12, Lisa äter 5/24 och Vilgot äter 9/24.

9 $a = 27$

10 a) $K = 2{,}50 + x \cdot 10{,}90$

b) $x \leq 6$ i formeln. (Även $x > 0$, vilket är självklart)

c) Han behöver köpa 3 plastkassar. Kostnaden blir $(3 \cdot 2{,}50 + 16 \cdot 10{,}90)$ kr $=$ $= 181{,}90$ kr.

11 a) Mårten cyklar 1 km på 5 minuter. På en minut hinner Mårten 0,2 km. $s = 0{,}2t$.

b) $38 = 0{,}2t$ har lösningen $t = 190$ minuter $= 3$ h 10 minuter.

12 Kalla mängden deg för D. Då är $D = 580 - 20n$

b) Hon kan bara baka tills degen är slut, det vill säga tills $D = 0$. Det gör att det finns en begränsning i hur många kakor hon kan baka. Antalet kakor $n \leq 29$ stycken.

13 a) $T(20) =$ $= (70 + 2^{-0{,}08 \cdot 20} + 23)$ °C $\approx$ ≈ 46 °C

b) $t = 0$ ger $T(0) = 93$ °C

c) Efter mycket lång tid, då t har ett stort värde, kommer temperaturen att närma sig 23 °C. Faktorn $2^{-0{,}08 \cdot t}$ kommer att bli mindre och mindre, och så småningom återstår bara termen 23 i uttrycket. Det är alltså rumstemperaturen.

DISKUTERA, RESONERA OCH MODELLERA

S. 79

Kvadrater

- Man måste dra 7 streck för figur 2 och 10 streck för figur 3. För varje extra kvadrat som bildas måste man dra tre streck till.
- Antalet streck som behövs för n figurer är alltså $a_n = 1 + 3n$, där n är figurnumret. $n = 1, 2, 3, \ldots$
- För figur 20 krävs alltså $1 + 3 \cdot 20 = 61$ streck.
- Med 100 streck: $1 + 3n = 100$, $n = 33$ kvadrater i rad.

Prickar

- För figur 4 krävs 4 extra prickar, alltså totalt 14 prickar.
- För varje figur ökar antalet prickar med 4. Antalet prickar som behövs för figur nummer n är alltså $a_n = 4n - 2$, där n är figurnumret. $n = 1, 2, 3, \ldots$
- Figur nummer 50 kräver alltså $4 \cdot 50 - 2 = 198$ prickar.
- Med 90 prickar: $90 = 4n - 2$, $n = 23$. Figur nummer 23 kan ritas.

S. 88

- Talföljden 3, 6, 9, 12, 15, … är $a_n = a_{n-1} + 3$ där $a_1 = 3$. $n = 2, 3, 4, \ldots$
- Om $a_1 = b$ och differensen är d är talföljden $a_n = a_{n-1} + d$, $a_1 = b$. $n = 2, 3, 4, \ldots$
- I talföljden 1, 2, 4, 8, … är varje tal dubbelt så stort som det föregående talet. Alltså är $a_n = 2 \cdot a_{n-1}$, $a_1 = 1$. $n = 2, 3, 4, \ldots$
- Talföljden 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, … är $a_n = a_{n-1} + n$. Till det föregående talet läggs det aktuella talets nummer i följden. $a_1 = 1$, $n = 2, 3, 4, \ldots$
- I Fibonaccis följd är ett tal summan av de två föregående talen, från och med det tredje talet. Det behövs alltså två starttal, och talföljden kan beskrivas med $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ och $a_1 = 1$ samt $a_2 = 1$. Talnumret $n \geq 3$.
- Om det andra talet i en talserie är 4 och det fjärde talet är 16, kan talföljden till exempel vara aritmetisk med differensen 6: $a_n = a_{n-1} + 6$, $a_1 = -2$. $n = 2, 3, 4, \ldots$ Talföljden kan också vara geometrisk: $a_n = 2 \cdot a_{n-1}$, $a_1 = 2$, $n = 2, 3, 4, \ldots$

Kapitel 3

3101 a) 1,01 b) 0,85
c) 2,00 d) 0,50

3102 a) ökning med 8 %
b) minskning med 25 %
c) minskning med 0,5 %
d) ökning med 100 %

3103 18 450 kr

3104 135 kr

3105 a) 1,15 b) 15 %

3106 a) 0,80 b) 20 %

3107 37,5 %

3108 15 811 kr

3109 725 kr

3110 ca 4,2 %

3111 ca 59 %

3112 a) 675 kr b) 33 %

3113 a) 800 000 kr
b) Inköp: 1 400 000 kr
Försäljning: 1 440 000 kr
Vinst: ca 2,86 %
c) Skatt: 22 % av 120 000 kr = 26 400 kr. Då återstår 13 600 kr av vinsten, vilket motsvarar 0,97 % av inköpsvärdet.

3114 14,44 %

3115 Om datorn kostar 10 000 kr utan moms kostar den 12 500 kr med moms. När hon köper datorn får hon betala 12 500 kr. Av det värdet är 2 500/12 500 moms, det vill säga 20 %.

3116 Hanna: 299 / 4 = 74,75 kr/GB. Girma: 33,25 kr/GB. Hannas kostnad är 41,50 kr mer per GB vilket är ca 125 % mer än vad Girma betalar.

3117 Om en sida ökar med 20 % multipliceras dess längd med 1,20. Om en sida minskar med 20 % multipliceras sidans längd med 0,80. Totalt blir arean $1{,}20 \cdot 0{,}80 = 0{,}96$ gånger så stor. Arean minskar alltså med fyra procent, och Hanna har rätt.

3118 Totala förändringsfaktorn ska vara 1,00. Förändringen $1{,}10 \cdot 0{,}90 \cdot x = 1{,}00$ där x är förändringsfaktorn för den tredje sidan. Lösningen är $x \approx 1{,}01$, det vill säga sidans längd ska ökas med ungefär 1 %.

3119 Om radien ökar med 5 % blir volymen

$$\frac{4\pi(1{,}05r)^3}{3} = \frac{4\pi r^3 \cdot 1{,}05^3}{3} \approx$$

$$\approx \frac{4\pi r^3}{3} \cdot 1{,}158$$

Volymen har alltså ökat med ca 15,8 %.

3120 $1{,}02^3 \approx 1{,}061$, det vill säga en ökning med 6,1 %.

3121 a) 3 700 / 2 700 ≈ 1,37, en ökning med 37 %
b) $1{,}37^{1/8} \approx 1{,}04$, en ökning med ca 4 % per år.

3122 Total förändringsfaktor på 10 år: 1,32. Ökning per år: $1{,}32^{1/10} \approx 1{,}028$, alltså ca 2,8 % per år.

3123 a) $0{,}75 \cdot 1{,}30 = 0{,}975$
b) $0{,}975 \cdot 1900 \approx 1850$ kr

3124 a) Förändringsfaktorn är 4 / 2 000 = 0,002 på 50 år. Per år blir minskningen $0{,}002^{1/50} \approx 0{,}883$ vilket motsvarar en minskning med 11,7 % per år.
b) Förändringsfaktorn ska då vara 2 000 / 4 = 500 på 50 år. På ett år blir förändringsfaktorn då $500^{1/50} \approx 1{,}132$ det vill säga en ökning med 13,2 % per år.

3125 a) Priset ökade med 100 %.
b) Fördubbling innebär en förändringsfaktor 2,00.
c) $2{,}00^{1/20} \approx 1{,}035$ alltså ca 3,5 % per år.
d) På två år ökade priset $1{,}035^2 = 1{,}071$, det vill säga med 7,1 %.

3126 Du sätter in 5 000 kr på banken. Första och andra året får du 3 % i ränta på dina pengar. De tre efterföljande åren är räntan 4 %. Hur stort kapital har du efter fem år?

3127 a) Förändringsfaktorn är 0,5 på 15 år. Per år: $0{,}5^{1/15} \approx 0{,}955$ alltså en minskning med 4,5 % per år.
b) Efter 10 år återstår $0{,}955^{10} \approx 0{,}631$, alltså 63,1 %.

3128 Förändringsfaktorn är $0{,}998 \cdot 0{,}996 \cdot 0{,}991 \cdot 1{,}007 \cdot$ $\cdot\, 1{,}013 \approx 1{,}0049$ alltså en ökning med 0,49 %.

3129 4,5 % förlust innebär förändringsfaktorn 0,955. Efter 3,5 år var den totala förändringsfaktorn 0,851, det vill säga 85,1 % av kapitalet fanns kvar. 2 696 riksdaler motsvarar 85,1 % och 3 167 riksdaler motsvarar 100 %.

3130 a) Förändringsfaktorn är $1 \cdot 0{,}95 \cdot 0{,}90 = 0{,}855$, alltså 14,5 % rabatt.
b) Kalla förändringsfaktorn den fjärde gången för x. $0{,}855 \cdot x = 0{,}73$ ger $x \approx 0{,}854$. Han fick alltså 14,6 % rabatt den fjärde gången.

3131 Prishöjningen är
590 / 390 ≈ 1,513 alltså 51,3 %.
Om en prishöjning är t.ex.
20 % måste den andra vara
1,513 / 1,20 ≈ 1,26 alltså 26 %.

3132 Jämfört med Francis är hennes hastighets totala förändringsfaktor 0,93 · x, där x är förändringsfaktorn för nedre delen av backen. Produkten måste vara större än 1 för att hon ska vinna, och det gör att x minst måste vara 1,075. Hon måste åka 7,5 % snabbare i nedre delen av backen.

3133 a) 0,5/200,5 = 0,00249 alltså 0,249 %.
b) Emma vill ha 0,498 % socker i sitt kaffe. Kalla mängden socker för x. Då är $x/(200 + x) = 0{,}00498$. Ekvationen har lösningen $x \approx 1{,}00098$, dvs. ca 1,0 g.

3201 240 kr

3202 a) 1 700 kr
b) 21 700 kr

3203 a) 31 200 kr
b) 7 800 kr

3204 a) 151,8 %
b) 17 591 kr

3205 Alice (sparräntan är ca 1,76 %)

3206 35 · 12 = 420 kr per år.
420 / 1 855 ≈ 0,226 alltså 22,6 %.

3207 Årsräntan var 4 800 kr så räntesatsen var 10,7 %.

3208 a) 40 460 kr per år, 3372 kr per månad.
b) Årsräntan blir 52 360 kr, per månad blir det 4 363 kr vilket är 992 kr mer per månad.

3209 Det andra lånets ränta är 2 775 kr per månad.
Lånet är på 900 000 kr.

3210 a) 8 stycken
b) 1 000 kr

3211 (225 + 12 · 30) kr = 585 kr

3212 a) 1 549 kr dyrare
b) ca 31,6 %

3213 573 kr

3214 a) 595 kr
b) 525 kr
c) 9,9 %

3215 a) 1 138 kr b) 1 134 kr

3216 a) 7 284 kr
b) 6 963 kr
c) 3 210 kr

3217 a) 300 st
b) 667 kr
c) 1 083 kr

3218 a) Ränta: 960 kr
Amortering: 4 000 kr
Avgifter: 295 + 25 kr
Totalt: 5 280 kr
b) Aviavgifter: 6 · 25 = 150 kr
Uppläggningskostnad: 295 kr
Ränta första året:
960 + 800 = 1 760 kr
Ränta andra året:
640 + 480 = 1 120 kr
Ränta tredje året:
320 + 160 = 480 kr
Skuld: 24 000 kr
Totalt: 27 805 kr

3219 Alternativ 1
Avgifter: 250 + 12 · 30 = = 8 610 kr
Amortering: 667 kr/månad
Totalt: 8 000 + 610 = 8 610 kr

Alternativ 2
Amortering: 2 000 kr/halvår
Ränta: 496 + 372 + 248 + + 124 = 1 240 kr
Totalt: 8 000 + 1 240 = = 9 240 kr
Alternativ 1 kostar alltså minst.

3220 Olle får 7,50 kr i ränta för de första 1 000 kr han sätter in.
För den andra får han $\frac{5}{12}$ av årsräntan, vilket är 6,25 kr.
För den tredje får han $\frac{4}{12}$ av årsräntan, vilket är 5,00 kr osv.
Totalt får Olle 26,25 kr.

3301 a) Siffrorna 1–8
b) $\frac{1}{8}$
c) $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$
d) 10 stycken

3302 a) $\frac{3}{7}$ b) 12 stycken

3303 a) $\frac{3}{8}$
b) $\frac{5}{8}$ motsvarar 24 gånger.
Han har spelat ca 38 gånger.

3304 a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{52}$
c) $\frac{4}{52} = \frac{1}{13}$ d) $\frac{24}{52} = \frac{6}{13}$

3305 a) $\frac{5}{500}=\frac{1}{100}$

b) 9 av 500 är vinster. Sannolikheten för nitlott är alltså $\frac{491}{500}$.

c) 2 % vinstchans motsvarar 9 vinstlotter. Det måste finnas 450 lotter kvar i lotteriet, och alltså har man dragit 50 nitlotter.

d) Helt säker på vinst blir du först när det bara finns vinstlotter kvar. Du behöver köpa 491 lotter för att vara helt säker på att nästa blir en vinst. Svar: 492 st.

3306 2 % av alla bilar motsvarar 8 stycken. Det står alltså 400 bilar på parkeringen. 9 % av 400 = 36 BMW.

3307 a)

b) $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$

c) $\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}=\frac{5}{36}$

d) $\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}+\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{10}{36}=\frac{5}{18}$. Hon kan antingen få en sexa först och sedan inte en sexa, eller tvärtom.

3308 a)

b) $\frac{1}{36}$

c) $\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$

d) Summan 7, som har högst sannolikhet. $P(\text{summan } 7)=\frac{1}{6}$.

3309 a) $\frac{7}{10}\cdot\frac{7}{10}=\frac{49}{100}$ (49 %)

b) $\frac{7}{10}\cdot\frac{3}{10}=\frac{21}{100}$ (21 %)

c) $P(\text{blå, vit})+P(\text{vit, blå})=$
$=\frac{7}{10}\cdot\frac{3}{10}+\frac{3}{10}\cdot\frac{7}{10}=\frac{42}{100}$
(42 %)

d) $\frac{3}{10}\cdot\frac{3}{10}\cdot\frac{3}{10}=\left(\frac{3}{10}\right)^3=$
$=\frac{27}{1000}$ (27 ‰)

3310 a) $\frac{7}{10}\cdot\frac{6}{9}=\frac{42}{90}$

b) $\frac{7}{10}\cdot\frac{3}{9}=\frac{21}{90}$

c) $P(\text{blå, vit})+P(\text{vit, blå})=$
$=\frac{7}{10}\cdot\frac{3}{9}+\frac{3}{10}\cdot\frac{7}{9}=\frac{42}{90}$

d) $\frac{3}{10}\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{8}=\frac{6}{720}=\frac{1}{120}$

3311 a) $0{,}12\cdot 0{,}12=0{,}0144$ (1,44 %)

b) $P(\text{strike, inte strike})+$
$+P(\text{inte strike, strike})+$
$+P(\text{strike, strike})=$
$=0{,}12\cdot 0{,}88+$
$+0{,}88\cdot 0{,}12+$
$+0{,}12\cdot 0{,}12=0{,}2256$
(22,56 %)

3312 a) $P(\text{första jämn})=\frac{1}{2}$

$P(\text{fyra jämna i rad})=$
$=\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}$

b) $P(\text{fyra olika jämna siffror})$
$=\frac{5}{10}\cdot\frac{4}{9}\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{7}=$
$=\frac{1}{2\cdot 3\cdot 7}=\frac{1}{42}$

3313 a) Andel inte typ $A=0{,}12+$ $+0{,}38+0{,}06=0{,}56$

P(3 personer som inte har A) $=0{,}56^3\approx 0{,}176=$ $=17{,}6$ %

b) $P(\text{två med AB})=3\cdot 0{,}06\cdot$ $0{,}06\cdot 0{,}94\approx 0{,}010=1{,}0$ %

3314 $P(\text{rött två av tre gånger})+$
$+P(\text{rött tre gånger})=$
$=P(\text{rött, rött, grönt})+$
$+P(\text{rött, grönt, rött})+$
$+P(\text{grönt, rött, rött})+$
$+P(\text{rött, rött, rött})=$
$0{,}75\cdot 0{,}82\cdot 0{,}15+$
$+0{,}75\cdot 0{,}18\cdot 0{,}85+$
$+0{,}25\cdot 0{,}82\cdot 0{,}85+$
$+0{,}75\cdot 0{,}82\cdot 0{,}85=$
$=0{,}904=90{,}4$ %

3315 $P(1,>1)+P(2,>2)+\ldots+$
$+P(7,>7)=$
$=\frac{1}{8}\cdot\frac{7}{8}+\frac{1}{8}\cdot\frac{6}{8}+\ldots+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{8}$

I nämnaren står $8\cdot 8=64$.

I täljaren står
$7+6+5+4+3+2+1=28$.

Sannolikheten är alltså
$\frac{28}{64}=\frac{7}{16}$

3316 Kulan som flyttas kan antingen vara svart eller vit.

Svart kula flyttas: Det finns 5 svarta av 8 kulor. P(svart från andra burken) $=\frac{5}{8}$

Vit kula flyttas: Det finns 4 svarta av 8 kulor. P(svart från andra burken) $=\frac{4}{8}$.

Sannolikheten för att han drar en svart kula ur andra burken är:

$P(\text{svart flyttas, svart})+$
$+P(\text{vit flyttas, svart})=$
$=\frac{2}{5}\cdot\frac{5}{8}+\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{8}=\frac{22}{40}=\frac{11}{20}$.

3317 Svart kula flyttas: P(en vit ur andra burken) = $\frac{2}{6}$

Vit kula flyttas: P(en vit ur andra burken) = $\frac{3}{6}$

Sannolikheten för att dra två vita ur andra burken utan återläggning är då:

P(svart flyttas, vit, vit) + + P(vit flyttas, vit, vit) =

$$=\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{5}+\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5}=\frac{22}{150}=\frac{11}{75}$$

3318 P(2 hanar, 2 honor) =

$$=\left(\frac{1}{4}\right)^2\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2\cdot 6=\frac{27}{128}\approx$$

≈ 0,21 = 21 %

De två hanarna kan plockas upp på 6 olika sätt.

3319 a) Att man får mer än 5

b) Att man får en summa större än 11

c) Att alla är nitlotter

d) Att man möter minst en person som är 15 år eller äldre

3320 P(minst en sexa) = 1 – P(ingen sexa) = $1-\left(\frac{5}{6}\right)^2=\frac{11}{36}$

3321 Komplementhändelsen är ”summan 12”. P(summan 11 eller lägre) = 1 – P(summan 12)

3322 P(minst en flicka) =

= 1 – P(alla pojkar) =

$$=1-\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{7}{8}$$

3323 P(minst en kung) =

= 1 – P(ingen kung) =

$$=1-\left(\frac{36}{39}\right)^3\approx 0,21$$

3324 P(kung) = 1 – P(ingen kung)

$$=1-\frac{12}{13}\cdot\frac{11}{12}\cdot\frac{10}{11}\approx 0,23$$

3325 P(minst en grön) = 1 – P(ingen grön) = $1-\left(\frac{3}{4}\right)^3=\frac{37}{64}$

3326 P(stanna minst två gånger) =

= 1 – P(stanna mindre än två gånger)

P(stanna mindre än två gånger) = P(stanna 0 gånger) + P(stanna 1 gång) =

= 0,25 · 0,18 · 0,15 +

+ 0,75 · 0,18 · 0,15 +

+ 0,25 · 0,82 · 0,15 +

+ 0,25 · 0,18 · 0,85 = 0,096

P(stanna minst två gånger) =

= 1 – 0,096 = 0,904 = 90,4 %

3327 P(9 eller färre) = 1 – P(10) =

= 1 – $0,66^{10}$ ≈ 0,984 = 98,4 %

3328 P(minst ett vanligt) =

= 1 – P(inget vanligt) =

$$=1-\frac{10}{15}\cdot\frac{9}{14}\cdot\frac{8}{13}\cdot\frac{7}{12}\approx$$

≈ 0,846 = 84,6 %

3329 a) P(bulls eye) =

= 1 – P(inget bulls eye) =

= 1 – $0,9^{10}$ ≈ 0,65

b) P(minst en 9:a) =

= 1 – P(ingen nia) =

= 1 – $0,85^{10}$ ≈ 0,80

3330 $\frac{41}{64}$. Om den första tärningen visar 1 spelar det ingen roll vad den andra visar, summan blir inte större än 6. Om den första tärningen visar 2 måste den andra tärningen visa en femma, och det kan den göra på 3 sätt (det finns tre femmor). Om den första tärningen visar 3 måste den andra tärningen visa 4 eller mer, och det kan den göra på 5 sätt (det finns två fyror och tre femmor), osv.

Summera alla gynnsamma utfall. Antalet möjliga utfall är 64.

3331 Humlorna rör sig oberoende av varandra. Sannolikheten att en humla befinner sig vid en blomma är 0,25.

P(minst en humla) =

= 1 – P(ingen humla) =

= 1 – $0,75^{10}$ ≈ 0,944 = 94, 4 %

3332 P(minst en vara saknas) =

= 1 – P(ingen vara saknas) =

= 1 – 0,97 · 0,95 · 0,96 · 0,98 ≈

≈ 0,13 = 13 %

BLANDADE UPPGIFTER

1 a) 12 procentenheter

b) 20 %

2 a) 1,30 b) 1,023

c) 0,985 d) 2,10

3 P(5 eller 6) = $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

4 Om snörets längd är x är den återstående längden $0,70x$.

5 P(en blåögd) = $\frac{14}{32}=\frac{7}{16}$

6 a) $\frac{240}{300}=0,80$

b) minskning med 20 %

7 a) 1,25 · 1800 kr = 2 250 kr

b) $\frac{150}{2\,250}=0,067$.

Ungefär 6,7 %.

8 $1,033x$ = 24 000, x = 23 233, dvs. 23 233 kr.

9 $\frac{10}{25}=0,40$, alltså 40 %

10 0,046 · 15 000 = 690 kr

11 a) 2 av 20 = 10 %

b) 4 av 20 = 20 %

12 $1,105x$ = 36, x = 32,60, dvs. 32,60 kr

13 $\frac{48}{420}\approx 0,114=11,4$ %

14 Moms: $0{,}12 \cdot 280$ kr $= 33{,}60$ kr. Pris exklusive moms: 246,40 kr

15 $P(\text{summan } 9) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$

16 a) Gustav hade 10 fiskar från början, så han fick 2 stycken.

b) Anta att förändringsfaktorn i samband med Johannas födelsedag var x. $1{,}20 \cdot x = 1{,}50$. $x = 1{,}25$. Ökningen var 25 %.

17 $P(\text{fyra, fyra}) = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{100}$

18 $0{,}08x = 56$, $x = 700$, dvs. 700 elever

19 a) Gustav: 60 kr
Lotta: 120 kr

b) 100 % mer

c) 50 % mindre

20 Årsränta: $0{,}034 \cdot 560\,000$ kr $=$ $= 19\,040$ kr.

Per månad: $19\,040$ kr/12 $=$ $= 1\,587$ kr

Första månaden ska hon betala $(2\,000 + 1\,587)$ kr $= 3\,587$ kr.

21 Elias tänker att 20 % hela tiden är samma belopp i kronor, vilket inte stämmer.

Om en varas pris är x kr och höjs med 20 % är det nya priset $1{,}20x$. Sänker man sedan priset med 20 % är det nya priset $1{,}20x \cdot 0{,}80 = 0{,}96x$. Ursprungspriset har alltså minskat med 4 %!

22 $x \cdot 1{,}05^2$

23 $x \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right)$

24 Arean = längd · bredd = $x \cdot y$.

Ny längd: $1{,}40x$

Ny bredd: $0{,}75y$

Ny area: $1{,}40x \cdot 0{,}75y = 1{,}05xy$

Arean har ökat med 5 %.

25 a) 19 stycken

b) 19 %

26 a) $P(\text{summan } 10) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$

b) $P(\text{summan 2, 3 eller 4}) = $ $= \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

27 Förändringsfaktorn $0{,}5 = 0{,}92^x$ där x är antalet år. Prövning med räknaren ger att $x = 8$ ger förändringsfaktorn 0,51.

28 Om försäljningspriset är x måste $0{,}95 \cdot x = 1{,}25 \cdot 110\,000$. Lösningen är $x = 144\,737$ (kr)

29 Det fanns 50 chefer och 450 övriga anställda från början, det vill säga 10 % chefer. Efter ökningen finns 50 chefer och 500 övriga anställda, det vill säga 9,09 % chefer.

Minskningen är 0,91 procentenheter, och i procent räknat är minskningen 9,1 %.

30 Förändringsfaktorn är $1{,}11^5 \approx 1{,}685$, alltså en ökning med 68,5 %.

31 Förändringsfaktorn är $1{,}15 \cdot 0{,}70 = 0{,}805$, det vill säga en minskning med 19,5 %.

32 a) 25 %

b) $1{,}25 \cdot x = 1{,}50$. $x = 1{,}20$. Ökningen var 20 % andra gången.

33 a) Amortering: 12 500 kr per år

Ränta: 4 500 kr per år

Första årets inbetalning: 17 000 kr

b) Sista året återstår 12 500 kr att amortera.

Räntan på 12 500 kr är 562,50 kr.

Sista inbetalningen blir 13 062,50 kr.

34 $B = 1{,}50A$ och $F = 1{,}50B =$ $= 1{,}50 \cdot 1{,}50A = 2{,}25A$. Filip betalar 125 % mer skatt än Anders.

35 a) $2\,000\,000 \cdot 1{,}03^3 =$ $= 2\,185\,454$ kr

b) $2\,000\,000 \cdot 1{,}03 \cdot 1{,}04 \cdot 1{,}05 =$ $= 2\,249\,520$ kr

c) $2\,000\,000 \cdot 1{,}03 \cdot 1{,}02 \cdot 1{,}01 =$ $= 2\,122\,212$ kr

36 Georg har rätt eftersom den totala förändringsfaktorn är $1{,}10 \cdot 1{,}10 = 1{,}21$.

37 Först höjning sedan sänkning: $1{,}20 \cdot 0{,}85$

Först sänkning sedan höjning: $0{,}85 \cdot 1{,}20$

De båda uttrycken har samma värde. Det spelar alltså ingen roll i vilken ordning förändringarna görs.

38 a) För varje hundratal finns det 20 nummer som är delbara med 5. Det finns alltså 40 vinstlotter.

b) Nej, man vet inte om några vinstlotter är sålda men man kan göra vissa antaganden.

Om ingen vinstlott är såld är vinstchansen $\frac{40}{170} \approx 0{,}235$

Om alla sålda lotter var vinstlotter är hans vinstchans $\frac{10}{170} \approx 0{,}059$.

Hans vinstchans ligger alltså mellan 5,9 % och 23, 5 %.

39 Sträcka = hastighet · tid, och alltså är tid = sträcka/hastighet.

Hastigheten multipliceras med faktorn 1,15. Sträckan multipliceras med faktorn 0,91.

Det innebär att tiden förändras med faktorn $\frac{0,91}{1,15} \approx 0,79$

Restiden blir alltså ca 21 % kortare.

40 P(minst en röd) = 1 – P(ingen röd) $= 1 - \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} = \frac{36}{56} = \frac{9}{14}$

41 a) P(1 miss, 9 träff) = $= 0{,}08 \cdot 0{,}92^9 \cdot 10 \approx 0{,}38$. Hon skjuter tio skott, och ett av de tio skotten ska missa.

b) P(minst en miss) = = 1 – P(tio träffar) = $= 1 - 0{,}92^{10} \approx 0{,}57 = 57$ %.

42 $A = 0{,}20B$, $B = 0{,}30C$, $C = 0{,}25D$. Det innebär att $A = 0{,}20 \cdot 0{,}30 \cdot 0{,}25D$

Då är $A / D =$ $= 0{,}20 \cdot 0{,}30 \cdot 0{,}25 = 0{,}015$

43 a) P(minst ett rätt) = 1 – P(alla fel). För varje fråga finns två felaktiga svarsalternativ.

$$1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{10} \approx 0{,}983 = 98{,}3\ \%$$

b) Exakt nio rätt = exakt ett fel. Felet kan placeras i någon av de tio raderna.

P(exakt ett fel) =

$$= \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^9 \cdot 10 \approx 0{,}00034 =$$

= 0,34 ‰

44 43 min 20 s = 2 600 s.

Hon måste minska sin tid med 200 s, det vill säga $\frac{200}{2\ 600} \approx 0{,}077 = 7{,}7\ \%$.

Förändringsfaktorn för tiden är 0,923.

$s = v \cdot t$ ger

$$v = \frac{s}{t_{ny}} = \frac{s}{0{,}923t} = \frac{1}{0{,}923} \cdot \frac{s}{t} \approx$$

$$\approx 1{,}083\frac{s}{t}$$

Förändringsfaktorn på hastigheten är 1,083. Hon måste alltså springa 8,3 % snabbare.

45 P(minst ett rätt) = = 1 – P(alla fel)

För det första numret som dras är det $\frac{28}{35}$ chans att det är fel. För nästa nummer också fel är det $\frac{27}{34}$, och så vidare.

1 – P(alla fel) =

$$= 1 - \frac{28}{35} \cdot \frac{27}{34} \cdot \frac{26}{33} \cdot \frac{25}{32} \cdot \frac{24}{31} \cdot \frac{23}{30} \cdot \frac{22}{29} \approx$$

≈ 0,824 = 82,4 %

46 a) Det finns 13 hjärter av 52 kort. P(alla hjärter) =

$$= \frac{13}{52} \cdot \frac{12}{51} \cdot \frac{11}{50} \approx$$

≈ 0,013 = 1,3 %

b) Det finns 4 ess av 52 kort.

$$P(\text{alla ess}) = \frac{4}{52} \cdot \frac{3}{51} \cdot \frac{2}{50} \approx$$

≈ 0,00018 = 0,018 %

c) Det finns fyra knektar, fyra damer och fyra kungar. Det spelar ingen roll i vilken ordning hon drar korten. De tre korten kan ordnas på 6 olika sätt: JDK, JKD, DJK, DKJ, KDJ, KJD.

P(en knekt, en dam, en kung) $= \frac{4}{52} \cdot \frac{4}{51} \cdot \frac{4}{50} \cdot 6 \approx$

≈ 0,0029 = 0,29 %

47 Eftersom alternativ 2 innebär en utbetalning i fyra år undersöker vi pengarnas värde i början av det fjärde året för de båda fallen.

Alternativ 1:
$400\ 000 \cdot 1{,}015^3 = 418\ 271$ kr

Alternativ 2: 100 000 +
$+ 100\ 000 \cdot 1{,}025 +$
$+ 100\ 000 \cdot 1{,}025^2 +$
$+ 100\ 000 \cdot 1{,}025^3 =$
= 415 252 kr.

Lennart bör alltså välja alternativ 1.

KAPITELTEST

1 0,96

2 $P(7) = \frac{1}{8}$. Han får troligen $240 \cdot \frac{1}{8} = 30$ stycken.

3 a) P(läsk) = $\frac{1}{16}$ enligt bilden. Fyra områden stora som ”läsk”-biten motsvarar en fjärdedel av cirkeln.

b) P(nitlott) = $\frac{5}{8}$ enligt bilden (hälften plus en halv fjärdedel)

4 a) 7

b) Det är lika stor chans. Summan 2 kan fås på ett sätt, genom att båda tärningarna visar 1. Summan 12 kan också bara fås på ett sätt, genom att båda tärningarna visar 6. Båda sannolikheterna är $\frac{1}{36}$.

5 Det nya priset är 80 % av ursprungspriset.
$0{,}80 \cdot 75 = 60$ kr.

6 a) Första året betalar han 5,0 % av 20 000 kr = = 1 000 kr i ränta.

b) William amorterar 4 000 kr per år. Andra året betalar han 5,0 % av 16 000 kr = = 800 kr. Tredje året betalar han 600 kr, fjärde året 400 kr och femte året 200 kr.

Totalt betalar han 1 000 + + 800 + 600 + 400 + 200 = = 3 000 kr i ränta.

7 Summan 9 är mest sannolik.

8 P(minst en krona) = = 1 – P(alla klave) =

$$= 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$$

9 En ökning med 20 % motsvarar en förändringsfaktor 1,20. En sänkning med 20 % motsvarar en förändringsfaktor 0,80. $1{,}20 \cdot 0{,}80 = 0{,}96$, en minskning med 4 %. Kurt har alltså fel.

10 a) 1 000 kr

b) Andra avbetalningen är amortering plus en ränta som motsvarar ett halvårs ränta på 7 000 kr. Han ska betala $1\,000 + 227{,}50 =$ $= 1\,227{,}50$ kr.

11 Lön före höjningarna: x kr.

$1{,}03 \cdot 1{,}04 \cdot 1{,}02 \cdot x =$
$= 1{,}092624x = 35\,650$ kr

$x = 32\,628$ kr

12 Arean från början är $a \cdot b$.

Efter förändringen är arean $x \cdot a \cdot 0{,}70 \cdot b$, där x är förändringsfaktorn för längden.

Produkten av förändringsfaktorerna ska ha värdet 1 om åkern ska behålla sin area $a \cdot b$.

$x \cdot 0{,}70 = 1$ ger $x \approx 1{,}43$
Hon måste öka längden med ca 43 %.

13 a) $\dfrac{70}{1\,750} = 0{,}04 = 4\ \%$

b) Enkel årsränta:
$12 \cdot 4{,}0 = 48\ \%$

Sammansatt årsränta:
$1{,}039^{12} = 1{,}582$, dvs 58,2 % ränta.

14 Vit kula ur burk A:
$P(\text{vit, vit}) = \dfrac{2}{8} \cdot \dfrac{2}{8} = \dfrac{1}{16}$

Inte vit kula ur burk A:
$P(\text{inte vit, vit}) = \dfrac{6}{8} \cdot \dfrac{1}{8} = \dfrac{3}{32}$

Att antingen (vit, vit) eller (inte vit, vit) infaller är
$P(\text{vit, vit}) + P(\text{inte vit, vit}) =$
$= \dfrac{5}{32}$.

DISKUTERA, RESONERA OCH MODELLERA

S. 113

Oskars lån:

a) Slutvärdet är
$40\,000 \cdot 1{,}06^4 = 50\,499$ kr

b) $10\,000 + 10\,000 \cdot 1{,}06 +$
$+ 10\,000 \cdot 1{,}06^2 +$
$+ 10\,000 \cdot 1{,}06^3$

c) $x(1 + 1{,}06 + 1{,}06^2 + 1{,}06^3) =$
$= 50\,499$. Ekvationen har lösningen $x \approx 11\,544$ kr som är annuiteten.

Alis lån:

Slutvärde: $100\,000 \cdot 1{,}035^5 =$
$= 118\,769$ kr

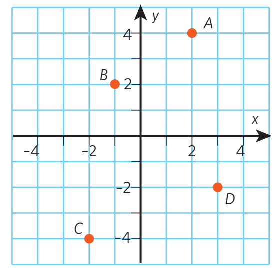
$x(1 + 1{,}035 + 1{,}035^2 +$
$+ 1{,}035^3 + 1{,}035^4) = 118\,769$

Ekvationen har lösningen $x \approx 22\,148$ kr. Annuiteten är 22 148 kr.

Kapitel 4

4101 A: (2, 1) B: (–4, 3)
C: (–1, –3) D: (5, –2)

4102



4103 (3, 1)

4104 a) $y = 0$

b) $x = 0$

c) y kan ha vilka värden som helst

d) x kan ha vilka värden som helst

4105 a) (–3, 0) b) (0; 1,5)

4106 T.ex. (3, 0), (3, 1) eller (3, –2).

4107 T.ex. (1, 4), (2, 1) och (2, 4)

4108 $x = 5$

4109 $y = 4$

4110 a) T.ex. (2, 2) och (3, 1). Figuren blir en vriden kvadrat.

b) (4, 4) och (5, 3). Figuren blir en snedställd rektangel.

4111 T.ex. (0, –1) eller (3, 1).

4112 (2, –1), (3, –4) och (1, –3)

4201 a) x b) $f(x)$

c) $0 < x < 5$

d) $3 < f(x) < 8$

4202 $g(x) = \dfrac{x}{2}$, $0 \le x \le 4$

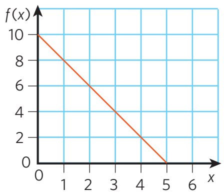
4203 $h(t) = -t$, $-3 < t < 2$

4204 $f(x) = -2x + 4$

4205 a) Exempelvis

x	$f(x)$
0	10
1	8
2	6
3	4
4	2
5	0

b)



4206 a) $g(x) = 4, -2 \le x \le 5$

b) $g(x) = 4$

4207 $x + 1$ respektive 3

4208 $g(t) = \begin{cases} 2t & \text{då } 0 \le t \le 10, \\ 20 & \text{då } t > 10 \end{cases}$

4209 a) $y(4) = 2 \cdot 4 - 4 = 4$

b) $y(-3) = 2 \cdot (-3) - 4 = -10$

c) $2x - 4 = 0$ har lösningen $x = 2$

d) $2x - 4 = 9$ har lösningen $x = 6{,}5$

4210 a) $y(0) = 1$

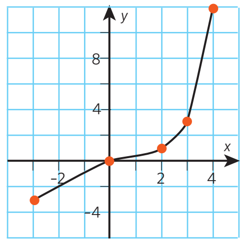
b) $y(2) = 2^2 - 3 \cdot 2 + 1 = -1$

4211 b), eftersom y i tabellen har två olika värden för samma x-värde.

4212 a) $2x + 4 = 3$ ger $x = -0{,}5$

b) $x = 2$

4213 a)

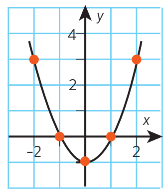


b) $y(1) \approx 0{,}5$

c) $y(-2) \approx -2{,}1$

d) $x = 0$ (ur tabellen)

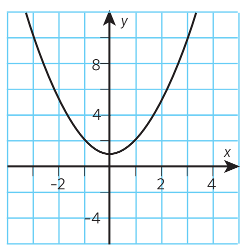
4214



4215 a)

x	y
−3	10
−2	5
−1	2
0	1
1	2
2	5
3	10

b)



c) $y(2{,}5) \approx 7{,}25$

d) $y(2{,}5) = 7{,}25$

4216 $3x^3 + 1 = 25$ innebär att $x^3 = 8$ och då är $x = 2$.

4217 a) $f(0) = 0$

b) $f(2) = 12$

c) Funktionen är definierad för alla x-värden.

d) Funktionen kan aldrig ha värden som är mindre än noll, så $y \ge 0$ är värdemängden.

4218 a) $y(0) = 0$

b) $y(4) = 2$

c) $x = 4$

d) Definitionsmängden är $0 \le x < 10$ och värdemängden är $0 \le y < 3{,}2$.

4219 a) Åldern är den oberoende variabeln och vikten är den beroende variabeln.

b) Om vikten som funktion av åldern betecknas $f(x)$ där x är åldern: $f(3) = 15$.

4220 a) $f(0)$ betyder ”funktionens värde då $x = 0$”.

b) $f(x) = 0$ är en ekvation. ”För vilket x har funktionen värdet 0?”

4221 a) $h(1) = 4$

b) $h(1)$ betyder funktionens värde då $x = 1$.

c) Definitionsmängd: I funktionen kan du sätta in alla x utom $x = 0$, eftersom division med 0 inte är tillåtet. Alltså $x \ne 0$.

d) Funktionen kan anta vilka värden som helst förutom 3, både positiva tal och negativa tal och värdet 0. Alltså $y \ne 3$.

4222 a) $f(x + 1) = 3(x + 1)^2 = 3(x^2 + 2x + 1)$

b) $f(2a) = 3 \cdot (2a)^2 = 12a^2$

4223 $f(x - 2) = 20$ ger $54/(x - 2) + 2 = 20$. Ekvationen har lösningen $x = 5$.

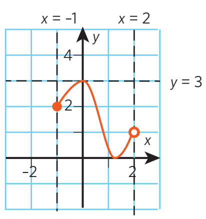
4224 a) Definitionsmängd: alla värden på x är tillåtna. Värdemängd: Funktionen kan aldrig få värden som är större än 2. Eller kort: Alla x och $y \leq 2$.

b) Definitionsmängd: Alla x utom $x = 0$ är tillåtna. Värdemängd: Funktionen kan anta alla värden utom $y = 0$.

c) Definitionsmängd: Alla tal är tillåtna. Värdemängd: Bara positiva tal och noll, dvs. $y \geq 0$.

d) Definitionsmängd: Alla positiva tal och noll är tillåtna, eftersom du inte kan dra roten ur negativa tal. Värdemängd: Alla positiva tal, och noll. Eller kort: $x \geq 0$ och $y \geq 0$.

4225

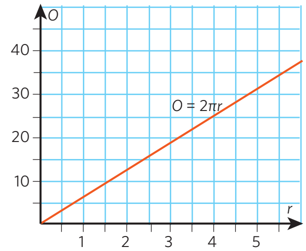


Värdemängden $0 \leq y \leq 3$ innebär att funktionen antar alla olika värden mellan $y = 0$ och $y = 3$, och $y = 0$ och $y = 3$. Definitionsmängden $-1 \leq x < 2$ innebär att funktionens graf börjar på $x = -1$ och slutar mycket nära $x = 2$, men inte på $x = 2$.

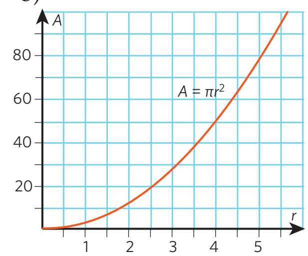
4226 Värdemängd: Funktionen antar alla värden från och med –4 till och med –1,75. $-4 \leq y \leq -1{,}75$.

4227 $g(2) = -2$, och $f(-2) = 0{,}5$. Svar: 0,5.

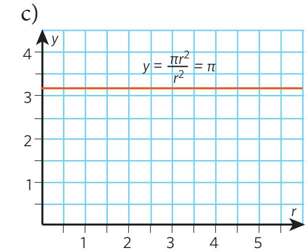
4228 a)



b)



c)



d) a: Definitionsmängd: $r \geq 0$. Värdemängd: $O \geq 0$

b: Definitionsmängd: $r \geq 0$. Värdemängd: $A \geq 0$.

c: Definitionsmängd: $r \geq 0$. Värdemängd: $y = \pi$, eftersom funktionen endast antar värdet π, oavsett värde på r.

4229 $f(x + 3) = k(x + 3) + m =$
$= kx + 3k + m$

Alltså är $f(x + 3) - f(x) =$
$= kx + 3k + m - (kx + m) =$
$= 3k$

4230 a) Ja. $f(a) = 2a$, $f(b) = 2b$ och $f(a + b) = 2(a + b) =$
$= 2a + 2b$, vilket är samma sak som $f(a) + f(b)$.

b) Nej. $f(a) = a^2$, $f(b) = b^2$ och $f(a + b) = (a + b)^2$, vilket inte är samma sak som $a^2 + b^2$.

c) $f(x) = kx + m$ är bara en sådan linjär funktion om $m = 0$. k kan ha vilket värde som helst.

4231 $y = 20 - 2x$

4301 a) $k = 20$

b) kr/GB

c) $y = 20x$

d) $y(14) = 280$, dvs. 280 kr

4302 a) $y = 12x$

b) $y(x) = 180$, $12x = 180$, $x = 15$

4303 a) a: $y = 2x$, $k = 2$ l/min, b: $y = x$, $k = 1$ l/min

b) c: $y = 1{,}5x$, $k = 1{,}5$ kr/hg, d: $y = 0{,}5x$, $k = 0{,}5$ kr/hg

c) Saffran: $y = 60x$, $k = 60$ kr/g, Vit tryffel: $y = 50x$, $k = 50$ kr/g

d) Bil: $y = 90x$, $k = 90$ km/h

Elitcyklist: $y = 40x$, $k = 40$ km/h

4304 a) $y = 187{,}5x$

b) $y = 0{,}5x$

c) Purjolökar/portion

d) För champinjonerna gäller $y = 25x$ där x är antalet portioner. $k = 25$ g/portion.

$25x = 850$ har lösningen $x = 34$, dvs. 34 portioner. Alternativ: $8{,}5 \cdot 4 = 34$. Svar: 34 portioner.

4305 Om $y = kx$ så är $x = \frac{y}{k} = \frac{1}{k} \cdot y$. Om k är en konstant så är även $\frac{1}{k}$ konstant.

I sambandet $x = \frac{1}{k} \cdot y$ är proportionalitetskonstanten $\frac{1}{k}$, $k \neq 0$.

4306 a) $k = 2, m = 1$

b) $k = 1, m = -1$

c) $k = -5, m = 18$

d) $k = 180, m = 1\,000$

4307 a) a: $y = x + 4$

b: $y = x - 3$

c: $y = 2x + 1$

b) a: $y = 3x - 4$

b: $y = 0{,}5x + 3$

c: $y = -0{,}5x - 1$

4308 a) $y = 2x - 5$ skär y-axeln i $y = -5$ och för varje steg i positiv x-riktning ökar y-koordinaten för linjen med 2. $y = -3x + 4$ skär y-axeln i $y = 4$ och för varje steg i positiv riktning minskar y-koordinaten med 3.

b) $y = 0{,}5x - 1$ skär y-axeln i $y = -1$ och för varje steg i positiv x-riktning ökar y-koordinten för linjen med 0,5. Linjen $y = -0{,}5x + 2$ skär y-axeln i $y = 2$ och för varje steg i positiv x-riktning minskar y-koordinaten med 0,5.

4309 A – L_1 – a

B – L_3 – c

C – L_2 – b

D – L_5 – e

E – L_4 – d

4310 a: $y = -5$

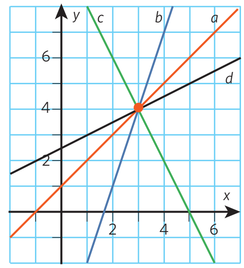
b: $y = -1$

c: $y = -4$

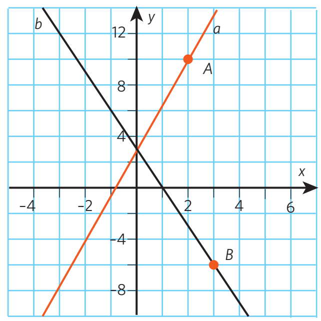
d: $y = 8$

e: $y = 7$

4311



4312



4313 a) $y = 3{,}5x + 3$

b) $y = -3x + 3$

4314 a: $y = -1$ b: $x = 2$ c: $x = 0$

4315 a: $y = -0{,}5x - 3$

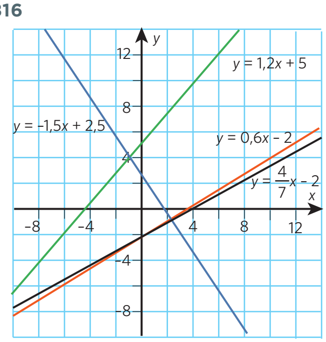
b: $y = \dfrac{2x}{3} + 3$

c: $y = 1{,}5x + 2$

d: $y = -\dfrac{x}{3} + 6$

e: $y = 0{,}8x - 1$

4316



4317 a) $y = 2x + 3$

b) $y = 3x - 1$

c) $y = -2x + 5$

d) $y = -\dfrac{x}{2} + 2$

4318 a) $k = 5$ och $y = 5x + m$ ger med punkten (2, 16) insatt: $16 = 5 \cdot 2 + m$

Då är $m = 6$ och linjens ekvation $y = 5x + 6$.

b) $k = 0{,}5$. Samma metod som i a) ger linjen $y = 0{,}5x + 11$

4319 a) $x = 6$ ger $y = -6$. Nej, linjen går inte genom $(6, -5)$.

b) $x = 16$ ger $y = 14$. Ja, linjen går genom (16, 14).

4320 a) $y = 3x + 11$

b) $y = 5x + 15$

c) $y = -2x + 1$

d) $y = 0{,}25x + 5{,}5$

4321 a) $y = 1{,}5x + 4$

b) $y = -0{,}4x + 2$

4322 a) $y = 1{,}25x + 1{,}75$

b) $y = \dfrac{x}{3} - 6$

c) $y = -2x + 3$

d) $y = -2{,}5x + 3{,}5$

4323 a) Linjen genom (2, 17) och (12, 47) har $k = 3$. Linjen genom (2, 17) och $(-5, 4)$ har $k = 13 / 7$. Nej, punkterna ligger inte på samma linje.

b) Linjen genom (36, 17) och $(-3, 4)$ har $k = (-13) / (-39) = 1 / 3$. Linjen genom $(-3, 4)$ och (12, 10) har $k = 6 / 15$. Nej, punkterna ligger inte på samma linje.

4324 Linjen skär y-axeln i $y = 8$, vilket är triangelns höjd. Linjen skär x-axeln där $y = 0$, dvs. då $x = 4$. Triangelns bas är 4. Arean är då 16 a.e.

4325 $k = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{-a-3}{1-a} = 2$
så $2(1 - a) = -a - 3$
$2 - 2a = -a - 3$ som har lösningen $a = 5$.

4326 $y = -0{,}25x + m$ skär y-axeln i $y = m$ (triangelns höjd) och x-axeln i $x = 4m$. Arean av triangeln är $\dfrac{4m \cdot m}{2} = 2m^2 = 10 \Rightarrow$
$m = \pm\sqrt{5}$. Vi kan förkasta den negativa lösningen, då hamnar inte linjen i den första kvadranten. Alltså ska $m = \sqrt{5}$ för att arean ska bli 10 a.e.

4327 $k = \dfrac{d-b}{c-a} = \dfrac{-(b-d)}{-(a-c)} = \dfrac{b-d}{a-c}$
Det spelar alltså ingen roll vilken av punkterna man börjar med. Men man måste vara konsekvent och antingen använda den första punktens x- och y-koordinater först eller den andra punktens x- och y-koordinater först.

4328 $k = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{3a-(2-a)}{a+1-5a} =$
$= \dfrac{4a-2}{1-4a} = 2$
$2(1 - 4a) = 4a - 2$
$2 - 8a = 4a - 2$ som har lösningen $a = \dfrac{1}{3}$.
Punkterna som linjen går genom är då $\left(\dfrac{4}{3}, 1\right)$ och $\left(\dfrac{5}{3}, \dfrac{5}{3}\right)$.
Linjens ekvation:
$y = kx + m = 2x + m$
Om $x = \dfrac{4}{3}$ är $y = 1$:
$1 = 2 \cdot \dfrac{4}{3} + m \Rightarrow m = -\dfrac{5}{3}$
Linjens ekvation är alltså $y = 2x - \dfrac{5}{3}$.
Skärning med x-axeln då $y = 0$: $y = 2x - \dfrac{5}{3} = 0$ har lösningen $x = \dfrac{5}{6}$.
Linjen skär x-axeln i punkten $\left(\dfrac{5}{6}, 0\right)$.

4329 a) $k = 2$, $m = -3$
b) $k = -0{,}4$, $m = 5$
c) Lös först ut y. $k = 0{,}5$ och $m = 0{,}75$
d) $k = 0{,}6$, $m = 2$

4330 a) $y = 3x + 2$
b) $y = -x - 2$
c) $y = \dfrac{5x}{3} + \dfrac{10}{3}$
d) $y = 2x + 4$

4331 $y = -x + 2$

4332 a) $y = 3x - 1$
b) $y = -x + 2$
c) $y = 0{,}6x + 4{,}1$
d) $y = -1{,}6x + 1$

4333 $y = 1{,}6x - 4$

4334 $a = 26$ kr

4335 $a = -\dfrac{8}{3}$

4336 $c = 1{,}5$

4337 $\dfrac{2x-3}{4} = \dfrac{y+2}{3} \Rightarrow$
$\Rightarrow 6x - 9 = 4y + 8 \Rightarrow$
$\Rightarrow y = 1{,}5x - 4{,}25$. VSV.

4338 Linjen går genom $(-1, 3)$ och $(2, 4)$. $f(x) = \dfrac{x}{3} + \dfrac{10}{3}$

4339 Genom $(-2, 5)$ och $(3, 7)$ går $y = 0{,}4x + 5{,}8$. Genom $(6, 5)$ går $y = 0{,}4x + 2{,}6$.

4340 $a = 6$

4341 $b = 31$

4342 $-3 / b = -7$ och $-a / b = 6$ ger att $b = 3 / 7$ och $a = -18 / 7$

4343 Nej, de ligger inte på samma linje. Linjen genom punkterna $(3, 7)$ och $(-2, 25)$ har $k = -3{,}6$. Linjen genom punkterna $(3, 7)$ och $(8, -9)$ har $k = -3{,}2$

4344 a) $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} = 1 \Rightarrow y = -\dfrac{3x}{2} + 3$
b) $x = 0$ ger $y = 3$, $y = 0$ ger $x = 2$
c) Linjen genom $(a, 0)$ och $(0, b)$ har lutningen $k = -b / a$ och skärningspunkten med y-axeln $m = b$.
Linjens ekvation är alltså $y = -\dfrac{bx}{a} + b$.
Dividera alla led med b:
$\dfrac{y}{b} = -\dfrac{x}{a} + 1 \Leftrightarrow \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$

4345 Linjens lutning är $k = \dfrac{b-1}{4}$ och linjen har $m = 1$. Alltså är $y = \dfrac{b-1}{4}x + 1$. Punkten $(a, -3)$ sätts in:
$-3 = \dfrac{b-1}{4}a + 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow -4 = \dfrac{b-1}{4}a \Rightarrow$
$\Rightarrow a = \dfrac{-16}{b-1} = \dfrac{16}{1-b}$

4346 a) Linjen ska ha lutningen $k = -1{,}5$ så $p / 5 = -1{,}5$ ger $p = -7{,}5$. $q \neq -2{,}4$ om $q = -2{,}4$ är det samma linje.
b) Linjerna ska ha samma m-värde. Den första linjen har $m = 1{,}2$ och då måste $-q / 2 = 1{,}2$ så $q = -2{,}4$. p kan väljas fritt.

c) Vi sätter in punkten (2, 3) i de båda ekvationerna:

$2p - 15 + 6 = 0$ och
$6 + 6 + q = 0$.

Ekvationerna är båda två uppfyllda om $p = 4{,}5$ och $q = -12$.

4347 a) Ledning: $a^2 - 4 = (a + 2)(a - 2)$.

$$k = \frac{a^2 - 3 - 1}{a - 2} = \frac{a^2 - 4}{a - 2} = a + 2$$

b)

a	*k*
2,1	4,1
2,01	4,01
2,001	4,001

Linjens lutning närmar sig $k = 4$ när a närmar sig 2.

4348 Produkten av riktningskoefficienterna för vinkelräta linjer är –1.

a) $k = -1$ b) $k = -\dfrac{1}{3}$

c) $k = \dfrac{1}{2}$ d) $k = 4$

4349 a) $a = \dfrac{2}{3}$ b) $a = -\dfrac{3}{2}$

4350 $k = -\dfrac{1}{4},\ 5 = -\dfrac{1}{4} \cdot (-4) + m \Rightarrow$

$\Rightarrow m = 4,\ y = -\dfrac{1}{4}x + 4$

4351 Produkten av riktningskoefficienterna för vinkelräta linjer är –1. $y = 2x + 5$ är vinkelrät mot $y = -0{,}5x + 3$. $y = -2x - 1$ är vinkelrät mot $y = 0{,}5x + 12$. $y = 4x$ är vinkelrät mot $y = -0{,}25x - 9$.

4352 $ax + by + c = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow y = -\dfrac{a}{b} \cdot x - \dfrac{c}{a} \Rightarrow$

$\Rightarrow k = -\dfrac{a}{b}$.

Produkten av riktningskoefficienterna för vinkelräta linjer är –1. Normalens k-värde $= \dfrac{b}{a}$.

4353 Skriv ekvationerna på k-form. Parallella linjer har samma k-värde.

$y = \dfrac{5}{6}x + \dfrac{1}{2},\ y = -\dfrac{a}{2}x \Rightarrow$

$\Rightarrow -\dfrac{a}{2} = \dfrac{5}{6},\ a = -\dfrac{5}{3}$.

Produkten av riktningskoefficienterna för vinkelräta linjer är –1. $-\dfrac{a}{2} = -\dfrac{6}{5} \Rightarrow$

$\Rightarrow a = \dfrac{12}{5} = 2{,}4$

4354 $y = 6x + m,\ y = kx - 4$.
Vinkelräta linjer: $k = -\dfrac{1}{6}$.
På y-axeln är $x = 0 \Rightarrow m = -4$.

4355 Skriv om ekvationen på k-form: $y = -6x + 12$. Vinkelräta linjer $\Rightarrow k = \dfrac{1}{6}$. Sätt in punkten P i linjens ekvation på k-form: $6 = \dfrac{1}{6} \cdot 3 + m \Rightarrow$

$\Rightarrow m = 5{,}5 \Rightarrow y = \dfrac{1}{6}x + 5{,}5$.

På allmän form:

$6y - x - 33 = 0$

4356 $k_1 = \dfrac{9 - 6}{6 - 2} = \dfrac{3}{4}$,

$k_2 = \dfrac{10 - 6}{-1 - 2} = -\dfrac{4}{3}$,

$k_1 \cdot k_2 = -\dfrac{4}{3} \cdot \dfrac{3}{4} = -1$.

Två av triangelns sidor vinkelräta mot varandra och triangeln är rätvinklig.

4357 $P\,(4, 12)$, $Q(9, 7)$. Lutningen för linjen mellan P och Q:

$k_{PQ} = \dfrac{12 - 7}{4 - 9} = \dfrac{5}{-5} = -1$.

Antingen är vinkeln vid P eller vinkeln vid Q rät.

1. Vinkeln vid P är rät $\Rightarrow$ lutningen för linjen PR:
   $k_{PR} = \dfrac{12 - y}{4} = 1 \Rightarrow y = 8$.
   Koordinaterna för R är (0, 8).
2. Vinkeln vid Q är rät $\Rightarrow$ lutningen för linjen QR:
   $k_{QR} = \dfrac{7 - y}{9} = 1 \Rightarrow y = -2$.
   Koordinaterna för R är (0, –2).

4358 a) $P\,(0, 2)$, $Q\,(5, -1)$ och $R\,(3, 7)$. Produkten av riktningskoefficienterna för vinkelräta linjer är –1.

$k_{PR} = \dfrac{7 - 2}{3 - 0} = \dfrac{5}{3}$,

$k_{PQ} = \dfrac{-1 - 2}{5} = -\dfrac{3}{5}$.

$k_{PR} \cdot k_{PQ} = \dfrac{5}{3} \cdot \left(-\dfrac{3}{5}\right) = -1$.

Alltså är linjerna PQ och PR vinkelräta mot varandra.

b) Linjerna PR och SQ måste vara parallella, likaså linjerna RS och PQ. Punkten S har koordinaterna

$$(x, y) \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{y + 1}{x - 5} = \dfrac{5}{3} \\ \dfrac{y - 7}{x - 3} = -\dfrac{3}{5} \end{cases} \Rightarrow$$

$x = 8$ och $y = 4$. Punkten S har koordinaterna (8, 4).

4359 Linjen genom P och Q: $y = 0{,}5x + 1{,}5$. Skärningspunkten mellan linjerna: $-2x + 1 = 0{,}5x + 1{,}5 \Rightarrow$ $\Rightarrow x = -0{,}2$ och $y = 1{,}4$. Avståndet från skärningspunkten (–0,2; 1,4) till punkten P (3, 3) är i x-led $3 - (-0{,}2) = 3{,}2$ och i y-led $3 - 1{,}4 = 1{,}6$. Avståndet från skärningspunkten till spegelpunkten är detsamma. x-koordinaten för $Q = -0{,}2 - 3{,}2 = -3{,}4$; y-koordinaten $= 1{,}4 - 1{,}6 = -0{,}2$. Q har koordinaterna (–3,4; –0,2).

b) Linjen genom P och Q: $y = 4x - 9$. Skärningspunkten mellan linjerna: $-0{,}25x + 2 = 4x - 9 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{44}{17}$ och $y = \frac{23}{17}$.

Avståndet från skärningspunkten $\left(\frac{44}{17}, \frac{23}{17}\right)$ till punkten $P\ (3, 3)$ är i x-led

$3 - \frac{44}{17} = \frac{7}{17}$ och i y- led

$3 - \frac{23}{17} = \frac{28}{17}$. x-koordinaten för $Q = \frac{44}{17} - \frac{7}{17} = \frac{37}{17}$;

y-koordinaten =

$\frac{23}{17} - \frac{28}{17} = -\frac{5}{17}$.

Q har koordinaterna

$\left(\frac{37}{17}, -\frac{5}{17}\right)$.

4401 a), b) och d)

4402 a) d) b) $m = 0$

4403 $f(x) = -3x + 5$

4404 $(-4, -5)$

4405 $h(x) = \frac{x}{2} + 2,\ 1 \le h(x) \le 4$

4406 Låt $f(x) = k_1x + m_1$ och $g(x) = k_2x + m_2$, där k_1, k_2, m_1 och m_2 är konstanter. För summan $h(x) = f(x) + g(x)$ gäller $h(x) = k_1x + m_1 + k_2x + m_2 = (k_1 + k_2)x + (m_1 + m_2)$. Eftersom även $(k_1 + k_2)$ och $(m_1 + m_2)$ är konstanter, visar ekvationen $h(x) = (k_1 + k_2)x + (m_1 + m_2)$ att h är en linjär funktion.

4407 a) $y = 27$ b) $y = \frac{5}{3}$

c) $y = \frac{4}{9}$ d) $y = 4$

4408 a) $y = 2\sqrt{2} \approx 2{,}83$

b) $y = 2 \cdot 4^{1/3} \approx 3{,}17$

c) $y = 18$

d) $y = 182{,}25$

4409 a) $k = 2$, potensfunktion

b) $k = 27$, potensfunktion

c) $k = 10$, inte potensfunktion

d) $k = 3$, inte potensfunktion

4410 $x^2 = 8x^{-1}$ har lösningen $x = 2$. Koordinaterna är (2, 4)

4411 Funktionen är inte definierad för negativa x-värden.

4412 $1{,}5 = C \cdot 1^a$ ger $C = 1{,}5$.

$6 = 1{,}5 \cdot 2^a$ ger $a = 2$.

4413 $k = 8$

4414 $C = 40$

4415 $a = -7$

4416 Nej, det går inte. $x^{-1} = -ax$, multiplicera med x på båda sidor om likhetstecknet och du får $1 = -ax^2$. Om a är positivt är högerledet ett negativt tal, eftersom kvadrater alltid är positiva.

4417 $a - 4$

$b - 1$

$c - 2$

$d - 3$

4418 a) y har ett mycket stort positivt värde.

b) y har ett mycket litet positivt värde.

4419 a) $y = \sqrt{x} + 2$ ligger förskjuten 2 steg uppåt i y-led jämfört med $y = \sqrt{x}$.

b) Funktionen ligger förskjuten m steg i y-led jämfört med $y = \sqrt{x}$.

c) Funktionens graf flyttas a steg till höger om a är positivt och till vänster om a är negativt.

4420 a) Grafen till $y = \frac{1}{x-4}$ är förskjuten 4 steg till höger jämfört med $y = \frac{1}{x}$

b) Grafen är förskjuten a steg till höger om a är positivt och till vänster om a är negativt.

c) Grafen är förskjuten a steg åt vänster eller höger, och m steg i y-led.

4421 a) $f(x) = \frac{1}{x}$: Definitionsmängd: Alla x utom $x = 0$. Värdemängd: Alla värden utom 0. Funktionen kan aldrig anta värdet 0.

$f(x) = \frac{1}{x^2}$: Definitionsmängd: Alla x utom $x = 0$. Värdemängd: $f(x) > 0$

$f(x) = \frac{1}{x^3}$: Defintionsmängd: Alla x utom $x = 0$. Värdemängd: Alla värden utom 0.

b) Punkten (1, 1) är gemensam för funktionerna.

4422 $f(x) = \frac{1}{x}$ avtar snabbare än $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ eftersom $\sqrt{x}$ är ett mindre värde än x för alla tal $x > 1$.

4423 $y = x^2$ växer snabbast eftersom x^2 har en större lutning än x och $x^{1,5}$ för alla $x > 1$.

4424 Grafen går genom punkten (1, 4). $k = 3$.

4425 $y = C \cdot x^a$. Två punkter på grafen är (4, 1) och (16, 2).

$1 = C \cdot 4^a$ ger $C = 4^{-a}$

$2 = C \cdot 16^a = 4^{-a} \cdot (4^2)^a = 4^a$, vilket ger $a = 0{,}5$. Då är $C = 0{,}5$.

Funktionen är alltså $y = 0{,}5x^{0,5} = 0{,}5\sqrt{x}$

4426 $T(t) = at^2 + bt + c$

$T(0) = 12$ ger $c = 12$

$T(1) = 15$ ger $a + b + 12 = 15$ och alltså $a + b = 3$ och $b = 3 - a$

$T(2) = 19$ ger $4a + 2b + 12 = 19$

$b = 3 - a$ ger i den andra ekvationen

$4a + 2(3 - a) = 7,\ a = 0,5$

$b = 3 - a = 3 - 0,5 = 2,5$

$a = 0,5 \quad b = 2,5 \quad c = 12$

4427 a) Avtagande. Förändringsfaktorn är 0,58, vilket motsvarar en minskning.

b) Växande. Förändringsfaktorn är 1,12, vilket motsvarar en ökning.

c) Avtagande. $2^{-p} = 0,5^p$ så förändringsfaktorn är 0,5, vilket motsvarar en minskning.

d) Växande. $1,5^{-x}$ får allt mindre värden när x ökar, vilket gör att $1 - 1,5^{-x}$ ökar i värde.

4428 a) $y \approx 3\,498$

b) $y \approx 2,42$

c) $y \approx 0,314$

d) $y \approx 13,85$

4429 a) Startvärde: 20. Procentuell ökning: 8 % för varje x

b) Startvärde: 85. Procentuell minskning: 21 % för varje x

c) Startvärde: 2 010. Procentuell ökning: 0,2 % för varje x

d) Startvärde: 2,55. Procentuell minskning: 96 % för varje x

4430 $N(12) \approx 5$ kärnor

4431 En person sätter in 20 000 kr på banken och får 5 % sparränta per år. Efter hur många år har personen 24 500 kr på kontot?

4432 a) $y = 2\,000 \cdot 1,015^x$

b) 2 902 kr

4433 a) 3 b) 4

c) 1 d) 2

4434 C är startvärdet, a är förändringsfaktorn.

4435 a) $a = 4^{1/4} = 1,414$

b) $a = 0,4^{1/10} = 0,912$

4436 Andel: $0,02 \cdot 1,52^7 \approx 0,375$, alltså ca 37,5 %

4437 $g(x) = 25 \cdot 0,82^x$

4438 Startvärdet $C = 10$. Då är $100 = 10 \cdot a^2$, så $a = \sqrt{10}$

4439 Startvärdet $C = 800$.
$50 = 800 \cdot a^4$ ger $a = 0,5$.
Funktionen är $y = 800 \cdot 0,5^x$

4440 $y = 3^{-x} = \dfrac{1}{3^x} = \left(\dfrac{1}{3}\right)^x$

4441 a) Vinsten
$V = 680\,000 \cdot 1,05^x$

b) Vinsten
$V = 680\,000 \cdot 0,92^x$

c) Enligt a) är vinsten ca 1 100 000 kr

Enligt b) är vinsten ca 295 000 kr

4442 $y = -5x + 20$ och
$y = 20 \cdot 2^{-0,5x}$

$y = 2^{-x}$ innebär en halvering när x ökar med 1. $y = 2^{-0,5x}$ innebär en halvering när x ökar med 2.

4443 a) 30 minuter = 3 halveringstider. Det återstår 12,5 %.

b) På 10 minuter sönderfaller hälften, så förändringsfaktorn är 0,5 på 10 minuter.

Per minut blir förändringsfaktorn $0,5^{1/10} \approx$ $\approx 0,933$, dvs. en minskning med ca 7 % per minut.

c) Med räknaren får vi $0,933^{66} \approx 0,01$. Efter cirka 66 minuter.

d) $m = 100 \cdot 0,933^t$, där m är mängden i mg och t tiden i minuter.

4444 Kokpunkten T avtar exponentiellt med höjden.
$T = C \cdot a^h$, där h är höjden i meter över havet. Startvärdet C är 100.

$69 = 100 \cdot a^{8848}$ ger

$a = \left(\dfrac{69}{100}\right)^{1/8848}$

Koktemperaturen på Kebnekaise är då

$T = 100 \cdot \left(0,69^{1/8848}\right)^{2097}$ °C $\approx$ $\approx 91,6$ °C

4445 Enligt Stefan är bilen värd $240\,000 \cdot 0,70^4$ kr = 57 624 kr.
Enligt Inger är bilen värd $(240\,000 - 60\,000 \cdot 4)$ kr = $= 0$ kr

Inger antar att bilens värde minskar lika många kronor per år, medan Stefan antar en procentuell minskning. Resonera gärna tillsammans om vilket sätt att tänka som är lämpligast i olika situationer!

4446 a) Grafritande räknare ger att $f(t) < g(t)$ om $0 < t < 1,7$.

b) $f(t)$ beskriver att bakterierna är 200 från början och växer med 12 % per tidsenhet.

$g(t)$ beskriver en linjär tillväxt med 25 bakterier per tidsenhet.

4447 $x = 4$

4501 a) $x = 5$

b) $x = 1$

c) $x = 1$ och $x = -3$

d) $x = 2$

4502 a) $x \approx 6{,}35$

b) $x \approx 7{,}11$

c) $x \approx 3{,}30$

d) $x \approx 2{,}07$

4503 $x = 2$

4504 a) 1 lösning, $x = 0{,}50$

b) 2 lösningar, $x = -1{,}00$ och $x = 3{,}00$

c) 2 lösningar, $x \approx -1{,}58$ och $x \approx 1{,}58$

d) 3 lösningar, $x \approx -1{,}30$, $x = 0{,}00$ och $x \approx 2{,}30$

4505 För alla $t < 0$

4506 Nej, graferna saknar skärningspunkter

4507 a) $x = 2$ och $x = 4$

b) Graferna skär varandra för ett negativt x-värde, så det finns således en lösning till.

4508 a) Om $k > 0$ finns endast en lösning.

b) $-4 < k \leq 0$ ger två lösningar.

4509 a) $k = 25/220^2$ W/V^2 $\approx$ $\approx 5{,}17 \cdot 10^{-4}$ W/V^2

b) $U = 139$ V

4510 0, 1 eller 2 skärningspunkter.

4511 0,1 eller 2 skärningspunkter.

4512 a) 1,6 meter

b) $y(t) = 0$ då $t = 1{,}5$ Bollen är i luften under 1,5 sekunder.

4513 a) $y = 1\,000 \cdot 1{,}015^t$ där y är saldot och t tiden i år

b) Efter cirka 28 år.

4514 Antalet bakterier $N = 200 \cdot 1{,}16^t$, där t är tiden i timmar. $200\,000 = 200 \cdot 1{,}16^t$ löses grafiskt. Lösningen är $t \approx 47$ timmar. Efter cirka 47 timmar får hon feber.

4515 a) $B = 5 \cdot 10^{-4}$ T

b) $r = 25$ m

4516 a) En linjär funktion eftersom ökningen är konstant.

b) Djupet i cm är $y = 10 + 1{,}5t$, där t är tiden i timmar. Efter fem timmar är snödjupet $y(5) = 17{,}5$ cm

4517 a) En exponentiellt växande funktion.

b) Antalet bakterier $N = 200 \cdot (1{,}60^{1/24})^t$, där t är tiden i timmar. $N(8) = 200 \cdot 1{,}60^{1/3}$ st = = 234 st

c) $100\,000 = 200 \cdot 1{,}60^{t/24}$

Grafritande räknare ger lösningen $t \approx 317$ timmar.

4518 a) Energin $E = 9260\Delta T$

b) Temperaturdifferensen är 30 °C, vilket ger energin $E = 277\,800$ J ≈ 280 kJ

4519 a) Kraften $F = k \cdot v^2$ där v är hastigheten i m/s.

b) $k = 2{,}8/20^2$ Ns^2/m^2 $\approx$ $\approx 0{,}007$ Ns^2/m^2

4520 a) Folkmängden $y = 142\,440 - 1\,044t$, där t är tiden i år efter år 2013.

b) Minskningen är 10 440 personer (cirka 7,33 % av befolkningen) på 10 år.

Förändringsfaktorn är 0,9267 på 10 år, och alltså $0{,}9267^{1/10} \approx 0{,}9924$ på ett år.

Folkmängden $y = 142\,440 \cdot 0{,}9924^t$ där t är tiden i år efter år 2013.

c) Enligt den linjära modellen: $y(22) = 119\,472$ personer. Enligt den exponentiella modellen: $y(22) = 120\,432$ personer.

4521 $F = k \cdot \dfrac{1}{r^2}$

a) Falskt. Om avståndet halveras blir kraften fyra gånger så stor.

b) Falskt. Om avståndet fördubblas blir kraften en fjärdedel så stor.

c) Sant.

d) Sant. $F = k \cdot \dfrac{1}{r^2}$ betyder att $F \cdot r^2 = k$. Multiplicera båda sidor om likhetstecknet med r^2 och förkorta.

4522 De växer lika snabbt!

4523 $y = 2^x$ växer snabbast när x blir allt större. Notera att $y = x^2$ har större funktionsvärden än $y = 2^x$ när x är mellan $x = 2$ och $x = 4$!

4524 $H = k \cdot \dfrac{1}{r}$. Multiplicera med r på båda sidor: $H \cdot r = k$

4525 Maximalt tillåtna intensiteten är $I_{max} = k \cdot 1/2{,}6^2 \approx k \cdot 0{,}148$. På avståndet 10,0 meter är intensiteten $I = k \cdot 1/10^2 =$ $= 0{,}01 \cdot k$. Andelen av den tillåtna intensiteten är då

$$\frac{I}{I_{max}} = \frac{0{,}01k}{0{,}148k} \approx 0{,}0676,$$

ca 6,76 %.

4526 a) $f(x) = x + 4$ och $g(x) = 2\sqrt{x} + 4$

b) $f(x) - g(x) = x - 2\sqrt{x}$

c) $f(0{,}5) - g(0{,}5) =$ $= 0{,}5 - 2\sqrt{0{,}5} \approx -0{,}91$

BLANDADE UPPGIFTER

1 Graf nummer 2 och 3. För dem gäller att ”för varje x-värde finns endast ett y-värde”.

2 Grafen börjar då $x = -1$ och slutar då $x = 3$, men markeringen säger att $x = 3$ inte ingår. Definitionsmängden är $-1 \leq x < 3$. Värdemängden är $1 \leq y < 4$.

3 a) Definitionsmängd: Alla $x \geq 0$. Värdemängd: Alla $y \geq 0$.

b) Definitionsmängd: Alla $x > 0$. Värdemängd: Alla tal $y > 0$.

c) Definitionsmängd: Alla reella tal x. Värdemängd: Alla tal $y \geq 0$.

d) Definitionsmängd: Alla reella tal x utom $x = 0$. Värdemängd: Alla tal $y > 0$

4 a) $f(x) = 5x$ och $p(x) = 1{,}05x - 4$ är linjära samband.

b) $g(x) = 10^2 \cdot 1{,}1^x$ är en exponentialfunktion.

c) $h(x) = 2\,000 \cdot x^5$ är en potensfunktion

d) $f(x) = 5x$ är en proportionalitet.

5 a) $f(2) = -1$

b) $f(-2) = -1$

c) $f(a) = 3 - a^2$

d) $f(2a) = 3 - (2a)^2 = 3 - 4a^2$

6

b	*A*
1	2,5
2	4,5
3	6,5
4	8,5
5	10,5

7 $y = 3x + 2$

8 a) $k = \frac{2}{3}$ b) $k = -2$

c) $k = \frac{4}{7}$ d) $k = \frac{1}{18}$

9 Nej. Kvoten av pris och vikt är inte densamma för båda vikterna.

10 a) $f(2) = 2$

b) $f(0) = -2$

c) $f(x) = 2$ har lösningarna $x = -2$ och $x = 2$

d) $f(x) = -1$ har lösningarna $x = -1$ och $x = 1$

11 a) $f(0{,}5t) = (0{,}5t)^2 - 3 \cdot (0{,}5t) = 0{,}25t^2 - 1{,}5t$

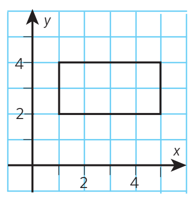
b) $f(2t) = (2t)^2 - 3 \cdot (2t) = 4t^2 - 6t$

12 a) $t = 6$ b) $t = 4$

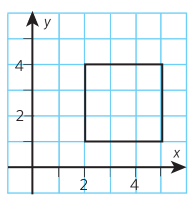
13 a) $f(0) = -15$

b) $v = 5$

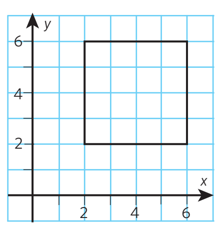
14 a)



b)



c)



15 $2y - 3x - 3 = 0$

16 a) $k = 3$, $m = -2$

b) $k = -\frac{1}{5}$, m =3

17 $y = \frac{1}{3}x + 4$

18 $y = -0{,}6x + 5$

19 $x = 5$ och $y = -0{,}5$

20 a) Kvadrant 4

b) Kvadrant 1 och kvadrant 3

c) Kvadrant 1 och kvadrant 3

d) Kvadrant 2

21 $y = 27\,500 \cdot 1{,}025^t$

22 a) $K = 5\,000 \cdot 1{,}02^t$

b) $K(3) = 5\,000 \cdot 1{,}02^3$ kr $\approx$ $\approx 5\,306$ kr

23 $(3, -3)$, $(-3, 3)$ och $(-3, -3)$

24 $y = -3$

25 a) $f(x)$ växer snabbast eftersom k-värdet är störst.

b) $f(-2) = -1$ och $g(-2) = 1$. $g(-2)$ är störst.

c) $g(x) = 22$ ger $x = 12$

d) $f(x) = g(x)$ ger $x = 2$

26 Nej. Punkterna ligger inte på samma linje.

27 Om arean är 12 a.e. är t ex basen 6 och höjden 4. Andra hörn kan då vara $(3, -2)$ och $(9, -2)$.

28 $(7, 1)$, $(3, 5)$, $(1, 3)$ eller $(5, -1)$

29 a) $f(2) - g(2) = 11 - 0 = 11$

b) $f(a) - g(a) = 4a + 3$

c) $f(2a) - g(3a) = (4a^2 + 6a + 1) - (9a^2 - 3a - 2) = -5a^2 + 9a + 3$

d) $f(a + 1) - g(a + 1) = (a + 1)^2 + 3(a + 1) + 1 - (a + 1)^2 + (a + 1) + 2 = 4a + 7$

30 $p(3) = 0{,}5 \cdot 3^3 - 2 \cdot 3 + 1 = 8{,}5$ och $p(-2) = 0{,}5 \cdot (-2)^3 - 2 \cdot (-2) + 1 = 1$, så $p(3) - p(-2) = 7{,}5$

31 $f(x)=\frac{k}{x+12}$. $f(0)=2$ ger

$k=24$, så $f(x)=\frac{24}{x+12}$

32 Proportionalitetskonstanten $k = 2{,}8/20$ cm/N $= 0{,}14$ cm/N

Om kraften är 65 N blir spiralfjädern $(65 \cdot 0{,}14)$ cm $= 9{,}1$ cm längre.

33 a) $(2, -2)$, $(5, -1)$ och $(4, -3)$

b) $(-2, 2)$, $(-5, 1)$ och $(-4, 3)$

c) $(2, 2)$, $(1, 5)$ och $(3, 4)$

34 a) $x = -1$ och $x = 1$

b) $x < 0{,}5$

c) $x = 0$ och $x = 2$

d) $0 < x < 2$

35 a)

t	$g(t)$
1	5
2	9
3	13
4	17

b) $g(t) = 4t + 1$

36 a) $x=-\frac{1}{3}$

b) $4a - 4 = 10a - 3$. $a=-\frac{1}{6}$

37 $x = -1$ och $x = 4$

38 $y = 0{,}95x + 5357{,}5$

39 a) $g(4) = 7{,}8125$

b) -29

c) $x = \pm 50$

d) $x = 5$

40 a) $A(x) = x \cdot (100 - x)$

b) $x = 50$ m, inhägnaden blir en kvadrat.

41 $f(x) = k \cdot x^2$

$f(4) = k \cdot 4^2 = 8$ ger $k = 0{,}5$.

$f(x) = 0{,}5 \cdot x^2$

42 a) $y = 50 \cdot 1{,}05^t$

b) $y = 50 \cdot 0{,}98^t$

c) 6 % är 3 djur, så $y = 50 + 3t$

d) 4 % är 2 djur, så $y = 50 - 2t$

43 a) $f(t)$ visar en linjär ökning från 20 °C. Temperaturen ökar med 15 °C per minut. $g(t)$ är en exponentiell modell som startar på 20 °C. Temperaturen ökar med 27,53 % per minut.

b) Grafritande räknare ger $t > 8$ minuter.

c) $f(t)$ har definitionsmängden $0 \le t \le 18{,}7$ minuter.

$g(t)$ har definitionsmängden $0 \le t \le 11{,}1$ minuter.

44 Båda funktionerna växer lika snabbt. Sätter vi $f(x) = g(x)$ får vi ekvationen $0 = -5$ som saknar lösning.

45 Hur stor ska räntesatsen vara för att jag ska ha 2 300 kronor på kontot efter 5 år om jag i dag sätter in 2 000 kronor?

46 a) $y=-\frac{d}{c}$

b) $x=-\frac{b}{a}$

c) $k=-\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$, $b \neq 0$, $c \neq 0$

47 a) $x \cdot 1{,}025^4 = 8\,000$ ger $x = 7\,248$ (kr)

b) $K(x) = 7\,248 \cdot 1{,}025^x$

48 $h(t) = C \cdot 0{,}82^t$

$h(6) = 304$ ger $304 = C \cdot 0{,}82^6$. Då är $C = 1\,000$ och funktionen är alltså $h(t) = 1\,000 \cdot 0{,}82^t$

49 $p(z) = C \cdot z^{0{,}8}$

$P(12) = 36{,}5$ ger $36{,}5 = C \cdot 12^{0{,}8}$. Då är $C = 5$ och funktionen är alltså $p(z) = 5 \cdot z^{0{,}8}$

50 a) Halveringstiden är 30 år, så förändringsfaktorn är 0,5 på 30 år. Då är den $0{,}5^{1/30}$ på ett år. $0{,}5^{1/30} \approx 0{,}977$, vilket betyder en minskning med 2,3 % per år.

b) På 31 år är förändringsfaktorn $(0{,}5^{1/30})^{31} \approx 0{,}489$. Således har 51,1 % sönderfallit.

c) $A(t) = 2\,000 \cdot 0{,}5^{t/30}$, om aktiviteten var 2 000 Bq från början.

d) Ekvationen $A(t) = 1\,500$ löses grafiskt. $1\,500 = 2\,000 \cdot 0{,}5^{t/30}$ har lösningen $t \approx 12{,}5$ (år).

51 Lösningarna är $x = 0$ och $x = 2$. En produkt har värdet 0 när någon av faktorerna är 0.

52 $k(2x + 2) + m = 2x + 2$

$2kx + 2k + m = 2x + 2$

Koefficienten framför x ska vara 2, så $2k = 2$. Det ger $k = 1$. Konstanttermerna i vänsterledet är $2k + m = 2 + m$ om $k = 1$.

I högerledet är konstanttermen 2, så $2 + m = 2$. Då måste $m = 0$. Alltså är $k = 1$ och $m = 0$.

53 $f(a^2) = 3a^2 + 5$

$g(a^2 - 2) = 4(a^2 - 2) - 3 =$
$= 4a^2 - 11$

$3a^2 + 5 = 4a^2 - 11$ ger $a^2 = 16$. Då är $a = \pm 4$

54 $f(2a) - f(a + 1) =$

$$=\frac{-2a}{3}+1-\left(\frac{-(a+1)}{3}+1\right)=$$

$$=\frac{-2a}{3}+\frac{a+1}{3}=\frac{-a+1}{3}$$

55 $(1, -5)$, $(3, -5)$ och $(0, 0)$

56 Linjärt samband: $y = 10 + 15x$

Exponentialfunktion: $y = 10 \cdot 2^x$

57 När x ökar med 1 ökar y procentuellt med 1,2 / 3 = 0,4 = = 40 %. Förändringsfaktorn är 1,4 och då är funktionen
$y = 3 \cdot 1{,}4^x$ $b = y(4) \approx 11{,}5$
Alternativ lösning $y = C \cdot a^x$
$3 = C \cdot a^0 \Rightarrow C = 3$
$4{,}2 = 3 \cdot a^1$ $a = \dfrac{4{,}2}{3} = 1{,}4$
$y = 3 \cdot 1{,}4^x$ $b = y(4) \approx 11{,}5$

58 $f(x) = k \cdot \dfrac{1}{x^2}$
$f(1) = 4$ ger $k = 4$ så funktionen är $f(x) = \dfrac{4}{x^2}$
$f(5) = \dfrac{4}{25}$, dvs. $a = \dfrac{4}{25}$

59 a) $f(g(x)) = 2 - g(x) =$
$= 2 - (3x - 1) = 3 - 3x$
b) $g(f(x)) = 3 \cdot f(x) - 1 =$
$= 3(2 - x) - 1 = 5 - 3x$
c) $x = 1$
d) $3 - 3x = 5 - 3x$ saknar lösning. Förenklar man ekvationen får man 3 = 5, oavsett vilket x man sätter in.

60 a) $G(t) = 350\,000 + 20\,000t$
b) $D(t) = 320\,000 \cdot 1{,}06^t$
c) De första åtta åren tjänar Gustav mer än David, men sen är Davids lön högre.

61 $L(7) = a(1 - 0{,}97^7) \approx$
$\approx a \cdot 0{,}192 = 4{,}2$ cm. Det ger att $a \approx 21{,}9$ cm. Efter lång tid kommer längden L att närma sig 21,9 cm, som alltså är plantans maximala längd.

62 (2, 2)
VL: $2^3 \cdot 2^{-2} = 2$
HL: $6 - 2 \cdot 2 = 2$
VL = HL, vilket skulle visas.

63 $k = 0$ och $k = 1$ ger 0 skärningspunkter. $k = 2$ ger 1 skärningspunkt. Linjen nuddar vid funktionen $y = x^2$ i en enda punkt (linjen är en *tangent*). $k = 3$ ger 2 skärningspunkter.

KAPITELTEST

1 AB = CD = 5 l.e.,
AD = BC = 3 l.e.

2 T ex (–1, –2) och (2, 1). Sambandet mellan x- och y-koordinaterna för punkterna på linjen är $y = x - 1$.

3 a) $f(3) = -0{,}5$
b) $x = \dfrac{4}{1{,}5} = \dfrac{8}{3}$
c) $f(2a) - f(3) =$
$= 4 - 1{,}5 \cdot 2a - (-0{,}5) =$
$= 4{,}5 - 3a$

4 a) Avtagande
b) Växande
c) Växande. $y = 2 \cdot 0{,}8^{-x} =$
$= 2 \cdot \left(\dfrac{1}{0{,}8}\right)^x = 2 \cdot 1{,}25^x$.
Förändringsfaktorn > 1.
d) Avtagande.
$y = 3 \cdot 1{,}2^{-x} = 2 \cdot \left(\dfrac{1}{1{,}2}\right)^x$.
Förändringsfaktorn < 1.

5 a) $f(0) = -2$. Om $x = 0$ är $y = -2$ på grafen. Grafen skär y-axeln där $x = 0$, och där har grafen y-koordinaten $y = -2$.
b) $f(x) = 0$ innebär att grafens y-koordinater är 0, och det är skärningspunkterna med x-axeln. Lösningen är $x = -1$ eller $x = 2$.

6 a) 2 och 3 b) 1
c) 4 d) 3

7 $k = \dfrac{2}{7}$

8 a) $y = -\dfrac{x}{2} + 3$
b) $y = 2x + 7$

9 $p = 3$

10 a) $y = 110\,000 \cdot 0{,}95^t$
b) $y = 110\,000 - 6\,000t$

11 $g(x) = k\sqrt{x}$
$g(12) = 6$ så $6 = k\sqrt{12}$, alltså är
$k = \dfrac{6}{\sqrt{12}} = \dfrac{6}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = \sqrt{3}$
$g(x) = \sqrt{3} \cdot \sqrt{x} = \sqrt{3x}$

12 a) Definitionsmängd: x kan vara alla reella tal. Värdemängd: $f(x) \geq 4$. Det minsta värdet som funktionen kan anta är 4, om $x = 0$.
b) Definitionsmängd: x kan vara alla reella tal utom $x = -5$. Värdemängd: Alla reella tal utom $y = 0$.
c) Definitionsmängd: $x \geq 2$. Värdemängd: $g(x) \geq 0$.
d) Definitionsmängd: x kan vara alla reella tal. Värdemängd: $p(x)$ kan aldrig vara negativt eller 0, så $p(x) > 0$.

13

x	y
1	–2
3	2
5	6
10	16

Sambandet är $y = 2x - 4$

14 Ja, kvoten pris/vikt är densamma.

15 $g(f(x)) = 3(x^2 - 2) - 186 =$
$= 3x^2 - 192$
$3x^2 - 192 = 0$ ger $x^2 = 64$,
$x = \pm 8$

16 a) $p(2a) - q(a) =$
$= 1 - 2a - (1{,}2a - 3) =$
$= 4 - 3{,}2a$

b) $p(0{,}02a^3) = 1 - 0{,}02a^3$

$q(0{,}01a^3) = 0{,}012a^3 - 3$

$1 - 0{,}02a^3 - (0{,}012a^3 - 3)$
$= 4 - 0{,}032a^3 = 0$ har lösningen $a = 5$

17 Vattnets kokpunkt som funktion av höjden över havsytan är en avtagande exponentialfunktion. $T = C \cdot a^h$, där T är kokpunkten och h höjden över havet.

$T(0) = 100$ ger $C = 100$.

$T(4800) = 100 \cdot a^{4800} = 84$, så $a^{4800} = 0{,}84$ och $a = (0{,}84)^{1/4800}$

$T(3110) = 100 \cdot (0{,}84)^{3110/4800} =$
$= 89{,}3$ dvs. 89,3 °C

18 a) Ökningen är 2 500 stycken, vilket är 20,8 % på 10 år. Förändringsfaktorn på 10 år är 1,208 och då är förändringsfaktorn $1{,}208^{1/10} \approx 1{,}019$ per år. Ökningen är 1,9 % per år.

Antalet vildsvin efter 1995 är då $N = 12\,000 \cdot 1{,}019^t$, där t är tiden i år efter 1995.

b) Köttet har minskat $(215–178) / 215 = 0{,}172 =$
$= 17{,}2$ % på 10 år. Det motsvarar en förändringsfaktor på 0,828 på 10 år, och alltså $0{,}828^{1/10} \approx 0{,}981$ per år. Det innebär en minskning med 1,9 % per år.

Priset $P = 215 \cdot 0{,}981^t$, där t är antal år efter 1995.

c) När antalet vildsvin ökar, ökar också tillgången på vildsvinskött och då sjunker ofta priset. I modellen minskar priset på vildsvinskött med lika många procent som antalet vildsvin ökar.

19 a) Höjden bestäms av $y(0) = 4$. Basen bestäms av lösningen till $y = 0$, skärningspunkten med x-axeln. Den x-koordinat där linjen skär x-axeln

är $x = \dfrac{4}{k}$. Triangelns area

är då $\dfrac{4 \cdot \frac{4}{k}}{2} = \dfrac{16}{2k}$. Arean är

12 a.e. om $k = \dfrac{16}{24} = \dfrac{2}{3}$

b) Höjden bestäms av $y(0) = 8k$. Basen bestäms av lösningen till $y = 0$, skärningspunkten med x-axeln. Lösningen till

$y = 0$ är $x = \dfrac{8}{k}$. Då är arean

$\dfrac{8k \cdot \frac{8}{k}}{2} = 32$. Du kan förkorta bort k. Alltså är arean oberoende av k. Arean är 32 a.e.

DISKUTERA, RESONERA OCH MODELLERA

S. 145

a) 40 000/360 km ≈ 111 km

b) 1 minut är 1/60 grad.
1/60 av 111 km = 1 852 m

c) De ligger på samma längdgrad, men det är 1 grad och 47 min skillnad i breddgrad. Skillnaden motsvarar
$(111 + 47 \cdot 1{,}852)$ km ≈ 198 km.

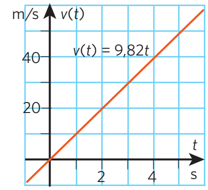
d) 1 knop = 1 nautisk mil per timme. Resan tar
107 / 15 h ≈ 7,13 h ≈
≈ 7 tim 8 min.

S. 197

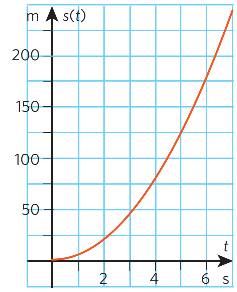
a)

t (s)	$s(t)$ (m)	$v(t)$ (m/s)
0	0	0
1	4,91	9,82
2	19,64	19,64
3	44,19	29,46
4	78,56	39,28
5	122,75	49,1

b)

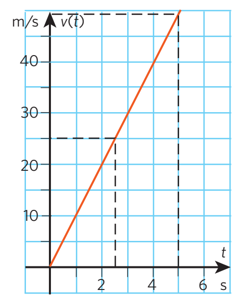


c)



d) Medelhastigheten är

$\dfrac{v(5)+v(0)}{2} = \dfrac{49{,}1+0}{2}$ m/s =
= 24,55 m/s



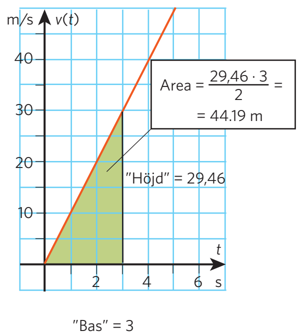
I en proportionalitet, t.ex. $v(t) = 9{,}82t$, hittar vi medelvärdet av två funktionsvärden genom att titta på funktionsvärdet för det t som ligger precis mitt emellan t-värdena för de två funktionsvärden för vilka vi vill beräkna medelvärdet.

I det här fallet är alltså medelvärdet av $v(5)$ och $v(0)$

$\dfrac{v(0)+v(5)}{2} = v(2{,}5)$

Mitt emellan $t = 0$ och $t = 5$ ligger $t = 2{,}5$

e)



Arean under grafen är en triangel, så vi börjar med att bestämma bas och höjd.

Om vi vill veta arean mellan $t = 0$ och $t = 3$ mäter vi 3 enheter längs t-axeln. Det är triangelns bas.

Höjden är funktionsvärdet. $v(3) = 29{,}46$ i figuren.

Triangelns area blir då

$$\frac{3 \cdot 29{,}46}{2} = 44{,}19$$

I täljaren multipliceras en hastighet med en tid, och produkten $v \cdot t$ är en sträcka. Alltså motsvarar arean under grafen en sträcka.

Jämför med tabellen, där $s(3) = 44{,}19$ meter!

Vill vi veta sträckan efter t sekunder. Triangeln har basen t och höjden blir $v(t)$.

Arean blir

$$\frac{t \cdot v(t)}{2} = \frac{t \cdot 9{,}82t}{2} = \frac{9{,}82t^2}{2}$$

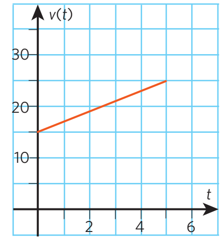
Dvs. samma uttryck som fallsträckan!

S. 198 KARIN

a)

t	$v(t)$
0	15
1	17
2	19
3	21
4	23
5	25

b)



c) Vid tiden $t = 5$ s har Karin hastigheten 25 m/s.

d) $s(5) = \left(15 \cdot 5 + \frac{2 \cdot 5^2}{2}\right) \text{m} = 100 \text{ m}$

Karin kör 100 m på 5 sekunder. Hennes medelhastighet är 100 / 5 m/s = 20 m/s.

S. 198 BOLLEN

a) och b) Bollen startar med 2 m/s, och efter 7 sekunder har den hastigheten 4,8 m/s.

c) Efter 10 sekunder har bollen hastigheten $(2 + 0{,}4 \cdot 10)$ m/s = = 6 m/s. Medelhastigheten under de första 10 sekunderna är

$$\frac{v(0) + v(10)}{2} = \frac{2+6}{2} \text{m/s} = 4 \text{ m/s}$$

Värdena kan också utläsas ur diagrammet.

d) Linjens lutning är accelerationen, 0,4 m/s^2

e) Under 10 s hinner bollen $(4 \cdot 10)$ m = 40 m

S. 201

a) Närmaste heltal är $x = 7$. Lösningen till ekvationen är $x \approx 6{,}562$

x	$4 + \sqrt{x}$
7	6,64575
6,64575	6,577935
6,577935	6,564749
6,564749	6,562177
6,562177	6,5616746
6,5616746	6,56157658

b) Starta med närmaste heltal, dvs. $x = 2$. Lösningen till ekvationen är $x \approx 2{,}227$

c) Börja med att skriva ekvationen $x = 1 + \frac{8}{\sqrt{x^3}}$. Starta med $x = 3$.

Lösningen till ekvationen är $x \approx 2{,}752$. Många iterationssteg krävs.

Kapitel 5

5101 a) 15 katter b) 31 råttor
c) 7 katter d) 33 %

5102 a) katt b) 8 st
c) 2/15 d) 25 % fler

5103 a) Medelvärde 8,4 p, medianvärde 7 p och typvärde 7 p.
b) Medelvärde 8,3 p, medianvärde 8 p, typvärde finns inte.

5104 a) 5 dagar
b) 3,4 dagar
c) 4 dagar

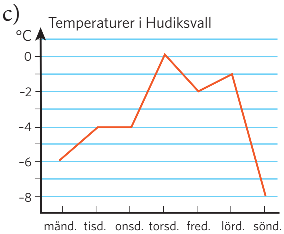
5105 a) 4 min
b) 6 min
c) De första 2 minuterna, 5 m/s
d) 1,5 m/s

5106 Medelpriset 3,90 kr, medianpriset 4 kr.

5107 a) 20 st
b) 15 %
c) Nej, vi vet inte hur många av abborrarna som är längre än 12 cm i klassen där längden varierar mellan 10 och 15 cm.

5108 a) 90 st
b) nyheter
c) 83 %
d) 50 %

5109 a) –4 °C
b) –3,6 °C
c)



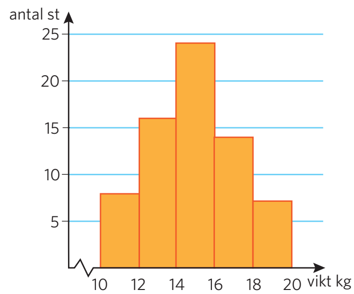
5110 21 år

5111 a) 10.00–17.00
b) ca 5,1 °C
c) ca 12,5 °C

5112 a) 77 %
b) 150 bilar

5113 a) 2,3 dm
b) 2 dm
c) 3 / 7 ≈ 43 %

5114 a) 39 barn
b) Sannolikt 36 barn
c)

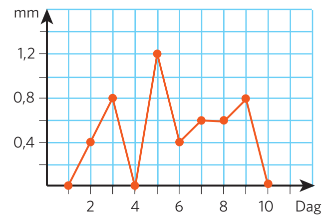


5115 a) 345 kr (minst)
b) Nej, det kommer nog flest vid lunch och middagstid.
c) Kim kontrollerade inte kön kontinuerligt utan bara var 5:e minut.

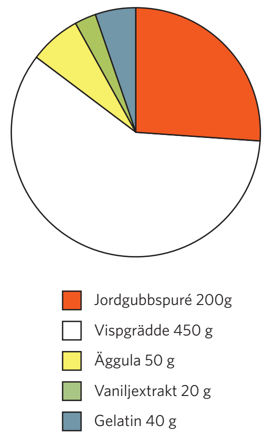
5116 a) *a* kan vara vad som helst, och $b = 3$.
$(2 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + a \cdot 3 + 3 \cdot 4 + b \cdot 5) / (10 + a + b) = 3$. När man löser ekvationen går *a* bort.
b) Nej, det går inte att bestämma.

5117 a) 19 %
b) 41 %. $(30 - 11)\ \% = 19\ \%$ svarade endast blått, och $(40 - 11)\ \% = 29\ \%$ svarade endast grönt. Det innebär att $(100 - 19 - 29 - 11)\ \% = 41\ \%$ svarade något annat än blått eller grönt.

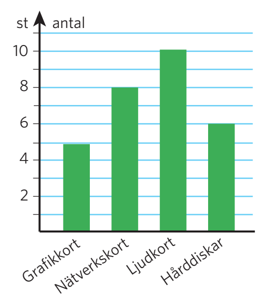
5118 b)



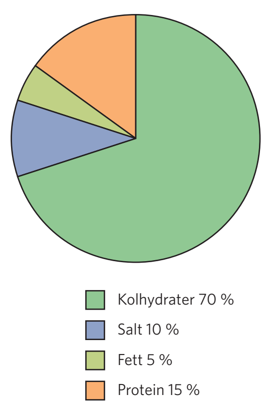
5119



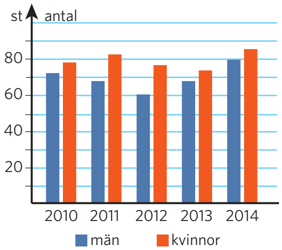
5120



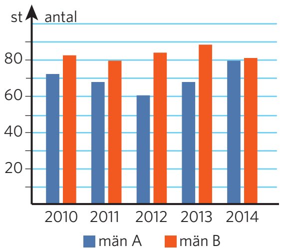
5121



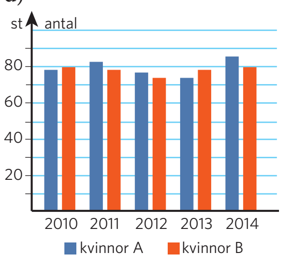
5122 b)



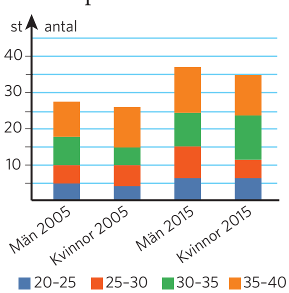
c)



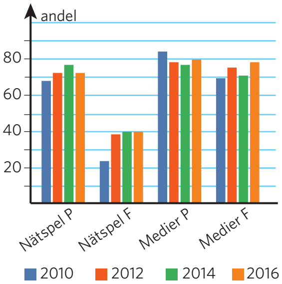
d)



5123 a) Flera alternativ är möjliga för bra presentation, till exempel:



5124 a) T.ex.:



b) År 2016 var det 76 % av pojkarna som ägnade sig åt nätspel, och 80 % som ägnade sig åt sociala medier. Om 60 % ägnade sig åt både och, måste det vara 16 % som bara ägnar sig åt nätspel, och 20 % som bara ägnar sig åt sociala medier.

c) Enhet: %

Nätspel: 40

Medier: 78

Både och: x

Bara nätspel: $40 - x$

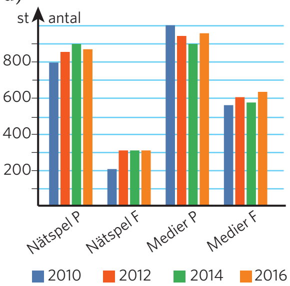
Bara medier: $78 - x$

Summa: $118 - x$

Varken nätspel eller medier:
$100 - (118 - x) = x - 18$,
$18 \leq x \leq 40$

Bara nätspel: $(40 - x)$ som är som störst då x är som minst, dvs. då $x = 18$, vilket ger $40 - 18 = 22$. Den största möjliga andelen är 22 %.

d)



År	Nät-spel P	Nät-spel F	Medier P	Medier F
2010	804	192	1008	560
2012	852	312	936	600
2014	924	320	912	576
2016	888	320	960	624

5201 Diagrammet är vilseledande eftersom stapeln för 2018 inte bara är högre utan även bredare än stapeln för 2014.

5202 Diagrammet är vilseledande på grund av att y-axeln inte börjar vid noll.

5203 Diagrammet är vilseledande på grund av att y-axeln inte börjar vid noll. Till exempel ser boendetrivseln ut att var 5 gånger större i innerstaden än i närförort, men tittar man på siffrorna så ser man att det inte alls är så.

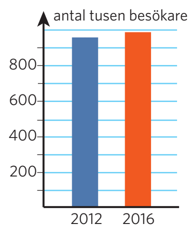
5204 Diagrammet är vilseledande på grund av att y-axeln inte börjar vid noll. Stapeln för 40 000 kr är mer än dubbelt så hög som stapeln för 20 000 kr.

5205 51 % av de som kör för fort är 20–30-åringar. Detta kan bero på att de flesta bilförare är mellan 20 och 30 år och behöver inte bero på att 20–30-åringar kör fortare än andra.

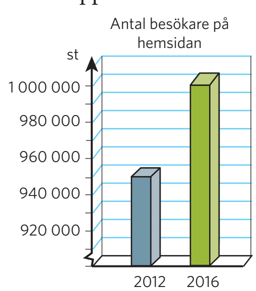
5206 a) Det övre diagrammet är vilseledande. Temperaturvariationen ser betydligt större ut än den egentligen är beroende på att *y*-axeln inte börjar vid 0.

b) Det första diagrammet visar en mer dramatisk ökning, och är bra för att till exempel illustrera klimatförändringar. Det andra diagrammet har inte en lika drastisk ökning, och kan vara bra att jämföra med och för att bättre kunna se en trend i temperaturstegringen.

5207 a)



b) 5 % ökning motsvarar 47 500 fler besökare, så det totala antalet besökare var knappt 1 000 000.



5301 a) 50 elever

b) 50 flickor

c) 30 pojkar

5302 a) 620 personer

b) T.ex. ”Hur gammal är du?” eller ”Tycker du om bananer?”

5303 Exemplevis någon situation där fördelningen mellan olika kategorier inte är känd.

5304 a) 50 personer, det vill säga 25 %.

b) 1/3 c) 1/4

d) 50 / 160 ≈ 31 %

5305 a) 12 personer

b) Om bortfallet svarat att det var bra:
(32 + 12) / 80 = 0,55. 55 % tyckte det var bra, 45 % att det var dåligt.

Om bortfallet svarat att det var dåligt:
(36 + 12) / 80 = 0,60. 60 % tyckte det var dåligt, 40 % att det var bra.

5306 Nej. På 5 %-nivån är värden på stickprov signikanta om sannolikheten för ett sådant värde eller lägre är högst 2,5 %, givet att nollhypotesen gäller.

5307 ja

5308 Ja, felmarginalens storlek påaverkas av hur stor procentandelen för stödet till partiet är. En procentandel kring 50 ger störst felmarginal.

5401 a) starkt negativ, b) svagt positiv, c) svagt negativ, d) ingen, e) starkt positiv

5402 En starkt negativ korrelation.

5403 a) För inte P är $\frac{4}{5}$ också Q.

För P är $\frac{5}{6}$ också Q.

Positiv korrelation.

b) För både inte P och P är $\frac{1}{3}$ inte Q. Ingen korrelation.

5404 Översta raden: 57, 9. Undre raden: 3.

5405 Fram till 1970-talet ökade rökningen bland kvinnor kraftigt. Lungcancer är ofta en följd av många års rökning. Många av de kvinnor som nu får sjukdomen började röka för länge sedan.

5406 I ungdomsidrott tävlar man i allmänhet i åldersklasser, baserade på födelseår. De som är födda tidigt på året har genomsnittligt sätt kommit längre i sin fysiska utveckling, vilket gynnar dem i tävlingar.

5407 En rimlig förklaring är att det både äts mer glass och badas mer utomhus när det är varmt ute och att mycket bad utomhus tyvärr leder till drunkningstillbud. En tredje variabel påverkar alltså de två övriga.

BLANDADE UPPGIFTER

1 a) Anton gjorde 100 försök.

b) 54%

c) 3

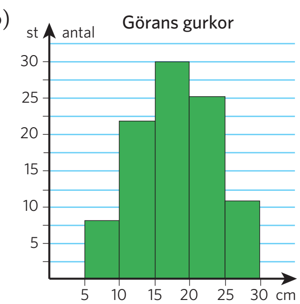
d) Medelvärdet är 3,4, medianvärdet är 3.

2 22 917 kr

3 Typvärdet är 2 år, medianvärdet är 2 år och medelvärdet är 2,3 år.

4 a) Histogram

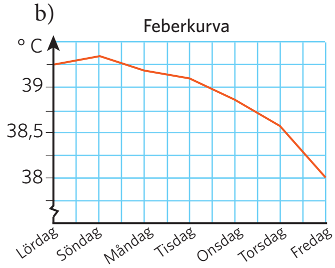
b)



c) $(8 \cdot 7{,}5 + 22 \cdot 12{,}5 +$
$+ 30 \cdot 17{,}5 + 25 \cdot 22{,}5 +$
$+ 11 \cdot 27{,}5) / 96 \approx 18$ cm

5 a) 39,0 °C

b)



6 30 kr

7 36 bilder

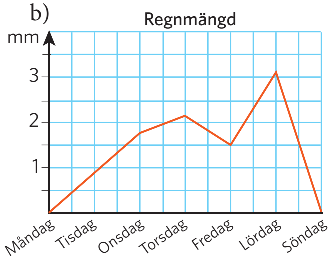
8 a) Anna 22 yngel, Ellen 44 yngel och Vera 54 yngel.

b) Vera fick x yngel, Ellen fick $(x - 1)$ yngel och Anna fick $(x - 2)$ yngel.

Medelvärdet: $(x + x - 1 +$ $+ x - 2) / 3 = x - 1$. medelvärdet är alltså lika med det antal yngel som Ellen fått. VSV.

9 a) 1,3 mm

b)



10 Eftersom den lodräta axeln inte börjar vid 0 ser skillnaden mellan klasserna större ut än den egentligen är.

11 a) 1 st

b) 18 %

c) 8 procentenheter

12 a) 38, 52 och 58 år

b) 52 år

c) Medelåldern är 35,7 år och medianåldern är 30,5 år.

13 a) 7 b) 7 c) 23,4 %

14 Talen kallas x, $x + 1$, $x + 2$, $x + 3$ och $x + 4$. Medelvärdet är $(x + x + 1 + x + 2 + x + 3 +$ $+ x + 4) / 5 = (5x + 10) / 5 =$ $= x + 2$. VSV.

15 a) 401,9 g b) 24 %

16 a) 8 600 personer

b) Antalet ”ja”-röstande är mellan 3 651 och 5 027 personer.

17 Nej, diagrammet är vilseledande beroende på att den lodräta axeln inte börjar på 0.

18 Metod 1 är inte bra, eftersom eleverna som fått bäst resultat på senaste provet är förmodligen de som är mest nöjda för tillfället. Metod 2 är inte bra, eftersom han då inte får veta något om vad pojkarna tycker. Metod 3, ett helt slumpmässigt urval, är bäst i detta fall.

19 a) Det är tänkbart att hur väl man trivs på arbetet är beroende av vilken yrkeskategori man tillhör. Därför är det mindre bra att inga läkare fick enkäten.

b) Som mest kan 37 sjuksköterskor vara nöjda och 3 missnöjda, som minst kan 12 sjuksköterskor vara nöjda och 28 missnöjda.

c) Stratifierat urval. Det är 1/3 läkare och 2/3 sjuksköterskor i personalgruppen, så 5 enkäter bör gå till läkare och 10 enkäter bör gå till sjuksköterskor.

KAPITELTEST

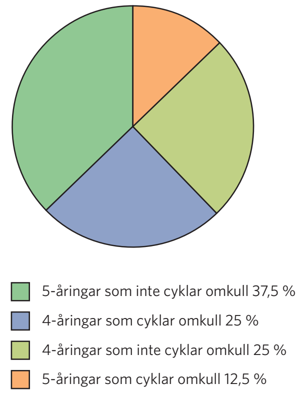
1 a) Ungefär 13 km.

b) Den blå linjen.

c) Georg tar endast en paus, den är 1 timme lång.

d) Under de två första timmarna.

2



3 Medianvärdet är 21 år och medelvärdet är 24 år. När en person avviker starkt ifrån gruppen, som här lärarens ålder, kan medianvärdet ge en bättre uppfattning än medelvärdet om åldrarna i gruppen.

4 Arams diagram är mest lämpligt. Den lodräta axeln i Lisas diagram är kapad.

5 Rita samma diagram som i uppgiften men med obruten vertikalaxel.

6 a) 497 kr b) 849 kr

c) 638 kr

7 a) 92 % b) 90 %

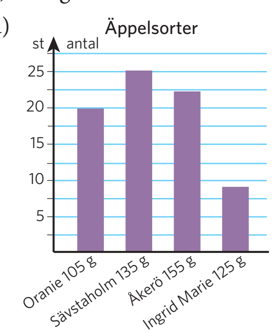
c) 88 % d) 30 %

8 a) 75 äpplen

b) 132 g

c) 135 g

d)

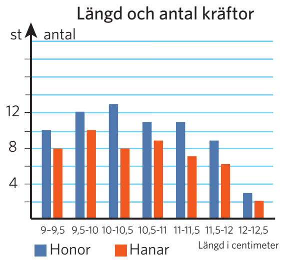


9 a) 10,5 cm

b) 10,0–10,5 cm

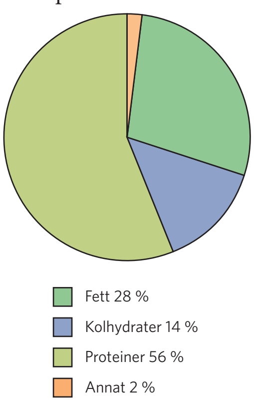
c) Totalt sett finns det lika många kräftor med längden 9,5–10,0 cm som de med längden 10,0–10,5 cm, alltså finns inget typvärde.

d) 64,4 %

e) 

10 6 år

11 28 % fett, 14 % kolhydrater och 56 % proteiner.



12 Typvärdet 1 tim, medianvärdet 1 tim och medelvärdet 1,2 tim. Alltså är typvärdet eller medianvärdet det mest fördelaktiga värdet.

13 a) Diagrammet visar att 149 män och 117 kvinnor sportade.

149 / 0,52 män ≈ 287 män totalt, 117 / 0,55 kvinnor ≈ ≈ 213 kvinnor totalt.

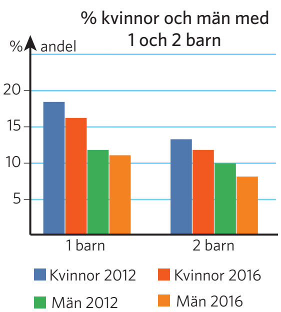
$$\frac{149+117}{287+213} \approx 53{,}2\,\%$$

b) <u>Gång</u>: procentuellt sett fler kvinnor.

<u>Cykling</u>: män 29/287 ≈ ≈ 10,1 %, kvinnor 25/213 ≈ ≈ 11,7 %, procentuellt sett fler kvinnor.

<u>Golf</u>: män 36/287 ≈ 12,5 %, kvinnor 31/213 ≈ 14,6 %, procentuellt sett fler kvinnor.

<u>Badminton</u>: män 14/287 ≈ ≈ 4,9 %, kvinnor 11/213 ≈ ≈ 5,2 %, procentuellt sett fler kvinnor.

14 a) 

b) Nej, det var 18 %.

c) Anta att det var 100 kvinnor och 100 män. Då var det 12 kvinnor och 8 män, dvs. totalt 20 stycken, som hade 2 barn år 2016. 12 av dessa 20 var kvinnor, så svaret blir ”Ja”.

d) 20 / 200 = 10 %

e) 12 / 20 = 60 %

15 Negativ korrelation i a) och c), positiv i d), ingen korrelation i b).

16 Vi antar att 25 % av bortfallet var positivt inställt. Det motsvarar 10 personer. Totalt var (0,60 · 360 + 10) personer = = 226 personer positivt inställda. Andelen är 226 / 400 = 56,5 %.

17 Upprepade körningar ger värden mellan 0,06 och 0,08, alltså större än 0,05, men mindre än 0,1.

Kapitel 6

6101 a) 0,743 b) 0,921
c) 0,364 d) 2,747

6102 a) 1 b) 0
c) 0,707 d) 0,707

6103 a) $\sin v = 0{,}8$ $\cos v = 0{,}6$

b) $\sin v \approx 0{,}514$
$\cos v \approx 0{,}857$

6104 a) $\tan v = \dfrac{8}{7}$ $\tan u = \dfrac{7}{8}$

b) $\tan v \approx 0{,}474$
$\tan u \approx 2{,}108$

6105 a) 0,75 b) 0,75

6106 a) $a = 17\sin v$

b) $a = \dfrac{5}{\cos v}$

c) $a = x \cdot \tan v$

d) $a = \dfrac{x}{\tan v}$

6107 a) $\dfrac{12}{\sin 22^\circ} \approx 32$ (cm)

b) $23 \cdot \sin 34^\circ \approx 12{,}9$ (cm)

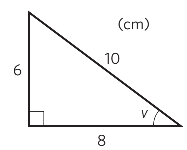
6108 a) $x = \dfrac{13}{\tan 37^\circ} \approx 17{,}3$ (cm)

b) $18 \cdot \tan 44^\circ \approx 17{,}4$ (cm)

6109 a) $5\sin 24^\circ \approx 2{,}03$ (cm)

b) $5\cos 24^\circ \approx 4{,}57$ (cm)

6110 Pythagoras sats ger att den korta kateten är 6 cm.



$\sin v = 0{,}6$ $\tan v = 0{,}75$

6111 $\tan 80° \approx 5{,}67$, $\tan 85° \approx 11{,}4$, $\tan 89° \approx 57{,}3$, $\tan 89{,}999° \approx$ $\approx 57\,300$, $\tan 90° = \dfrac{\sin 90°}{\cos 90°}$.
sin v närmar sig 1 och cos v närmar sig 0 när vinkeln närmar sig 90°, så kvoten, tan v, blir större och större.

6112 $\sin v = \cos(90 - v)$

v	sin v	cos v
10	0,174	0,985
20	0,342	0,940
30	0,5	0,866
40	0,643	0,766
50	0,766	0,643
60	0,866	0,5
70	0,940	0,342
80	0,985	0,174
90	1	0

6113 Vinkeln mellan den lodräta delen och den avbrutna delen av flaggstången kallar vi för v. $\sin v = \dfrac{\sqrt{21}}{5}$. Den andra spetsiga vinkeln kallar vi för u. $\sin u = 0{,}4$. $\sin 90° = 1$.

6114 Den sträcka Elin färdas och avståndet till fyren beskriver en likbent triangel där de lika sidorna är 400 m. Elin har färdats $400 \cdot \cos 40° \cdot 2 \approx 613$, dvs. 613 m.

6115 Den minsta vinkeln står mot den kortaste sidan.
$\tan^{-1}\left(\dfrac{2{,}9}{5}\right) \approx 30{,}1°$

6116 a) $u = \sin^{-1}\left(\dfrac{4}{5}\right) \approx 53{,}1°$
b) $u = \cos^{-1}\left(\dfrac{3}{5}\right) \approx 53{,}1°$
c) $u = \tan^{-1}\left(\dfrac{4}{3}\right) \approx 53{,}1°$

6117 a) 42° b) 41° c) 9°

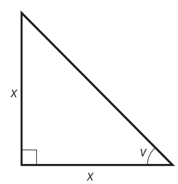
6118 $x = 4$, $y = 4 \cdot \tan 25° \approx 1{,}9$

6119 Vinklarna kallas v och u.
a) $v = \sin^{-1}\left(\dfrac{15}{17}\right) \approx 61{,}9°$,
$u = \sin^{-1}\left(\dfrac{8}{17}\right) \approx 28{,}1°$
b) $v = \cos^{-1}\left(\dfrac{8}{17}\right) \approx 61{,}9°$,
$u = \cos^{-1}\left(\dfrac{15}{17}\right) \approx 28{,}1°$
c) $v = \tan^{-1}\left(\dfrac{15}{8}\right) \approx 61{,}9°$,
$v = \tan^{-1}\left(\dfrac{8}{15}\right) \approx 28{,}1°$

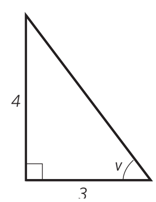
6120 Kateterna är x och $3/4x$.
$\tan^{-1}(3/4) \approx 36{,}9°$.
$\tan^{-1}(4/3) \approx 53{,}1°$.

6121 $\tan u = (2/5) = 0{,}4$,
$\tan v = (1/2) = 0{,}5$. Trianglarna är inte likformiga.

6122 a)



b)



6123 $v = \tan^{-1}(25/50) \approx 27°$

6124 Pythagoras sats ger hypotenusan $\sqrt{5}$
a) $\sin^{-1}(1/\sqrt{5}) \approx 26{,}6°$,
$\sin^{-1}(2/\sqrt{5}) \approx 63{,}4°$
b) $\cos^{-1}(2/\sqrt{5}) \approx 26{,}6°$,
$\cos^{-1}(1/\sqrt{5}) \approx 63{,}4°$
c) $\tan^{-1}(1/2) \approx 26{,}6°$,
$\tan^{-1}(2/1) \approx 63{,}4°$

6125 a) 5/3 b) 3/5
c) $5/3 \cdot 3/5 = 1$

6126 $v = \arctan\dfrac{1}{2} \approx 26{,}6°$

6127 a) $v = \tan^{-1}(30/180) \approx$
$\approx 9{,}4623 \approx 9{,}5°$
b) Granens höjd är h.
$h = 29 \cdot \tan 9{,}4623$ m $\approx$
$\approx 4{,}8$ m

6128 $u = \tan^{-1}(23{,}8/8{,}2) \approx 71°$,
$v = \tan^{-1}(8{,}2/23{,}8) \approx 19{,}0°$

6129 $\sin^{-1}(3{,}5/3{,}8) \approx 67°$. Ja, stegens längd räcker.

6130 $\cos v = (\sqrt{18}/\sqrt{20})$,
$\sin u = (\sqrt{18}/\sqrt{20})$,
men $u = 90 - v$. Alltså gäller att $\cos v = \sin(90 - v)$

6131 Höjden $h = \sqrt{3}$
a) $\sin 30° = 0{,}5$
$\cos 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
$\tan 30° = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$
b) $\sin 60° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos 60° = 0{,}5$
$\tan 60° = \sqrt{3}$

6132
$v = \arctan\dfrac{1}{3} + \arctan\dfrac{3}{5} \approx 49{,}4°$

6133 Balkens längd är b.
$\tan 30° = \dfrac{b}{2}\Big/0{,}5$
$b = \tan 30°$ m $\approx 0{,}58$ m.

6134 Triangelns toppvinkel är t och basvinkeln v.
Vi räknar som om det vore en rätvinklig triangel.
T.ex. kan vi beräkna
$v = \tan^{-1}(2{,}2/1{,}8) \approx 50{,}7°$
och
$t = \cos^{-1}(2{,}2/2{,}9) \approx 40{,}7°$.
$50{,}7° + 40{,}7° \neq 90°$, alltså är taket lite snett.

6135 Pythagoras sats ger att triangelns tredje sida är 12.

$\cos v = 12 / 15 = 4 / 5$
$\tan v = 9 / 12 = 3 / 4$

6136 Pythagoras sats ger hypotenusan $\sqrt{13}$.

$$\sin v = \frac{2}{\sqrt{13}}, \quad \cos v = \frac{3}{\sqrt{13}}$$

6137 a) $\sin v$ närmar sig 1, $\cos v$ närmar sig 0 och $\tan v$ blir oändligt stort.

b) $\sin v$ närmar sig 0, $\cos v$ närmar sig 1 och $\tan v$ närmar sig 0.

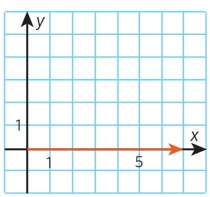
6138 Pythagoras sats ger $a^2 + b^2 = c^2$. Vinkeln mellan b och c kallas för v. Då gäller

$\sin v = a / c \Rightarrow a^2 = \sin^2 v \cdot c^2$
och $\cos v = b / c \Rightarrow$
$b^2 = \cos^2 v \cdot c^2$

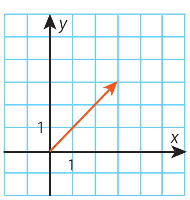
Då blir $\sin^2 v \cdot c^2 +$
$+ \cos^2 v \cdot c^2 = c^2$. Förkortning med c^2 ger $\sin^2 v + \cos^2 v = 1$.

Anmärkning: $(\sin v)^2 = \sin^2 v$

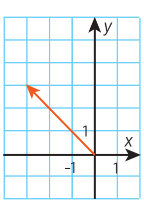
6201 a)



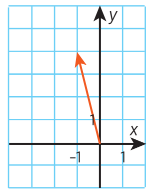
b)



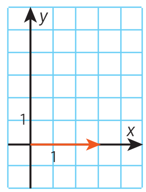
c)



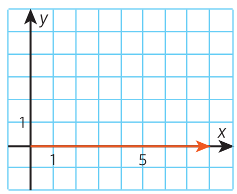
d)



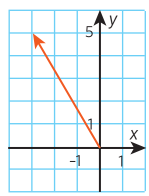
6202 a)



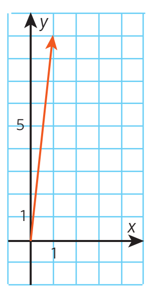
b)



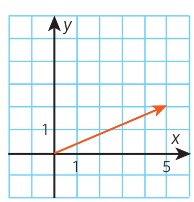
c)



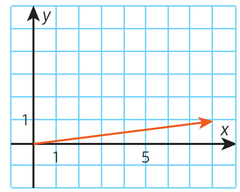
d)



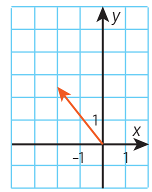
6203 a)



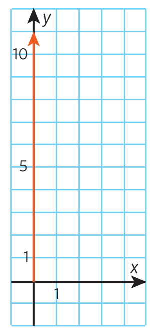
b)



c)



d)



6204 Skalärer: massa, tid, area och volym. Vektorer: kraft, hastighet

6205 a) 190 N b) 230 N
c) 160 N d) 125 N

6206 Vektorn $\vec{r} = (-7, -1)$

6207 $\vec{v}_1 = (3, 0)$
$\vec{v}_2 = (-4, 0)$
$\vec{v}_3 = (3, 1)$
$\vec{v}_4 = (-2, -3)$

6208 a) (3, 0) och (0, 2)
b) (4, 0) och (0, –2)
c) (–2, 0) och (0, 5)
d) (–6, 0) och (0, –2)

6209 $\vec{v} = 2\vec{e}_x + (-3)\vec{e}_y$

6210 a) (0, 13)
b) (12, –10)
c) (–17, –14)
d) (–9,8; 8,6)

6211 a) (–2, 0) och (0, –5)
b) $|\vec{u}| = \sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{34}$
$|\vec{v}| = \sqrt{(-2)^2 + (-5)^2} = \sqrt{29}$
(längdenheter)
c) $\vec{u} + \vec{v} = (1, 0)$ har längden 1 l.e.
d) $2\vec{u} - \vec{v} = (8, 15)$
har längden
$\sqrt{8^2 + 15^2} = \sqrt{289} = 17$
dvs. 17 l.e.

6212 $\sqrt{3^2 + a^2} = \sqrt{25}$ ger att
$a = \pm 4$

6213 a) $x = 8$ och $y = 8$
b) $x = 1$ och $y = 5$
c) $x = -3$ och $y = 8$
d) $x = \pm 3$ och $y = -5$

6214 a) $(-2 + b, a + 5) = (2, 6)$ ger att $b = 4$ och $a = 1$.
b) $(-2 - b, a - 5) = (1, -2)$ ger $a = 3$ och $b = -3$
c) $\sqrt{(-2)^2 + a^2} = \sqrt{13}$ ger
$a = \pm 3$
$\sqrt{b^2 + 5^2} = \sqrt{41}$ ger
$b = \pm 4$

6215 a) (24, 36) och (–2, –3)

6216 Längden av (6, 2) är
$\sqrt{6^2 + 2^2} = \sqrt{40}$. Talet
$k = \dfrac{1}{\sqrt{40}}$.

6217 a) $a = 0{,}5$ och $b = 2$
b) $a = 2$ och $b = 4$

6218 a) $\vec{a} = (0, 4)$ och $\vec{b} = (6, 0)$

$$\sin v = \frac{|\vec{a}|}{|\vec{c}|} = \frac{4}{\sqrt{6^2 + 4^2}} = \frac{4}{\sqrt{52}}$$

$$\cos v = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{c}|} = \frac{6}{\sqrt{6^2 + 4^2}} = \frac{6}{\sqrt{52}}$$

$$\tan v = \frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$v \approx 33{,}69°$

6219 Vektorn $\vec{u}$ har komposanterna (3, 0) och (0, 7), så vinkeln mellan vektorn och x-axeln är $\tan^{-1}\left(\dfrac{7}{3}\right) \approx 66{,}80°$. Vektorn $\vec{v}$ har komposanterna (8, 0) och (0, 2), så vinkeln mellan vektorn och x-axeln är $\tan^{-1}\left(\dfrac{2}{8}\right) \approx 14{,}04°$.
Vinkeln mellan vektorerna är ungefär 52,8°.

6220 a) (9, 5)
b) (2, –5,5)
c) (5, –1)

6221 a) Exempelvis $\begin{cases} x = t \\ y = -3 + 2t \end{cases}$

b) Exempelvis $\begin{cases} x = -3t \\ y = 4 + 2t \end{cases}$

6222 a) $y = \dfrac{3x + 19}{5}$

b) $y = -\dfrac{x}{2} - 2$

c) $y = 3x + 11$

6223 $2x + y - 3 = 0$

6224 Lösningsförslag:
$\sin(\arctan\sqrt{3}) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ och
$\cos(\arctan\sqrt{3}) = \dfrac{1}{2}$.
Längden av vektorn
$(1, \sqrt{3}) = 2\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ är
därmed 2, och en förändring av t med ett heltalssteg ger en förflyttning längs linjen med 2. Använd alternativt Pythagoras sats. För de sökta punkternas x-koordinater får vi $2 + \sqrt{3} \pm 1$ och för deras y-koordinater $8 \pm \sqrt{3}$.
Svar: $(1 + \sqrt{3}, 8 - \sqrt{3})$ och $(3 + \sqrt{3}, 8 + \sqrt{3})$

BLANDADE UPPGIFTER

1 3,8 cm och 7,1 cm

2 31,2 cm^2

3 a) (1, 7) b) (7, 5)
c) (7, –6) d) $\sqrt{436} \approx 20{,}9$

4 a) (–1, –3) b) (–2,5; –1)

5 $\vec{F}_x = 38 \cdot \cos 50° \approx 24{,}4$ N,
$\vec{F}_y = 38 \cdot \sin 50° \approx 29{,}1$ N

6 T.ex. $\tan^{-1}(8/20) \approx 21{,}8°$ och 68,2°.

7 12 % · 360 m = 43,2 m

8 a) 45° och 45°
b) $\sqrt{18} \approx 4{,}243$ l.e.

9 a) En rätvinklig triangel.
b) $|\vec{u}| + |\vec{v}| + |\vec{w}|$, eftersom omkretsen är summan av alla delsträckornas längder.

10 $\tan 90° = \dfrac{\sin 90°}{\cos 90°}$, cos 90° = 0.
I matematiken är det inte möjligt att dividera med 0.
tan v går därför inte att beräkna för vinkeln $v = 90°$.

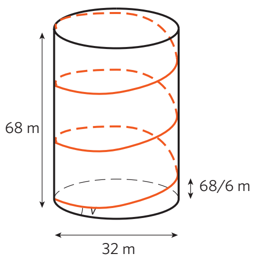
11 Triangelns totala höjd är
(4 + 2 tan 70°) l.e. ≈ 9,5 l.e.
Triangelns totala bas är
$\left(4 + 2 \cdot \dfrac{4}{\tan 70°}\right)$ l.e. ≈ 6,9 l.e.
Triangelns area:
$\left(4 + 2 \cdot \dfrac{4}{\tan 70°}\right) \cdot (4 + 2\tan 70°) / 2$
≈ 32,8 dvs. 32,8 a.e.

12 a) $A = 6 \cdot 10/2$ a.e. = 30 a.e.
b) v är vinkeln med y-axeln:
$v = \tan^{-1}(10/6) \approx 59°$.
u är vinkeln med x-axeln:
$u \approx 31°$.
c) Triangelns hypotenusa
$y = 6 - 0{,}6x$. $6 - 0{,}6x =$
$= 2x + 0{,}8 \Rightarrow x \approx 2$ och
$y \approx 4{,}8$

13 Vinkeln mot x-axeln är v.
$v = \tan^{-1}(2{,}7/1) \approx 70°$

14 Vinkeln mellan $y = -0{,}5x$ och x-axeln är $\tan^{-1}(0{,}5 / 1) \approx 27°$. Vinkeln mellan x-axeln och $y = x$ är $45° \Rightarrow$ vinkeln mellan linjerna är $27° + 45° = 72°$. Den andra vinkeln är $180° - 72° = 108°$

15



Tänk dig att du klipper upp cylindern längs höjden. Första halva varvet blir då en rätvinklig triangel vars bas är lika med halva omkretsen av cylindern. Triangelns höjd är 68/6 m.

Stigningsvinkeln

$$v = \tan^{-1}\left(\frac{\frac{68}{6}}{\frac{\pi \cdot 32}{2}}\right) =$$

$$\tan^{-1}\left(\frac{17}{24\pi}\right) \approx 13°$$

16 Triangelns höjd är $\sqrt{3}$ (Pythagoras sats)

a) $\cos 60° = 1 / 2 = 0{,}5$

b) $\sin 60° = \sqrt{3} / 2$

c) $\tan 30° = 1 / \sqrt{3}$

d) $\sin 30° = 1 / 2$

17 a) $x = \cos 30° = \sqrt{3} / 2$, $y = \pm \sin 30° = \pm 1/2$

b) $x = -\sqrt{3} / 2$, $y = \pm 1/2$

c) Triangelns bas mäts längs linjen $y = 0{,}5$ och är $2 \cdot \sqrt{3} / 2$ l.e. $= \sqrt{3}$ l.e. . Höjden är 0,5 l.e. Arean blir $\sqrt{3} / 4$ a.e.

18 a) Varje triangel har en toppvinkel (i cirkelns medelpunkt) som är $360°/8 = 45°$. Basvinklarna är $(180° - 45°)/2 = 67{,}5°$

b) Trianglarna har toppvinkeln $360°/8 = 45°$. Den delas i två lika stora delar av höjden h i varje triangel.

$$\tan 67{,}5° = \frac{h}{a / 2}$$

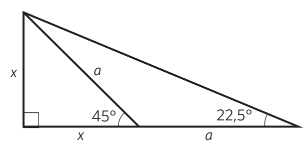
$$h = \frac{a \tan 67{,}5°}{2}$$

Då är arean av varje triangel

$$\frac{a \cdot h}{2} = \frac{a^2 \tan 67{,}5°}{4} \text{ och}$$

8 likadana trianglar har tillsammans arean
$A = 2a^2 \tan 67{,}5° \approx 4{,}83a^2$

19



a) $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$,

$$\tan 22{,}5° = \frac{x}{x + a} = \frac{\frac{a}{\sqrt{2}}}{\frac{a}{\sqrt{2}} + a} =$$

$$= \frac{1 / \sqrt{2}}{1 + 1 / \sqrt{2}} = \frac{1}{1 + \sqrt{2}} \approx 0{,}414$$

b) $\tan 67{,}5° = \frac{x + a}{x} =$

$$= \frac{1}{\tan 22{,}5°} = \frac{1 + \sqrt{2}}{1} \approx 2{,}414$$

c) $\sin 22{,}5° = \frac{\sqrt{0{,}5}a}{\left(\sqrt{2 + \sqrt{2}}\right)a} \approx$

$\approx 0{,}383$

Alt. $\frac{1}{\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}} \approx 0{,}383$

d) $\cos 22{,}5° = \frac{(\sqrt{0{,}5} + 1)a}{\left(\sqrt{2 + \sqrt{2}}\right)a} \approx$

$\approx 0{,}924$

Alt. $\frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}} \approx 0{,}924$

20 a) Alla trianglar har en rät vinkel. $\angle B$ är gemensam i ΔABD och ΔABC. Alltså är $\Delta ABD \sim \Delta ABC$. $\angle C$ är gemensam i ΔABC och ΔADC. Alltså är $\Delta ABC \sim \Delta ADC$. Därmed är alla trianglar likformiga.

b) Arean för ΔABC är $9 \cdot 12 / 2 = 54$ och för ΔADC (som är minst)
$\sqrt{9^2 - 7{,}2^2} \cdot 7{,}2 / 2 = 19{,}44$
Andelen är $19{,}44 / 54 = 0{,}36$

21 a) $\angle B = 30°$,

$$\tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{AC}{AB} \Rightarrow$$

$AB = AC \cdot \sqrt{3}$

Pythagoras sats på ΔABC:
$AC^2 + AB^2 = BC^2 \Rightarrow$
$AC^2 = \left(AC\sqrt{3}\right)^2 = BC^2 \Rightarrow$
$BC = 2AC.$

$BD = AC \Rightarrow$
$AD = AC\left(\sqrt{3} - 1\right) \Rightarrow$

$$\frac{AD}{AC} = \sqrt{3} - 1$$

b) Arean av $\Delta ABC = \frac{\sqrt{3}r^2}{2}$

Arean av cirkelsektorerna =

$$= \frac{60}{360} \cdot \pi \cdot r^2 + \frac{30}{360} \cdot \pi \cdot r^2 = \frac{\pi \cdot r^2}{4}$$

Andelen: (triangelns area – cirkelsektorernas areor)/ triangelns area

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \Big/ \frac{\sqrt{3}}{2} = 1 - \frac{\pi}{2\sqrt{3}}$$

VSV.

KAPITELTEST

1 Den vänstra triangeln är likbent. Alltså är basvinklarna lika stora $(180° - 2x) / 2 = 90 - x$

Sidovinkeln är $180° - (90° - x) = 90° + x$ (sidovinklar är tillsammans 180°)

$v = x$ eftersom triangeln är likbent, $x + x + 90° + x = 180°$ $\Rightarrow\ x = 30°$

2 Trianglarna är likformiga $\Rightarrow$ $\dfrac{x}{2,4} = \dfrac{3,6}{1,8} \Rightarrow x = 4,8$ m

3 $\cos 30° > \tan 30° > \sin 30°$

4 a) $(4, -4)$

b) $(-13, 6)$, dvs. längden = $\sqrt{13^2 + 6^2}$ l.e. $= \sqrt{205}$ l.e. $\approx$ $\approx 14,3$ l.e.

5 $F_x = 200 \cdot \cos 56° \approx 112$ N, $F_y = 200 \cdot \sin 56° \approx 166$ N

6 Triangeln är likformig alltså är basvinklarna lika. Höjden $h = 8 \sin 40° \approx 5,14$

Basen är b, $b / 2 = 8 \cos 40° \approx 6,13$. Arean $6,13 \cdot 2 \cdot 5,14 / 2$ cm$^2 \approx 32$ cm^2

7 $\tan 36° = x/8,0$ där x är den andra kateten. $x \approx 5,8$ cm. Pythagoras sats ger hypotenusan $\approx 9,9$ cm. Omkretsen är 23,7 cm.

8 Arean vänstra triangeln $0,5x^2$, högra triangeln $\dfrac{\sqrt{3}x^2}{2}$

Total area är $0,5x^2 + \dfrac{\sqrt{3}x^2}{2}$

9 Triangeln är likbent och basvinklarna är därför båda 30°, basen = $6,2\sqrt{3}$, höjden 3,1.

Area för triangeln:
$\dfrac{6,2\sqrt{3} \cdot 3,1}{2} \approx 16,6$

Area av sektorn:
$\dfrac{120 \cdot \pi \cdot 6,2^2}{360} \approx 40,25$ a.e.

Segmentets area är (40,25 – 16,6) a.e. = 23,6 a.e.

DISKUTERA, RESONERA, MODELLERA

S. 292

Gravitationsaccelerationen $\vec{g} = (0; -9,82)$ m/s^2

Om $m = 50$ kg är tyngdkraften $\vec{F} = 50\vec{g} = (0; -9,82 \cdot 50)\text{N} =$ $= (0, -491)$N

Luftmotståndskraften $\vec{F}_L = (0; kv^2)$

Resultanten av tyngdkraften och luftmotståndskraften är $\vec{R} = (0; -491)\text{N} + (0; kv^2) =$ $= (0; kv^2 - 491 \text{ N})$

Resultanten är 0 om $kv^2 - 491$ N = 0, så

$v = \sqrt{\dfrac{491}{k}}$ m/s

Om $m = 65$ kg och $k = 197$ kg/m är $\vec{R} = (0; -9,82 \cdot 65)$ N + + (0; 197 kg/m $\cdot\ v^2$) = = (0; 197 kg/m $\cdot\ v^2 - 638,3$ N)

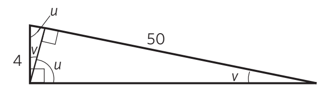
Resultanten är 0 om 197 kg/m $\cdot\ v^2 - 638,3$ N = 0, så

$v = \sqrt{\dfrac{638,3}{197}}$ m/s $\approx 1,8$ m/s.

S. 293

$\sin v = 4/50$, så $v \approx 4,6°$.

$\vec{F}_g = (0; -9,82 \cdot 5)\text{N} = (0; -49,1)$ N



Om vi ritar en sträcka från backens rätvinkliga hörn i rät vinkel upp mot den sluttande sidan, får vi två nya, mindre trianglar.

I figuren gäller $u + v = 90°$. Eftersom vinkeln u är gemensam för den största triangeln och den minsta triangeln, måste den minsta triangelns andra vinkel vara v. Det innebär att trianglarna är likformiga, eftersom vinklarna är lika stora.

Likformighet ger:
$\dfrac{|\vec{F}_g|}{50} = \dfrac{49,1}{50} = \dfrac{|\vec{F}_x|}{4}$,

alltså är $|\vec{F}_x| = \dfrac{4 \cdot 49,1}{50} \approx 3,9$

dvs. $\vec{F} \approx 3,9$ N

Med Pythagoras sats får vi då $3,9^2 + |\vec{F}_y|^2 = 49,1^2$, vilket ger $|\vec{F}_y| \approx 48,9$, dvs. $\vec{F}_y \approx 48,9$ N

Använder vi trigonometri får vi:

$|\vec{F}_x| = |\vec{F}_g| \sin v = 49,1 \sin 4,6° \approx 3,9$

och

$|\vec{F}_y| = |\vec{F}_g| \cos v = 49,1 \cos 4,6° \approx 48,9$

Utför backen verkar kraften 3,9 N. Accelerationen $a = 3,9/5$ m/s^2= 0,78 m/s^2.

$s = \dfrac{at^2}{2}$ ger

$t = \sqrt{\dfrac{2s}{a}} = \sqrt{\dfrac{2 \cdot 50}{0,78}} \approx 11,3$

Svar: 11,3 s